

Knik en de Eurocode 3

Bij het dimensioneren van een constructie op knik wordt in de Eurocode 3 uitgegaan van een toets in de *uiterste grenstoestand* waarbij de rekenwaarde van de optredende normaalkracht kleiner moet zijn dan de rekenwaarde voor de sterkte. In deze paragraaf zal deze toets worden toegelicht. Daarvoor zal eerst een uitstapje gemaakt worden naar een toets die betrekking heeft op spanningen aangezien die toets direct gerelateerd kan worden aan de vloeispanning van het materiaal. Vervolgens wordt de aanpak van de Eurocode gepresenteerd waarmee de overeenkomst en het verschil met de theorie van Euler duidelijk wordt gemaakt. We beperken ons in dit boek tot de aanpak voor staalconstructies en zullen zoveel als mogelijk, de symbolen en uitdrukkingen volgen zoals deze in de Eurocode worden gehanteerd.

Knikspanning en slankheid

Voor een op druk belast element met kniklengte L_{cr} kan de Eulerse knikkracht worden bepaald met:

$$F_{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2}$$

Een spanning heeft als definitie :

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

De *Eulerse knikspanning*, aangeduid met de index b van de Engelse aanduiding buckling (knik), kan daarmee geschreven worden als :

$$\sigma_b = \frac{F_{\text{Euler}}}{A} = \pi^2 E \frac{I}{A L_{cr}^2}$$

In deze formule zijn de geometrische gegevens (A , L_{cr} en I) gescheiden van de *materiaaleigenschap*, de elasticiteitsmodulus E . De factor I/A is een *profielgrootte*. Hiervoor is het begrip *traagheidsstraal*, ook wel *oppervlaktmomentarm* i ingevoerd :

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Hiermee kan de formule voor de *Eulerse knikspanning* worden herschreven tot :

$$\sigma_b = \pi^2 E \frac{i^2}{L_{cr}^2}$$

De knikspanning wordt daarmee bepaald door de stijfheid van het materiaal, de elasticiteitsmodulus en de *verhouding van de kniklengte en de traagheidsstraal*. Deze laatste verhouding wordt ook wel de *slankheid* van de staaf genoemd :

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$$

Hiermee kan ten slotte de *Eulerse knikspanning* worden geschreven als :

$$\sigma_b = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{met} \quad \lambda = \frac{L_{cr}}{i} \quad \text{en} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Knikcurve

De *Eulerse knikspanning* moet altijd kleiner zijn dan de vloeispanning van het materiaal. Voor een bepaalde staalsoort kan daarmee worden afgeleid wat de minimale slankheid λ_1 van de drukstaaf moet zijn waarvoor geldt dat de knikspanning kleiner is dan de vloeispanning.

$$f_y > \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{dus} \quad \lambda > \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_y}}$$

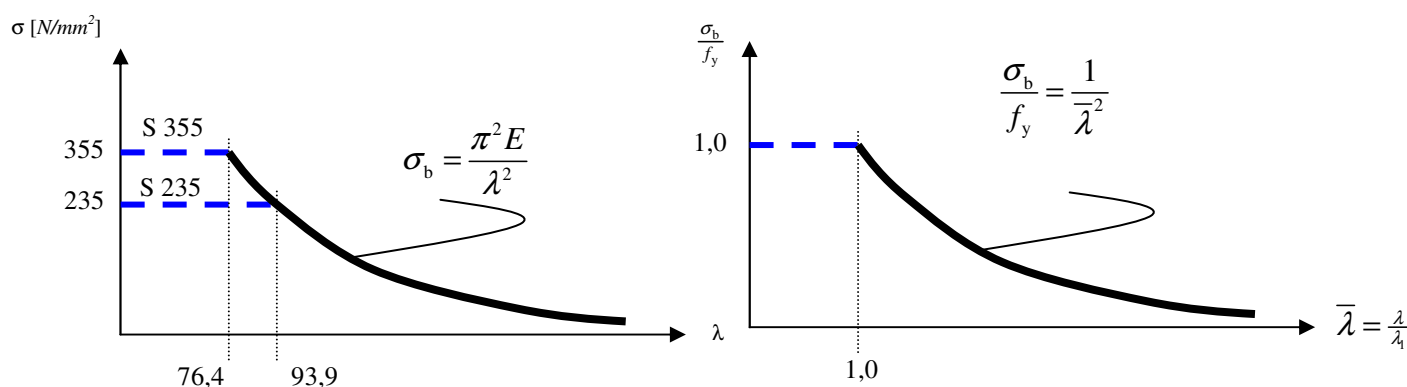
Voor S 355 met een E-modulus van $2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ en een vloeigrens van 355 N/mm^2 geldt :

