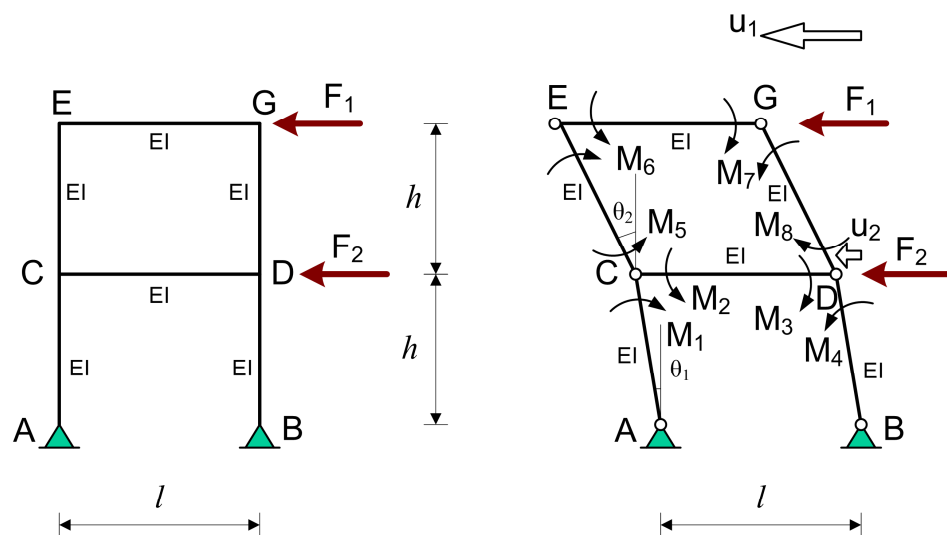


## Krachtenmethode met verplaatsbare knopen met meerdere vrijheidsgraden

Voor statisch onbepaalde constructies met verplaatsbare knopen wordt gebruik gemaakt van de gemengde of ook wel hybride methode. Alle starre verbindingen worden vervangen door scharnieren en de overgangsmomenten in de verbindingen worden als onbekend gekozen. Als hierdoor een kinematisch onbepaalde constructie ontstaat dan is tot nu toe de kinematica van dit mechanisme beschreven met één enkele vrijheidsgraad. Als het mechanisme echter meervoudig kinematisch onbepaald is, dan wordt de beweging van het mechanisme (kinematica) met meerdere vrijheidsgraden beschreven.

In figuur 1a is een ongeschoorde portaalconstructie gegeven met twee verdiepingen. Er wordt gezocht naar een relatie tussen de (horizontale) krachten en de (horizontale) verplaatsingen ter plaatse D en G. Deze stijfheid kan vervolgens worden gebruikt bij de rekenmodellen voor bijvoorbeeld aardbevingen.

Als alle starre verbindingen worden vervangen ontstaat een kinematisch onbepaalde constructie (mechanisme) dat met twee vrijheidsgraden kan worden beschreven. Dit mechanisme is afgebeeld in figuur 1b. De invloed van de axiale vervorming wordt verwaarloosd.



(a) constructie

(b) mechanisme hybride aanpak

Gegevens:  $l = 4,0$  m;  $h = 3,0$  m;  $EI = 10000$  kNm<sup>2</sup>;  $F_1 = 10$  kN;  $F_2 = 15$  kN;

**Figuur 1** : Ongeschoord portaal

### Analyse

De onbekende overgangsmomenten in deze constructie zijn de acht aangegeven momenten. De aangenomen richtingen geven aan hoe deze momenten op de desbetreffende staafuiteinden werken. Vanwege het knoopenwicht zijn in knoop C en D niet alle drie aangegeven momenten onafhankelijk. Dit reduceert het aantal fundamentele onbekende statisch onbepaalden tot zes. Daarnaast zijn er twee starre rotaties  $\theta_1$  en  $\theta_2$  waarmee de kinematica van het mechanisme kan worden beschreven. Totaal levert dit acht fundamentele onbekenden.

Voor de zes onbekende momenten kunnen zes hoekveranderingsvergelijkingen worden opgesteld. In deze vergelijkingen komen zowel de onbekende momenten als de vrijheidsgraden van het mechanisme voor. Er is uiteraard niets op tegen om de acht onbekende momenten te gebruiken in deze zes vergelijkingen. In dat geval moeten echter twee evenwichtsvergelijkingen voor het momentenevenwicht van knoop C en D worden toegevoegd. Deze aanpak zal hieronder worden gevolgd.

Naast de hoekveranderingsvergelijkingen zijn twee extra vergelijkingen nodig om het stelsel te kunnen oplossen. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van het principe van virtuele arbeid. Aangezien er twee vrijheidsgraden zijn moet gelden dat de verandering van de arbeid bij een kleine verstoring van de stand van het mechanisme nul moet zijn omdat er voldaan moet zijn aan het evenwicht:

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial A}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 = 0$$

Aangezien de verandering van de arbeid nul moet zijn voor iedere kinematisch mogelijke variatie  $\delta \theta_1$  en  $\delta \theta_2$  zal moeten gelden:

$$\frac{\partial A}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial \theta_2} = 0;$$

Dit zijn de twee extra vergelijkingen die nodig zijn om alle onbekenden op te lossen.

