

Tentamen CT2031

ConstructieMechanica 3

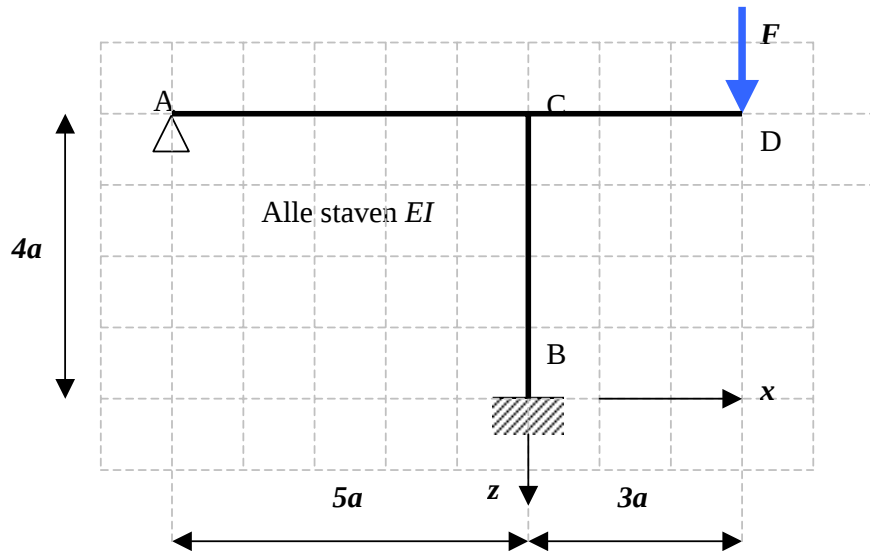
29 februari 2003 van 09:00 – 12:00 uur

Als de kandidaat niet voldoet aan de voorwaarden tot deelname wordt het tentamenwerk niet beoordeeld.

- Dit tentamen bestaat uit **5 opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- GSM toestellen mogen niet aan staan tijdens het tentamen
- Maak gebruik van het formuleblad dat op de laatste pagina staat afgedrukt

OPGAVE 1 : Krachtenmethode (ca 30 min)

In het hieronder weergegeven raamwerk hebben alle staven dezelfde buigstijfheid EI . Vervorming door normaalkracht wordt verwaarloosd. In knoop C komen drie staven samen die hier momentvast aan elkaar verbonden zijn.



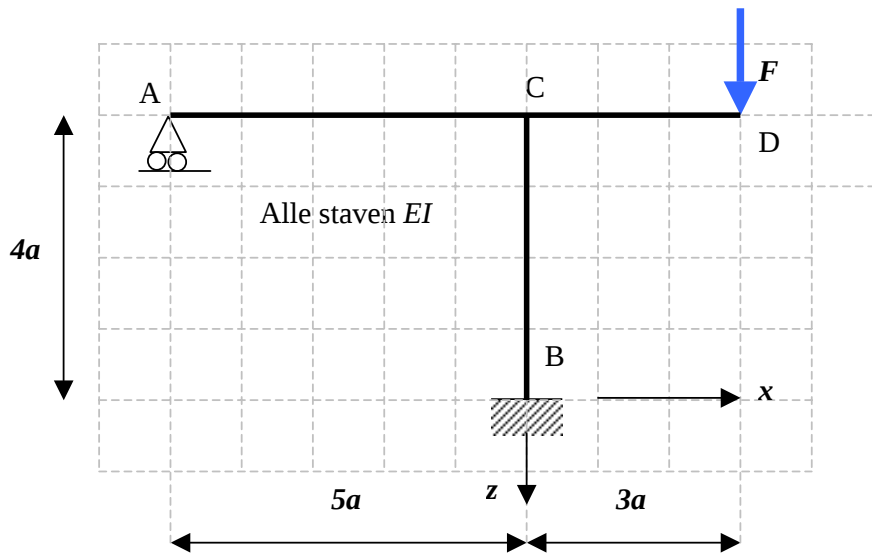
Gegeven : $EI = 1000 \text{ kNm}^2$ $a = 1,0 \text{ m}$ $F = 16 \text{ kN}$

Vragen :

- Teken de te verwachte vervormde constructie en geef daarbij de vervormingstekens aan.
- Bepaal de krachtsverdeling in deze constructie m.b.v. hoekveranderingsvergelijkingen.
- Teken voor de gehele constructie de momentenlijn en de dwarskrachtenlijn. Vermeld daarbij alle relevante waarden en de vervormingstekens.
Controleer vervolgens met dit resultaat het antwoord op vraag a).
- Bepaal de oplegreacties

OPGAVE 2 : Krachtenmethode (vervolg) (ca 40 min)

De constructie uit de vorige opgave is een klein beetje gemodificeerd. De vaste ondersteuning in A is een horizontale rol geworden. Overige gegevens zijn identiek aan de vorige opgave.