$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi^2 210 \times 10^3}{355}} = \lambda_1 = 76,4$$

Voor S 235 met een E-modulus van $2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ en een vloeigrens van 235 N/mm^2 geldt :

$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi^2 210 \times 10^3}{235}} = \lambda_1 = 93,9$$

Voor kleine slankheden, zogenaamde gedrongen constructies, geldt dat de *vloeispanning* maatgevend is terwijl voor grote slankheden de *Eulerse knikspanning* maatgevend wordt. Dit is in de onderstaande grafiek van figuur 1a weergegeven.



Figuur 1a : Knikcurve met maatgevende spanning voor S 355 en S 235

1b : Dimensieloze knikcurve volgens Euler

Afzonderlijke knikcurven voor iedere staalsoort zijn onwenselijk. De bovenstaande figuur kan vereenvoudigd worden door de assen dimensieloos te maken. Verticaal wordt de knikspanning gedeeld door de vloeispanning van het materiaal en op de horizontale as wordt de slankheid gedeeld door de minimale slankheid behorende bij de specifieke staalsoort. Hiervoor voeren we een nieuw begrip in, de *relatieve slankheid*. Deze relatieve slankheid is de slankheid van de staaf gedeeld door de minimale slankheid en is een verhoudingsgetal:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

Door de uitdrukking voor de knikspanning links en rechts te delen door de vloeispanning is eenvoudig in te zien dat moet gelden:

$$\frac{\sigma_b}{f_y} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 f_y} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$

De verhouding van de knikspanning t.o.v. de vloeispanning kan hiermee worden herschreven tot:

$$\frac{\sigma_b}{f_y} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$

In figuur 1b is deze algemene relatie in de vorm van de knikcurve volgens Euler weergegeven. Dit resultaat kan als volgt worden geïnterpreteerd. Door de invloed van het knikverschijnsel zal de maximale spanning waarbij bezwijken optreedt, worden gereduceerd. De mate van reductie wordt weergegeven met de bovenstaande knikcurve waardoor de gevonden knikspanning kan worden geschreven als het product van een *knik-reductiefactor* met de vloeispanning van het materiaal.

$$\sigma_b = \chi_{\text{Euler}} f_y$$

De knik-reductiefactor volgens Euler is juist gelijk aan de reciproque van het kwadraat van de *relatieve slankheid*:

$$\chi_{\text{Euler}} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \quad \text{met:} \quad \bar{\lambda} = \frac{L_{\text{cr}}}{i} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{en} \quad \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (1)$$

Helaas ziet de werkelijkheid er iets anders uit dan die volgens Euler. Tal van invloeden leiden tot knikcurven die onder de gevonden knikcurve van Euler liggen. Het hanteren van de formule van Euler is daarmee *onveilig*. Dat betekent dat in de praktijk er een andere uitdrukking voor de knik-reductiefactor ook wel knikfactor χ wordt gehanteerd. In de Eurocode 3 wordt deze knikfactor beschreven.

Eurocode 3 – EN 1993-1-1

De werkwijze in de voorschriften voor staalconstructies is iets anders dan de hierboven weergegeven theorie maar het principe van de Eulerse theorie zit er wel in verwerkt. In de voorschriften moet een constructie op druk in het geval van een stabiliteitstoets worden getoetst met de volgende toetsingsregel :

$$\frac{N_{\text{Ed}}}{N_{\text{b,Rd}}} \leq 1$$

Hierin is :

N_{Ed} is de rekenwaarde van de drukkracht ten gevolge van de belasting

$N_{\text{b,Rd}}$ is de rekenwaarde van de uiterst opneembare knikkracht voor de gegeven doorsnede