#### *Uitwerking*

De zes vormveranderingsvoorwaarden zijn hieronder opgesomd. Daarbij zijn alle acht onbekende momenten op de staafuiteinden gebruikt zoals aangegeven in figuur 1b.

$$\begin{aligned} \varphi_C^{AC} = \varphi_C^{CD} &: \frac{-M_1 h}{3EI} + \theta_1 = \frac{M_2 l}{3EI} + \frac{M_3 l}{6EI} \\ \varphi_C^{AC} = \varphi_C^{CE} &: \frac{-M_1 h}{3EI} + \theta_1 = \frac{M_5 h}{3EI} + \frac{M_6 h}{6EI} + \theta_2 \\ \varphi_E^{CE} = \varphi_E^{EG} &: \frac{-M_5 h}{6EI} - \frac{M_6 h}{3EI} + \theta_2 = \frac{M_6 l}{3EI} + \frac{M_7 l}{6EI} \\ \varphi_G^{EG} = \varphi_G^{DG} &: \frac{-M_6 l}{6EI} - \frac{M_7 l}{3EI} = \frac{M_7 h}{3EI} + \frac{M_8 h}{6EI} + \theta_2 \\ \varphi_D^{DG} = \varphi_D^{CD} &: \frac{-M_7 h}{6EI} - \frac{M_8 h}{3EI} + \theta_2 = \frac{-M_2 l}{6EI} - \frac{M_3 l}{3EI} \\ \varphi_D^{CD} = \varphi_D^{BD} &: \frac{-M_2 l}{6EI} - \frac{M_3 l}{3EI} = \frac{M_4 h}{3EI} + \theta_1 \end{aligned}$$

Aan deze set van zes vergelijkingen worden twee evenwichtsvergelijkingen voor het momentenevenwicht op knoop C en D toegevoegd.

$$\begin{aligned} \sum T|_C = 0 &: M_1 - M_2 - M_5 = 0 \\ \sum T|_D = 0 &: M_3 - M_4 + M_8 = 0 \end{aligned}$$

Noot: Er mag uiteraard ook voor worden gekozen om direct één van de momenten op knoop C en D uit te drukken in de beide andere momenten op de knoop.

Tot slot wordt de arbeid uitgedrukt in de twee onbekende vrijheidsgraden van het mechanisme en worden de partiële afgeleiden bepaald:

$$A = -M_1\theta_1 - M_4\theta_1 + M_5\theta_2 - M_6\theta_2 + M_7\theta_2 - M_8\theta_2 + F_1(h\theta_1 + h\theta_2) + F_2\theta_1h$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta_1} = -M_1 - M_4 + F_1h + F_2h$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta_2} = M_5 - M_6 + M_7 - M_8 + F_1h$$

Nul stellen van de partiële afgeleiden levert de laatste twee vergelijkingen:

$$-M_1 - M_4 + F_1h + F_2h = 0$$

$$M_5 - M_6 + M_7 - M_8 + F_1h = 0$$

*Oplossing*

De oplossing van dit stelsel is hieronder gevonden met behulp van MAPLE.

```
> restart;
> eq1:=-M1*h/(3*EI)+theta1=M2*L/(3*EI)+M3*L/(6*EI);
> eq2:=-M1*h/(3*EI)+theta1=M5*h/(3*EI)+M6*h/(6*EI)+theta2;
> eq3:=-M5*h/(6*EI)-M6*h/(3*EI)+theta2=M6*L/(3*EI)+M7*L/(6*EI);
> eq4:=-M6*L/(6*EI)-M7*L/(3*EI)=M7*h/(3*EI)+M8*h/(6*EI)+theta2;
> eq5:=-M8*h/(3*EI)-M7*h/(6*EI)+theta2=-M2*L/(6*EI)-M3*L/(3*EI);
> eq6:=-M2*L/(6*EI)-M3*L/(3*EI)=M4*h/(3*EI)+theta1;
> A:=-M1*theta1+M5*(theta2)+M4*theta1-M8*(theta2)-
    M6*(theta2)+M7*(theta2)+F1*(theta1*h+theta2*h)+F2*theta1*h;
> eq7:=diff(A,theta1)=0;
> eq8:=diff(A,theta2)=0;
> eq9:=M2+M5-M1=0; eq10:=M3+M8-M4=0;
> sol:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq9,eq10},
    {M1,M2,M3,M4,M5,M6,M7,M8,theta1,theta2}); assign(sol);
> u1:=simplify(theta1*h+theta2*h); u2:=theta1*h;
> c11:=coeff(collect(u1,F1),F1); c12:=coeff(collect(u1,F2),F2);
> c21:=coeff(collect(u2,F1),F1); c22:=coeff(collect(u2,F2),F2);
> DD:=(c11*c22-c12*c21); k11:=simplify((1/DD)*c22); k12:=-
    simplify(c12/DD); k21:=-simplify(c21/DD); k22:=simplify(c11/DD);
```