Gegeven : $EI = 1000 \text{ kN/m}^2$ $a = 1,0 \text{ m}$ $F = 16 \text{ kN}$

Vragen :

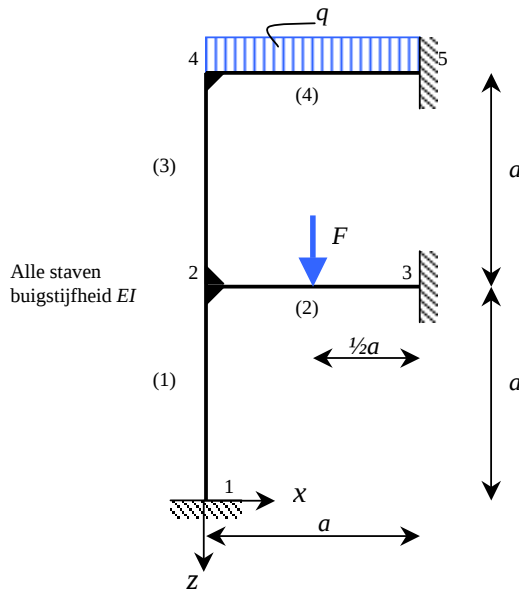
- a) Teken de vervormde constructie. Wat verandert er in de berekeningsmethodiek t.o.v. het vorige vraagstuk ?

Voor de berekening van de krachtsverdeling wordt een scharnier aangebracht in staaf AC, direct links van C. Er ontstaat dan een statisch bepaald hoofdsysteem waarbij de inklemming in B wordt gehandhaafd.

- b) Teken dit statisch bepaalde hoofdsysteem en geef daarbij de statisch onbepaalde(n) aan.
 c) Formuleer de vormveranderingsvoorwaarde(n).
 d) Los de statisch onbepaalde(n) op.
 e) Teken voor de gehele constructie de momentenlijn.
 f) Bepaal de verplaatsing van punt D.

OPGAVE 3 : Verplaatsingenmethode (ca 40 min)

Van de onderstaande raamwerkconstructie wordt gevraagd de krachtsverdeling te bepalen met behulp van de verplaatsingenmethode. Alle staven in de constructie hebben een buigstijfheid EI en een lengte a . De belasting bestaat uit een gelijkmatig verdeelde belasting q op de bovenregel en een puntlast F op de tussenregel, halverwege de overspanning. De 5 knooppuntnummers en de 4 staafnummers (tussen haakjes) die aangehouden moeten worden zijn in de figuur weergegeven.



Voor de staven in dit raamwerk kan gebruik worden gemaakt van de volgende elementstijfheidsmatrix :

$$K^{(e)} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Hierin is EI de buigstijfheid van de staaf en l de lengte van de staaf

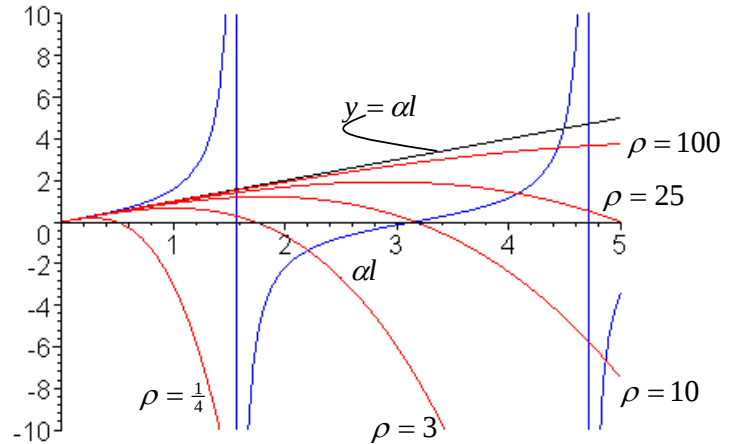
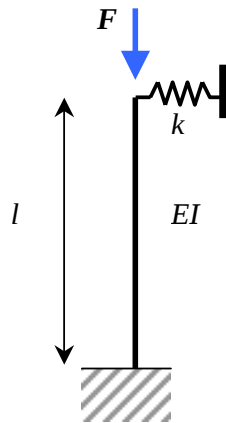
Gegevens: $EI = 12,5 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$; $F = 56 \text{ kN}$; $q = 12 \text{ kN/m}$; $a = 5 \text{ m}$