De uiterst opneembare knikkracht van de doorsnede kan worden opgevat als de maximale drukkracht die de doorsnede kan opnemen vermenigvuldigd met een reductie factor voor de invloed van knik op het draagvermogen. De rekenwaarde voor de normaal (druk) kracht van de doorsnede is voor gangbare profielen (doorsnede-klasse 1 t/m 3) in de Eurocode gedefinieerd als:

$$N_{c, Rd} = \frac{A f_y}{\gamma_{M0}}$$

Door knik zal dit draagvermogen moeten worden gereduceerd en wordt een aangepaste formule gehanteerd waarbij de invloed van knik op de sterkte is verwerkt in de knik-reductiefactor, ook wel aangeduid met knikfactor χ :

$$N_{b, Rd} = \chi \frac{A f_y}{\gamma_{M1}} \quad \text{doorsnede-klasse 1 t/m 3}$$

$$N_{b, Rd} = \chi \frac{A_{eff} f_y}{\gamma_{M1}} \quad \text{doorsnede-klasse 4}$$

met:

χ knikfactor

A oppervlakte van de doorsnede voor doorsnedeklasse 1 t/m 3

A_{eff} effectieve doorsnede voor doorsnedeklasse 4

γ_{M0} controle algemeen; 1,0 voor gebouwen,

γ_{M1} controle stabiliteit; 1,0 voor gebouwen

De knikfactor χ is een factor die volgt uit een empirische formule:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad \text{en} \quad \chi \leq 1,0$$

met:

$$\Phi = 0,5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right] \quad (2)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{en} \quad \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

Met deze formule wordt rekening gehouden met diverse afwijkingen en onvolkomenheden (imperfecties) die kunnen ontstaan door restspanningen, “size-effects” zoals grote of kleine plaatdikte en de inhomogeniteit van het materiaal.

Afhankelijk van de vorm van de doorsnede moet een specifieke waarde voor de *imperfectiefactor* α worden aangehouden. De Eurocode biedt vijf verschillende mogelijkheden voor de vorm van de zgn. *instabiliteitskrommen* of *knikcurven* **a₀**, **a**, **b**, **c** en **d**. De keuze van de knikcurve is vastgelegd met tabel 6.2 uit de Eurocode 3. De te hanteren waarde voor de imperfectiefactor α wordt bepaald met:

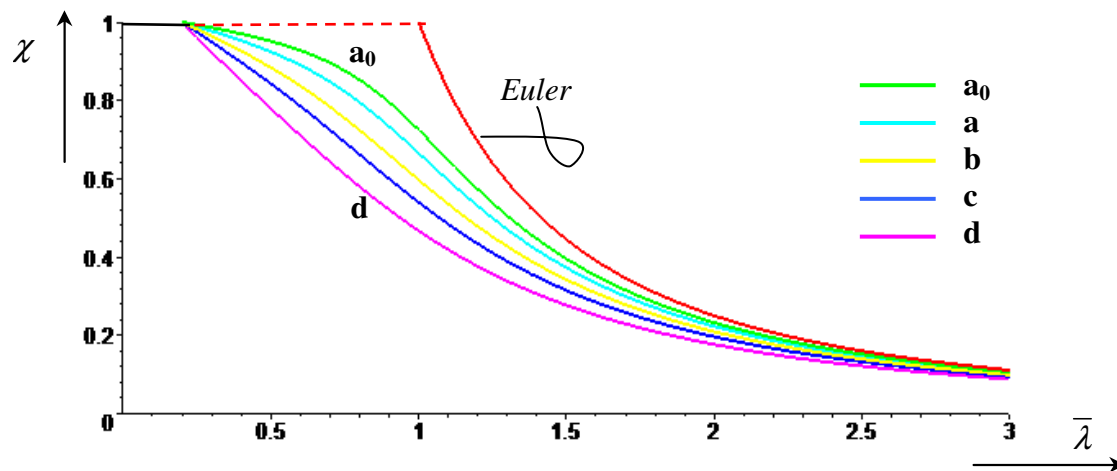
Tabel 1 : Profielconfiguraties

	a₀	a	b	c	d
α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Hoewel formule (2) er geheel anders uit is komen te zien dan formule (1), is de theoretische grondslag nog wel herkenbaar. De knikfactor is nog steeds afhankelijk van de *reciproque* waarde van de *relatieve slankheid* in het kwadraat.

