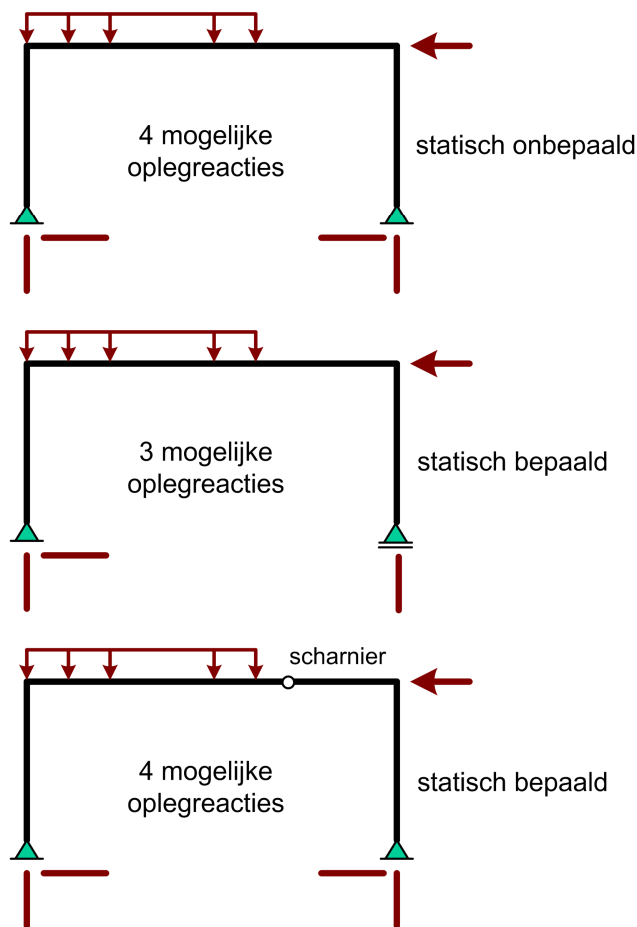


Bepaling van oplegreacties van spanten

Naast liggers, zijn ook spanten of portalen veel voorkomende constructies. Portalen zijn in de steunpunten zowel in horizontale als verticale richting ondersteund en vaak scharnierend verbonden met de fundering (is vaak een aanname). Dat betekent dat hier in principe vier oplegreacties kunnen ontstaan. Voor de hele constructie zijn er echter maar drie evenwichtsvergelijkingen. Van dergelijke portalen kunnen de oplegreacties met behulp van alleen de evenwichtsvergelijkingen niet worden gevonden. Pas in het tweede studiejaar komen deze *statisch onbepaalde* constructies aan bod. Er zijn echter wel mogelijkheden om portalen te maken waarvan de oplegreacties wel op basis van het evenwicht kunnen worden bepaald. Een voorbeeld wordt gegeven in de onderstaande figuur.

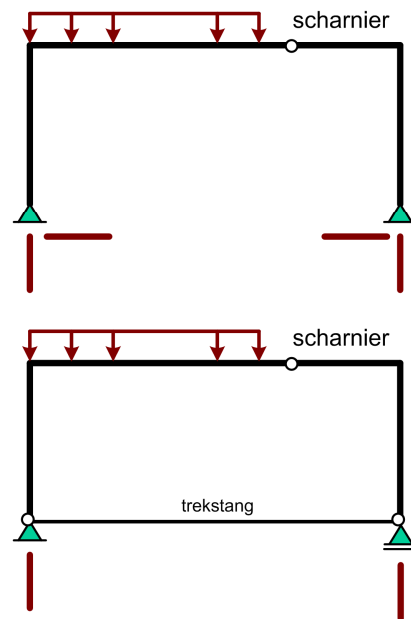


Figuur 1. : Plaatsvaste portalen, statisch (on)bepaalde portalen

Door in de constructie een scharnier aan te brengen, zoals bij het onderste portaal in figuur 1, wordt de constructie een samenstel van meerdere constructiedelen. We noemen dit dan ook een samengestelde constructie. Een portaal met een scharnier bovenin de constructie en twee scharnierende ondersteuning is een voorbeeld van een samengestelde constructie. Een dergelijk portaal wordt een drie-scharnierspant genoemd. Voor de hele constructie gelden de drie evenwichtsvergelijkingen voor evenwicht in een plat vlak en in het scharnier is bekend dat het moment nul moet zijn. Dit gegeven levert een vierde voorwaarde waarmee toch de vier onbekende oplegreacties kunnen worden bepaald.

In Nederland is het vaak lastig om horizontale krachten over te brengen op de fundering. Veelal worden constructies gefundeerd op palen die zijdelings weinig steun kunnen geven. Een alternatief om

een drie-scharnierspant te bouwen zonder grote horizontale krachten op de fundering te krijgen is gegeven in figuur 2.