Vragen:

- Stel voor ieder element de **elementstijfheidsmatrix** en de **elementkrachtenvector** op.
- Assembleer de **stelsystemstijfheidsmatrix** en de **stelsystemkrachten-** en **stelsystemverplaatsingen**vector.
- Geef in dit stelsel aan wat de onbekenden zijn en reduceer het stelsel.
- Los de onbekenden op.
(controle : in **absolute** zin zijn een deel van de onbekenden $1,0 \cdot 10^{-3}$)
- Bereken voor alle staven de elementkrachten
- Teken voor de gehele constructie de momentenlijn. Vermeld daarbij alle relevante waarden en de vervormingstekens.
- Bepaal de oplegreacties in knoop 3 en geef de richting aan waarin deze werken.

OPGAVE 4 : Stabiliteit van de verend ondersteunde buigzame staaf (ca 30 min)

In de aanwezige handboeken op het ingenieursbureau ontbreekt een basis-knikformule voor het onderstaande knikprobleem. U offert uw lunch op om hier een oplossing voor te zoeken.



- Teken op basis van uw kennis over standaard-knikgevallen de uitbuigingsvormen waartussen de uitbuigingsvorm van het bovenstaande probleem zal moeten liggen en geef daarbij aan tussen welke waarden de kniklengte zal moeten liggen.
- Toon aan dat voor dit knikprobleem de onderstaande transcendente vergelijking moet worden opgelost :

$$\tan \alpha l = \alpha l - \frac{(\alpha l)^3}{\rho} \quad \text{met : } \rho = \frac{kl^3}{EI} \quad (1)$$

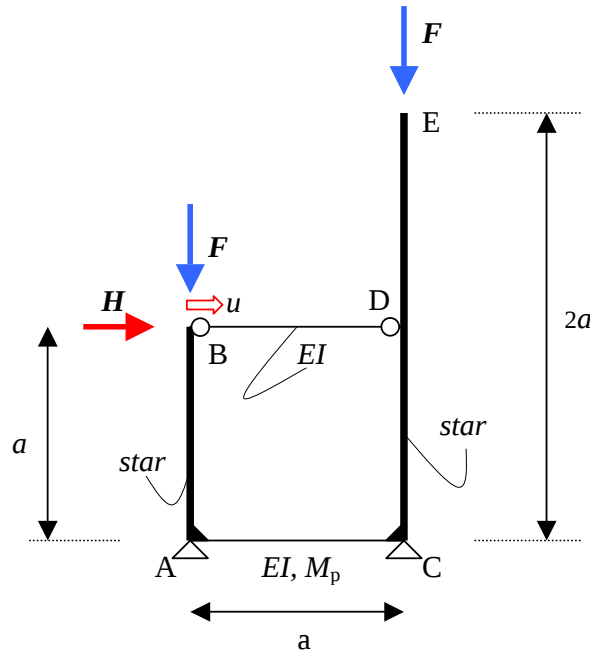
Van het knikprobleem zijn de volgende gegevens bekend :
 $EI = 3200 \text{ kNm}^2$; $k = 150 \text{ kN/m}$; $l = 4,0 \text{ m}$

Tevens is er een grafische weergave gegeven van de transcendente vergelijking voor verschillende waarden van ρ . Hierdoor is het mogelijk de volgende vragen te beantwoorden :

- Bepaal de knikkracht en de kniklengte voor de hierboven vermelde gegevens.
- Laat zien dat de bovenstaande uitdrukking (1) tot de juiste oplossingen leidt voor de uitersten die u onder a) heeft beschreven.

OPGAVE 5 : Bezijken door instabiliteit**(ca 40 min)**

Van de onderstaande constructie zijn de beide stijlen oneindig stijf. De regels hebben een buigstijfheid EI . Staaf BD is scharnierend verbonden met de beide regels, staaf AC heeft een volplastisch moment M_p . De afmetingen en de belastingen zijn in de onderstaande figuur weergegeven.



