

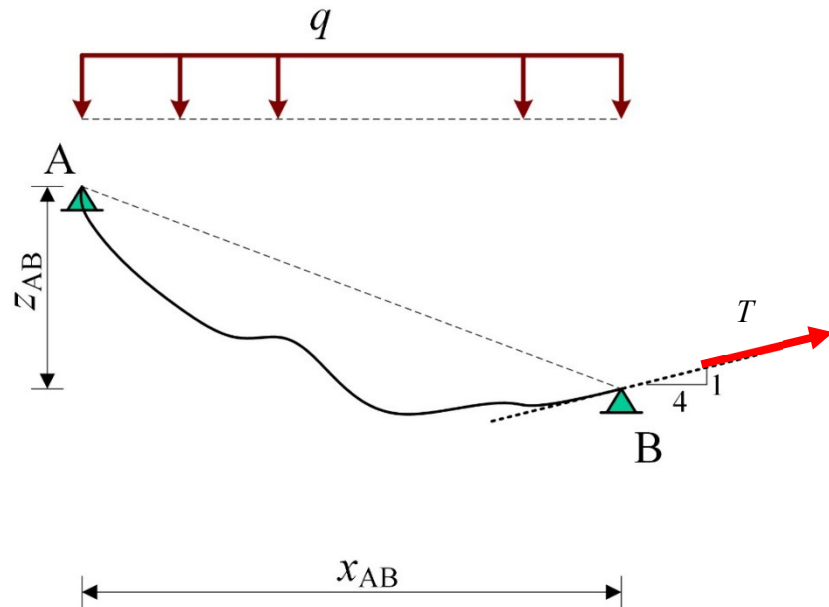
Kabel met verdeelde belasting

Gegeven:

$$x_{AB} = 6 \text{ m}; \quad z_{AB} = 3 \text{ m}; \quad T = 9\sqrt{17} \text{ kN};$$

Gevraagd:

Bepaal de q -last en de positie van de kabel halverwege AB ten opzichte van A.



De uitwerking is hieronder gegeven.
De oplossing kan op drie verschillende manieren worden gevonden:

1. Op basis van evenwichtsvergelijkingen
2. Gebruik makend van de gelijkvormigheid van de kabelvorm en de momentenlijn van een rechte ligger met dezelfde verticale belasting.
3. De differentiaalvergelijking

Oplossing met evenwichtsvergelijkingen

Op basis van de bekende richting en grootte van de kracht in B kan met momentenevenwicht de grootte van de q -last worden bepaald. We starten met wat bekend is uit de gegeven kabelkracht en richting in B.

$$T = H\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}H\sqrt{17} = 9\sqrt{17} \quad (\text{gegeven}) \Leftrightarrow H = 36 \text{ kN}$$

De verticale component van de kabelkracht B_V in B is gegeven de helling 9 kN ($\uparrow$). De A_V is op basis van verticaal evenwicht vervolgens 45 kN ($\uparrow$).

Momentenevenwicht om A levert vervolgens:

$$\Sigma \Big|_A^{\text{geheel}} = 0; \quad B_V \cdot 6 + H \cdot 3 - \frac{1}{2}q \cdot 6^2 = 0$$

invullen:

$$9 \cdot 6 + 36 \cdot 3 - \frac{1}{2}q \cdot 36 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{54 + 108}{18} = 9 \text{ kN/m}$$

De positie van de kabel halverwege AB t.o.v. A kan nu worden bepaald met een snede halverwege AB:

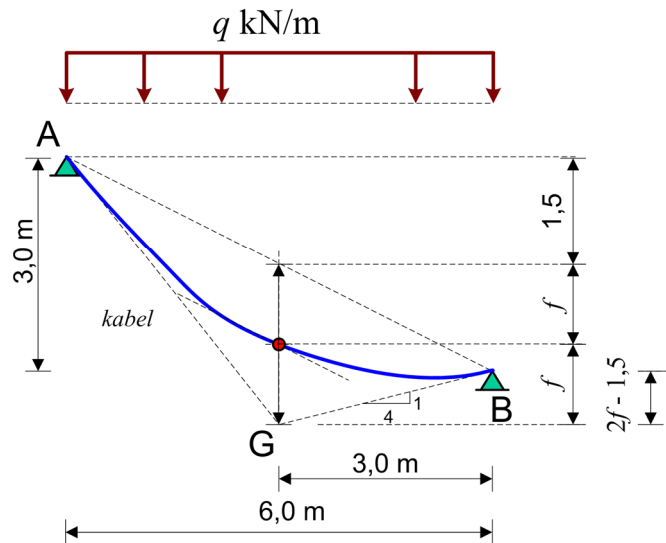
$$\Sigma \Big|_{\text{snede}}^{\text{linker deel}} = 0; \quad -A_V \cdot 3 + H \cdot z_{\text{midden}} + \frac{1}{2}q \cdot 3^2 = 0$$

invullen:

$$-45 \cdot 3 + 36 \cdot z_{\text{midden}} + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow z_{\text{midden}} = \frac{-40,5 + 135}{36} = 2,625 \text{ m}$$

Oplossing op basis van de bekende kabelvorm

Halverwege de kabel ligt het snijpunt G van de raaklijnen $2f$ onder de koorde.



De helling van GB is gegeven als 1 op 4. Verder is de pijl f van de parabool volgens de theorie, gelijk aan de pijl van de momentenlijn van een horizontale ligger met dezelfde belasting, gedeeld door H . Waarin H de horizontale component is van de kabelkracht T .

Hieruit volgt:

$$\frac{2f - 1,5}{3} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\text{met : } f = \frac{\frac{1}{8}ql^2}{H} \quad \text{en} \quad T = H\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = 9\sqrt{17} \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{4 \cdot 9\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 36 \text{ kN}$$

Dit resultaat in (1) invullen levert:

$$\frac{\frac{\frac{1}{4}q6^2}{36} - 1,5}{3} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad q = 9 \text{ kN/m}$$

De pijl f van de parabool wordt hiermee 1,125 m. Het punt halverwege de kabel (rode stip) komt hiermee $1,5 + 1,125 = 2,625$ m onder A te liggen en 0,375 m boven B.

Oplossing met behulp van de differentiaalvergelijking

Dit resultaat kan ook met wat wiskunde worden gevonden door gebruik te maken van de differentiaalvergelijking van het kabelprobleem. Met de oorsprong van het assenstelsel in A is de algemene oplossing hiervan:

$$\begin{aligned}
 -H \frac{d^2 z(x)}{dx^2} &= q \quad \Leftrightarrow \\
 z(x) &= \frac{-qx^2}{2H} + C_1 x + C_2 \\
 \frac{dz(x)}{dx} &= \frac{-qx}{H} + C_1 \quad (\text{helling})
 \end{aligned}$$

Bekend zijn:

$$\begin{aligned}
 z(0) &= 0; \\
 z(l) &= 3,0; \\
 \frac{dz(l)}{dx} &= -\frac{1}{4};
 \end{aligned}$$

Met de eerste twee voorwaarden wordt gevonden:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{2} + 3 \frac{q}{H}; \\
 C_2 &= 0;
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt voor de 3^e voorwaarde (helling) in B:

$$\frac{dz(6)}{dx} = \frac{-6q}{H} + \frac{1}{2} + \frac{3q}{H} = -\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{H}{4} \quad (1)$$

De trekkracht T in de kabel is bekend in B. Dit is het laatste gegeven dat we kunnen gebruiken:

$$\begin{aligned}
 T(x) &= H \sqrt{1 + \left(\frac{dz(x)}{dx} \right)^2} \\
 T(6) &= H \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{4} \right)^2} = \frac{1}{4} H \sqrt{17} = 9\sqrt{17} \quad (\text{gegeven})
 \end{aligned}$$

De vergelijking van de kabelvorm wordt (oorsprong in A):

$$z(x) = -\frac{1}{8} x^2 + \frac{5}{4} x$$

Halverwege AB wordt daarmee de verticale positie van de kabel:

$$z(3) = -\frac{1}{8} 3^2 + \frac{5}{4} 3 = 2,625 \text{ m}$$