Figuur 2 : Drie-scharnierspant met trekstang

Hiermee wordt een drie-scharnierspant met een trekstang verkregen. De trekstang koppelt als het ware de beide steunpunten door met elkaar. De kracht in de trekstang is even groot als de horizontale oplegreactie van het drie-scharnierspant zonder trekstang maar met twee scharnierende steunpunten. Merk op dat de onderste figuur alleen leidt tot verticale oplegreacties bij afwezigheid van een horizontale belasting op de constructie. Eventuele horizontale belasting, denk aan wind, moet uiteraard nog wel kunnen worden opgenomen door de fundering.

Berekenen van oplegreacties

In een korte toelichting zal de strategie worden beschreven voor het bepalen van de oplegreacties van drie-scharnierspanten. We onderscheiden twee typen:

- drie-scharnierspant met oplegpunten op gelijke hoogte
- drie-scharnierspant met oplegpunten op ongelijke hoogte

Daarnaast zal nog een handigheidje worden toegelicht indien één van de delen van het spant onbelast is.

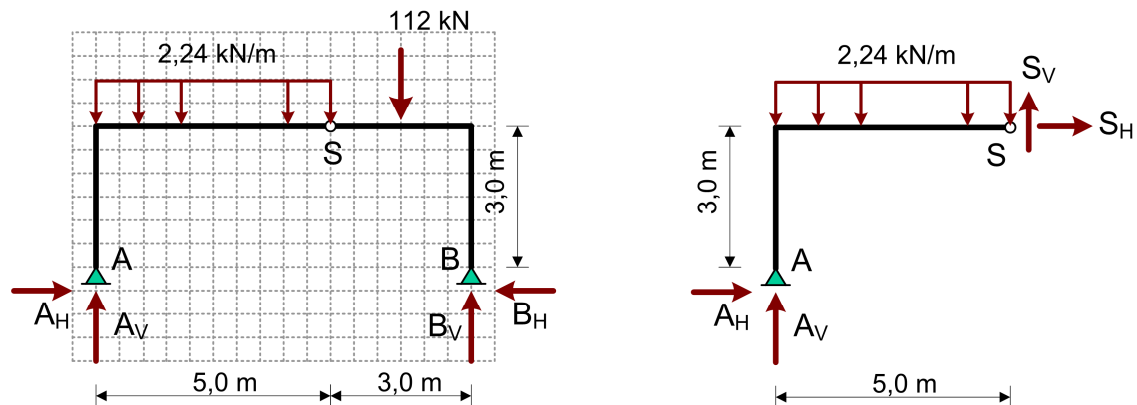
Drie-scharnierspant met oplegpunten op gelijke hoogte

Het berekenen van de oplegreacties van scharnierspanten met steunpunten op *gelijke hoogte* verloopt volgens een vaste strategie:

- Geef de vier onbekende oplegreacties in een schets aan
- Kies de oplegging waarvoor de oplegreacties als eerste moeten worden bepaald.
- Neem de momentensom om het andere steunpunt van de gehele constructie en stel deze gelijk aan nul. Los hiermee de verticale oplegreactie op.
- Neem de momentensom van het vrijgemaakte deel van de constructie waar de onbekende oplegreacties op werken t.o.v. het scharnier en stel deze momentensom nul. Los hiermee de horizontale oplegreactie op. De onbekende verbindingskrachten in het scharnier gaan met hun werklijn door dit punt en komen zo niet in de vergelijking voor.

- Bepaal met behulp van het verticale en horizontale evenwicht de oplegreacties van de andere ondersteuning.

In figuur 3 wordt een voorbeeld gegeven. Gekozen wordt om eerst de oplegreacties bij A te bepalen. In de rechter figuur van figuur 3 is het linkerdeel van de constructie vrijgemaakt t.p.v. het scharnier. De verbindingskrachten in het scharnier zijn uiteraard onbekend.



Figuur 3 : Drie-scharnierspant met opleggingen op gelijke hoogte

Uitwerken van de bovenstaande stappen levert:

momentensom van het geheel om B: (kies b.v. rechtsom positief)

$$\sum T|_B = 0; \quad A_v \cdot 8,0 - (2,24 \cdot 5,0) \cdot (2,5 + 3,0) - 112 \cdot 1,5 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$A_v = 28,7 \text{ kN} \uparrow$$

momentensom van het linkerdeel om S: (kies b.v. rechtsom positief)

$$\sum T|_S = 0; \quad 28,7 \cdot 5,0 - (2,24 \cdot 5,0) \cdot 2,5 - A_h \cdot 3,0 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$A_h = 38,5 \text{ kN} \rightarrow$$

verticaal evenwicht: (kies b.v. omhoog positief)