Gegevens : $a = 3,0$ m; $EI = 2250$ kNm²; $M_p = 63$ kNm; $F = 200$ kN; $H = 15$ kN;

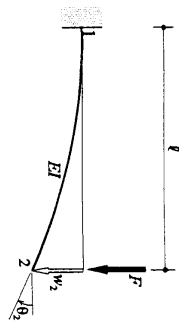
Vragen:

- Bepaal de evenwichtsvergelijking voor deze constructie voor zowel de elastische als de plastische fase.
- Bepaal de kniklast.
- Bepaal de eerste orde verplaatsing van punt B voor $H = 15$ kN.
- Bepaal de eerste orde bezwijkbelasting H_p en de verplaatsing u_p waarbij de regel AC plastisch wordt.
- Bepaal de tweede orde verplaatsing van punt B voor de gegeven H en F .
- Bepaal de kritieke belasting F_c waarbij bezijken door instabiliteit optreedt.
- Teken voor $H=15$ kN het *last-verplaatsingsdiagram* voor de horizontale verplaatsing van punt B en geef alle relevante punten en waarden hierin aan. Geef ook aan hoe deze lijn zich verhoudt tot de kniklast.

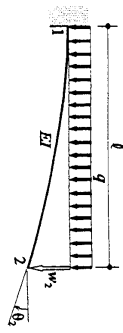
Enige formules voor prismatische staven (vergeet-nij-nietjes)



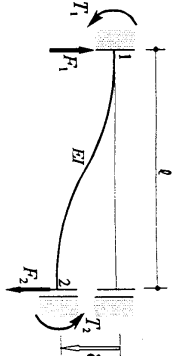
$$\theta_2 = \frac{Tl}{EI}, \quad w_2 = \frac{Tl^2}{2EI}$$



$$\theta_2 = \frac{Fl^2}{2EI}, \quad w_2 = \frac{Fl^3}{3EI}$$

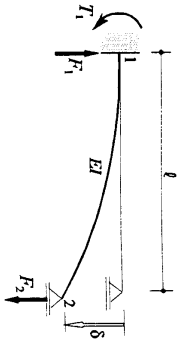


$$\theta_2 = \frac{ql^3}{6EI}, \quad w_2 = \frac{ql^4}{8EI}$$



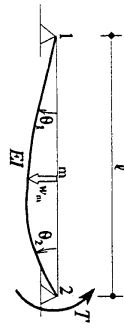
$$T_1 = T_2 = \frac{6EI}{l^2} \delta$$

$$F_1 = F_2 = \frac{12EI}{l^3} \delta$$



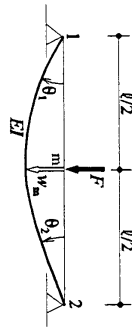
$$T_1 = \frac{3EI}{l^2} \delta$$

$$F_1 = F_2 = \frac{3EI}{l^3} \delta$$



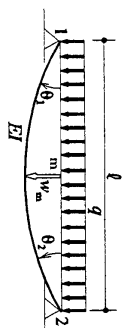
$$\theta_1 = \frac{Tl}{6EI}, \quad \theta_2 = \frac{Tl}{3EI}$$

$$w_m = \frac{Tl^2}{16EI}$$



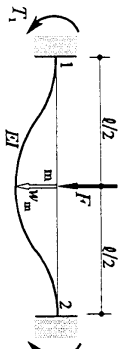
$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Fl^2}{16EI}$$

$$w_m = \frac{Fl^3}{48EI}$$



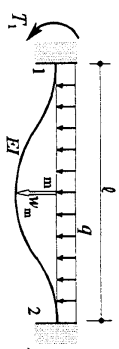
$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$w_m = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$$



$$T_1 = T_2 = \frac{1}{8} Fl$$

$$w_m = \frac{1}{192} \frac{Fl^3}{EI}$$



$$T_1 = T_2 = \frac{1}{12} ql^2$$

$$w_m = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

FORMULE BLAD

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_k = l \sqrt{4 + \frac{10}{\rho}}$$

met: $\rho = \frac{rl}{EI}$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\text{en } S_z(x) = M' - Fw'$$

algemene oplossing :

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x$$

dus :