Grafische weergave

De voorgestelde formule kan ook grafisch worden weergegeven. In figuur 2 zijn de instabiliteitskrommen **a** t/m **d** uit de Eurocode volgens formule (2) en de theoretische oplossing van Euler volgens formule (1) weergegeven.



Figuur 2 : Instabiliteitskrommen volgens Eurocode 3
Relatieve slankheid versus knikfactor

Hiermee wordt duidelijk zichtbaar dat de oplossing volgens Euler een hogere belasting toestaat dan in werkelijkheid mogelijk is. De theoretische oplossing is daarmee alleen waardevol om begrip te krijgen voor de kwalitatieve aspecten van knik. Voor de praktische toepassing moeten de voorschriften worden gevolgd. De keuze voor de *stabiliteitskromme* is af te lezen uit tabel 6.2 uit Eurocode 3. In figuur 3 is deze overgenomen¹.

Table 6.2: Selection of buckling curve for a cross-section

Cross section		Limits	Buckling about axis	Buckling curve		
				S 235 S 275 S 355 S 420	S 460	
Rolled sections		$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	a b	a ₀ a ₀
			$40 \text{ mm} < t_f \leq 100$	y-y z-z	b c	a a
		$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y z-z	b c	a a
			$t_f > 100 \text{ mm}$	y-y z-z	d d	c c
Welded I-sections		$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	b c	b c	
		$t_f > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	c d	c d	
Hollow sections		hot finished	any	a	a ₀	
		cold formed	any	c	c	
Welded box sections		generally (except as below)	any	b	b	
		thick welds: $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	any	c	c	
U-, T- and solid sections			any	c	c	
L-sections			any	b	b	

Figuur 3 : Profielconfiguraties en keuze stabiliteitskromme volgens Eurocode 3

¹ De hier weergegeven figuur is overgenomen uit "Eurocode 3 EN1993-1-1: 2005".

Knikfactoren in tabelvorm

Uiteraard kan er ook een tabel worden opgesteld met daarin de waarden voor de knikfactor voor een gegeven relatieve slankheid. Voor alle vijf *instabiliteitskrommen* zijn deze factoren in tabel 2 weergegeven.

Tabel 2 : Knikfactor

$\bar{\lambda}$	Knikfactor χ				
	a0	a	b	c	d
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,3	0,986	0,977	0,964	0,949	0,923
0,4	0,970	0,953	0,926	0,897	0,850
0,5	0,951	0,924	0,884	0,843	0,779
0,6	0,928	0,890	0,837	0,785	0,710
0,7	0,896	0,848	0,784	0,725	0,643
0,8	0,853	0,796	0,724	0,662	0,580
0,9	0,796	0,734	0,661	0,600	0,521
1,0	0,725	0,666	0,597	0,540	0,467
1,1	0,648	0,596	0,535	0,484	0,419
1,2	0,573	0,530	0,478	0,434	0,376
1,3	0,505	0,470	0,427	0,389	0,339
1,4	0,446	0,418	0,382	0,349	0,306
1,5	0,395	0,372	0,342	0,315	0,277
1,6	0,352	0,333	0,308	0,284	0,251
1,7	0,315	0,299	0,278	0,258	0,229
1,8	0,283	0,270	0,252	0,235	0,209
1,9	0,256	0,245	0,229	0,214	0,192
2,0	0,232	0,223	0,209	0,196	0,177
2,1	0,212	0,204	0,192	0,180	0,163
2,2	0,194	0,187	0,176	0,166	0,151
2,3	0,178	0,172	0,163	0,154	0,140
2,4	0,164	0,159	0,151	0,143	0,130
2,5	0,151	0,147	0,140	0,132	0,121
2,6	0,140	0,136	0,130	0,123	0,113
2,7	0,130	0,127	0,121	0,115	0,106
2,8	0,122	0,118	0,113	0,108	0,100
2,9	0,114	0,111	0,106	0,101	0,094
3,0	0,106	0,104	0,099	0,095	0,088
voor tussenliggende waarden mag lineair worden geïnterpoleerd					

Voor verdere toepassingen van de voorschriften wordt verwezen naar de colleges *Staalconstructies*.