$$\sum F_z = 0; \quad 28,7 - (2,24 \cdot 5) - 112 + B_v = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$B_v = 94,5 \text{ kN} \uparrow$$

horizontaal evenwicht: (kies b.v. naar rechts positief)

$$\sum F_z = 0; \quad 38,5 - B_h = 0 \quad \Leftrightarrow$$

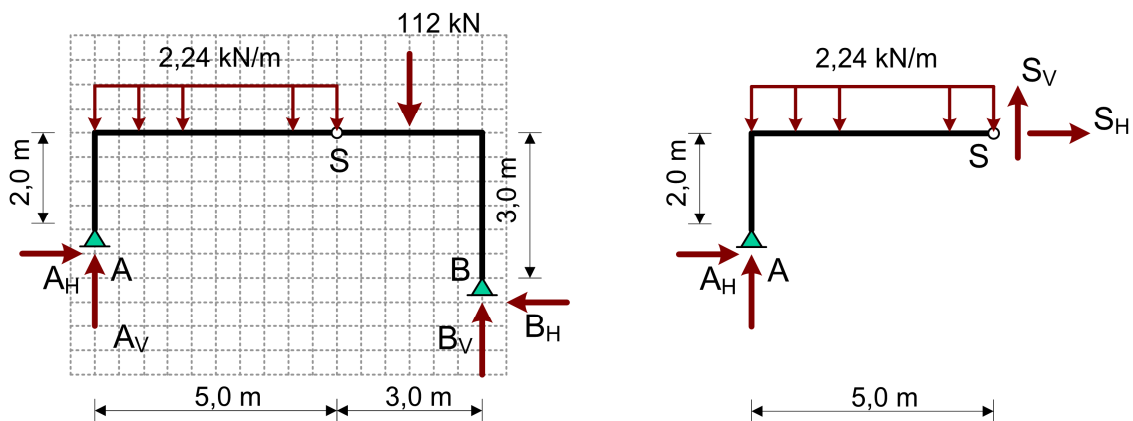
$$B_h = 38,5 \text{ kN} \leftarrow$$

Drie-scharnierspant met oplegpunten op ongelijke hoogte

Het berekenen van de oplegreacties van scharnierspanten met steunpunten op *ongelijke hoogte* verloopt volgens een vaste strategie:

- Geef de vier onbekende oplegreacties in een schets aan
- Kies de oplegging waarvoor de oplegreacties als eerste moeten worden bepaald.
- Neem de momentensom om het andere steunpunt van de gehele constructie en stel deze gelijk aan nul.
- Neem de momentensom van het vrijgemaakte deel van de constructie waar de onbekende oplegreacties op werken t.o.v. het scharnier en stel deze momentensom nul. De onbekende verbindingskrachten in het scharnier gaan met hun werklijn door dit punt en komen zo niet in de vergelijking voor.
- Los de twee vergelijkingen met de twee onbekenden op.
- Bepaal met behulp van het verticale en horizontale evenwicht de oplegreacties van de andere ondersteuning.

In figuur 4 wordt een voorbeeld gegeven. Gekozen wordt om eerst de oplegreacties bij A te bepalen. In de rechter figuur van figuur 4 is het linkerdeel van de constructie vrijgemaakt t.p.v. het scharnier. De verbindingskrachten in het scharnier zijn uiteraard onbekend



Figuur 4 : Drie-scharnierspant met opleggingen op ongelijke hoogte

Uitwerken van de bovenstaande stappen levert:

momentensom van het geheel om B: (kies b.v. rechtsom positief)

$$\sum T|_B = 0; \quad A_v \cdot 8,0 + A_h \cdot 1,0 - (2,24 \cdot 5,0) \cdot (2,5 + 3,0) - 112 \cdot 1,5 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$8A_v + A_h - 229,6 = 0 \quad (1)$$

momentensom van het linkerdeel om S: (kies b.v. rechtsom positief)

$$\sum T|_S = 0; \quad A_v \cdot 5,0 - A_h \cdot 2,0 - (2,24 \cdot 5,0) \cdot 2,5 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$5A_v - 2A_h - 28,0 = 0 \quad (2)$$

uit (1) volgt:

$$A_h = 229,6 - 8A_v$$

invullen in (2) levert:

$$5A_v - 2(229,6 - 8A_v) - 28,0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5A_v + 16A_v - 2 \cdot 229,6 - 28,0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$A_v = 23,2 \text{ kN } \uparrow; \quad A_h = 229,6 - 8 \cdot 23,2 = 44,0 \text{ kN } \rightarrow;$$

verticaal evenwicht: (kies b.v. omhoog positief)