Dit levert:

$$M_1 = \frac{(F_1 + F_2)h}{2}; \quad M_4 = -\frac{(F_1 + F_2)h}{2};$$

$$M_2 = \frac{F_1(2l + 9h) + F_2(l + 6h)}{4(l + 3h)}; \quad M_3 = -\frac{F_1(2l + 9h) + F_2(l + 6h)}{4(l + 3h)};$$

$$M_5 = -\frac{3h^2F_1 - lhF_2}{4(l + 3h)}; \quad M_8 = \frac{3h^2F_1 - lhF_2}{4(l + 3h)};$$

$$M_6 = \frac{hF_1(2l + 3h) + hlF_2}{4(l + 3h)}; \quad M_7 = -\frac{hF_1(2l + 3h) + hlF_2}{4(l + 3h)};$$

$$\theta_1 = \frac{(2l^2 + 13lh + 12h^2)F_1h + (l^2 + 10lh + 12h^2)F_2h}{24EI(l + 3h)}; \quad \theta_2 = \frac{(2l + h)F_1h + hlF_2}{24EI};$$

De uiteindelijke verplaatsingen ter plaatse van de aangebrachte krachten worden hiermee:

$$u_1 = \theta_1 h + \theta_2 h = \frac{(4l^2 + 20lh + 15h^2)h^2}{24EI(l+3h)} F_1 + \frac{(2l^2 + 13lh + 12h^2)h^2}{24EI(l+3h)} F_2 \quad (\leftarrow)$$

$$u_2 = \theta_1 h = \frac{(2l^2 + 13lh + 12h^2)h^2}{24EI(l+3h)} F_1 + \frac{(l^2 + 10lh + 12h^2)h^2}{24EI(l+3h)} F_2 \quad (\leftarrow)$$

De horizontale stijfheid van dit raamwerk ten gevolge van de horizontale belasting kan worden geschreven als:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{met stijfheidsmatrix } [k]$$

In deze vorm is de oplossing echter niet gegeven:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad \text{met flexibiliteitsmatrix } [c]$$

De componenten  $c_{ij}$  van de flexibiliteitsmatrix zijn te herkennen in de eerder gevonden uitdrukkingen voor de verplaatsingen  $u_1$  en  $u_2$ . Door de flexibiliteitsmatrix te inverteren wordt de stijfheidsmatrix verkregen:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{h^3(6h^2 + 11hl + 4l^2)} \begin{bmatrix} 12EI(12h^2 + 10hl + l^2) & -12EI(12h^2 + 13hl + 2l^2) \\ -12EI(12h^2 + 13hl + 2l^2) & 12EI(15h^2 + 20hl + 4l^2) \end{bmatrix}$$

Ter controle worden hier nog numerieke uitkomsten gegeven voor de gegeven parameters uit figuur 1:

$$M_1 = 37,50 \text{ kNm}; \quad M_2 = 39,23 \text{ kNm}; \quad M_3 = -39,23 \text{ kNm}; \quad M_4 = -37,50 \text{ kNm};$$

$$M_5 = -1,73 \text{ kNm}; \quad M_6 = 13,27 \text{ kNm}; \quad M_7 = -13,27 \text{ kNm}; \quad M_8 = 1,73 \text{ kNm};$$

$$\theta_1 = 0,006365 \text{ rad};$$

$$\theta_2 = 0,002125 \text{ rad}; \quad k_{11} = \frac{1}{9} \times 39040 \quad k_{12} = -\frac{1}{9} \times 47360$$

$$u_1 = 0,02547 \text{ m } (\leftarrow); \quad k_{12} = -\frac{1}{9} \times 47360 \quad k_{22} = \frac{1}{9} \times 70240$$

$$u_2 = 0,01910 \text{ m } (\leftarrow);$$

Het bepalen van de figuren voor de krachtsverdeling ( $M$ -,  $V$ - en  $N$ -lijn) alsmede de bepaling van de oplegreacties wordt aan de lezer overgelaten.

*Opmerking:*

1. De hier gepresenteerde aanpak verandert niet wezenlijk als *element-* en/of *knoopbelastingen* worden toegevoegd. De elementbelastingen komen zowel in de *hoekveranderingsvergelijkingen* als in de *arbeidsvergelijkingen* voor, de knooplasten alleen in de *arbeidsvergelijkingen*.
2. Dit probleem kan ook worden opgelost met *vergeet-mij-nietjes* voor staven met verplaatsbare knopen. Hier wordt echter bewust gekozen voor de hybride methode.