$$\sum F_z = 0; \quad 23,2 - (2,24 \cdot 5) - 112 + B_v = 0 \Leftrightarrow$$

$$B_v = 100,0 \text{ kN } \uparrow$$

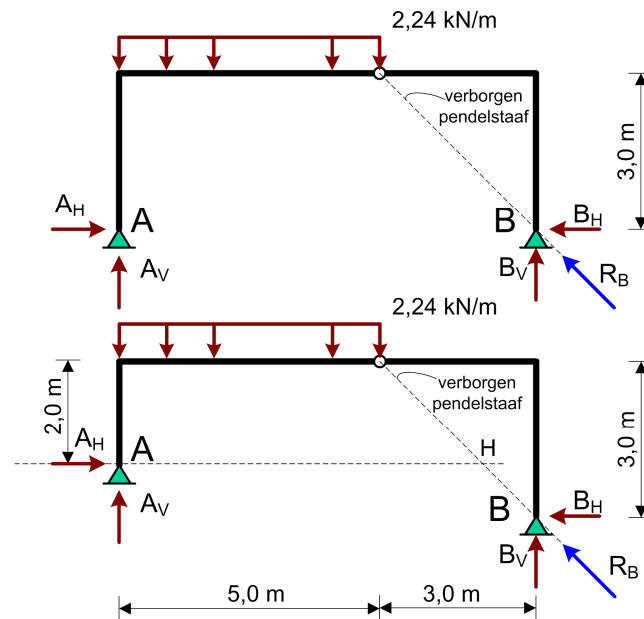
horizontaal evenwicht: (kies b.v. naar rechts positief)

$$\sum F_x = 0; \quad 44,0 - B_h = 0 \Leftrightarrow$$

$$B_h = 44,0 \text{ kN } \leftarrow$$

Handigheidje bij onbelaste spandelen

Als een van de spandelen onbelast is, kan de bepaling van de oplegreacties worden vereenvoudigd. In de praktijk komt dit overigens niet of nauwelijks voor, het gaat hier louter om een educatieve toepassing van een “handigheidje”. In figuur 5 zijn de twee drie-scharnierspanten opnieuw getekend, maar nu zonder de puntlast op het rechter deel.



Figuur 5 : Drie-scharnierspanten met onbelast deel

Het rechterdeel B-S wordt nu alleen in S en B belast met krachten. In S gaat het om de verbindingskrachten in het scharnier en in B om de oplegreacties. Het deel B-S kan alleen in evenwicht zijn (krachten- en momentenevenwicht) als de werklijn van de resultante kracht in het scharnier en de oplegreactie R_B samenvallen met de lijn B-S. Uiteraard moet de oplegreactie even groot en tegengesteld zijn aan de resultante kracht in het scharnier. Het deel B-S is als het ware te vervangen door een vervangende pendel. Met dit gegeven is direct de verhouding bekend tussen de horizontale en verticale oplegreactie in B.

Met behulp van figuur 5 wordt duidelijk dat voor de bepaling van de oplegreacties voor het bovenste spant er niets verandert aan de strategie. Dit wordt toegelicht voor de bepaling van de oplegreacties in A:

momentensom van het geheel om B: (kies b.v. rechtsom positief)

$$\sum T|_B = 0; \quad A_v \cdot 8,0 - (2,24 \cdot 5,0) \cdot (2,5 + 3,0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$A_v = 7,7 \text{ kN } \uparrow$$

momentensom van het linkerdeel om S: (kies b.v. rechtsom positief)

$$\sum T|_S = 0; \quad 7,7 \cdot 5,0 - (2,24 \cdot 5,0) \cdot 2,5 - A_h \cdot 3,0 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$A_h = 3,5 \text{ kN } \rightarrow$$

Voor het tweede spant kan echter nu een handig punt H worden gekozen voor het bepalen van de momentensom van alle krachten op de gehele constructie. De werklijn van de oplegreactie R_B in B gaat door H en komt niet voor in de evenwichtsvergelijking voor het moment en ook de horizontale oplegreactie in A gaat door H. Zo kan direct met één evenwichtsvergelijking de verticale oplegreactie in A worden bepaald.

momentensom van het geheel om H: (kies b.v. rechtsom positief)

$$\sum T|_B = 0; \quad A_v \cdot 7,0 - (2,24 \cdot 5,0) \cdot (2,5 + 2,0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$A_v = 7,2 \text{ kN } \uparrow$$

momentensom van het linkerdeel om S: (kies b.v. rechtsom positief)

$$\sum T|_S = 0; \quad 7,2 \cdot 5,0 - (2,24 \cdot 5,0) \cdot 2,5 - A_h \cdot 2,0 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$A_h = 4,0 \text{ kN } \rightarrow$$

De vervolgstappen voor het vinden van de oplegreacties in B blijven onveranderd.

Nadrukkelijk wordt er hier op gewezen dat dit een bijzonder geval is en feitelijk een academisch probleem is om een handigheidje toe te lichten.