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3 \alpha \sin \alpha x - C_4 \alpha \cos \alpha x$$

$$M(x) = EI \times [C_3 \alpha^2 \cos \alpha x + C_4 \alpha^2 \sin \alpha x]$$

$$S_z(x) = -F \cdot C_2$$

Ongeschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met: } \begin{aligned} \eta_1 &= 4 + \frac{10}{\rho_1}; \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 &= 4 + \frac{10}{\rho_2}; \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{aligned}$$

Geschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met: } \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

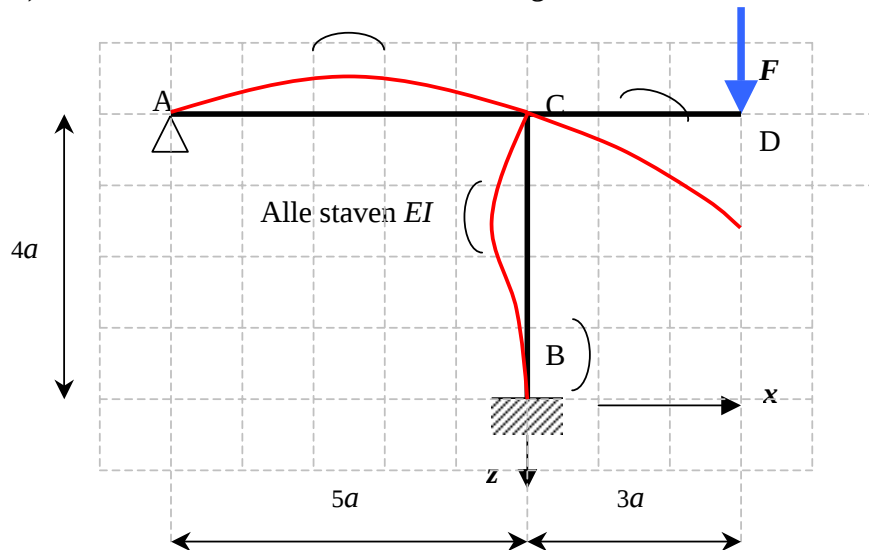
Gonio uitkomsten:

$$\tan \alpha l = \alpha l \Rightarrow \alpha l \cong 4,49 \cong \frac{\pi}{0,7}$$

BEKNOPTE UITWERKING

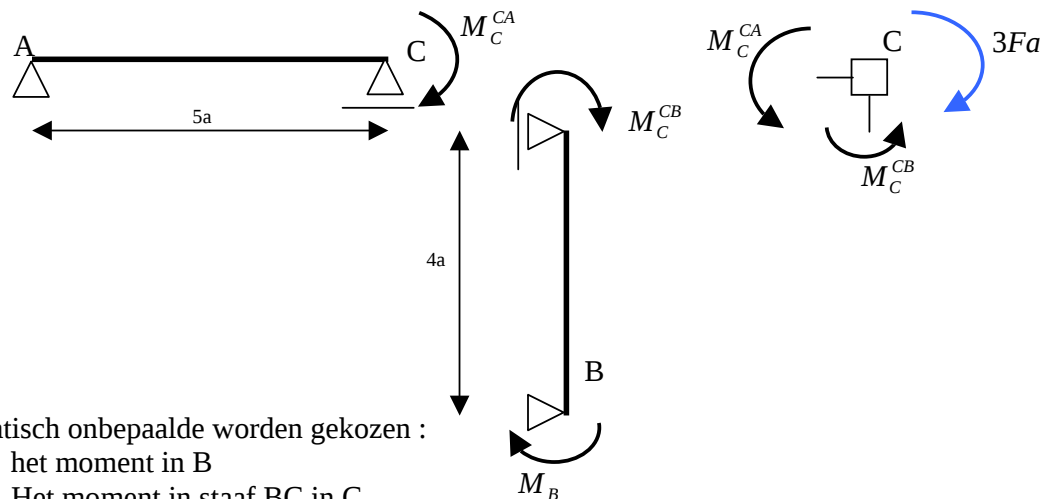
OPGAVE 1 : Krachtenmethode

- a) De vervormde constructie is hieronder getekend.



De *vervormingstekens* van de staafdelen zijn aangegeven. Duidelijk is te zien dat de knopen **niet** verplaatsen.

- b) De constructie is *tweevoudig statisch onbepaald*. Het statisch bepaalde hoofdsysteem is hieronder weergegeven. De kracht F in D wordt vervangen door een koppel $3Fa$ en een kracht F op C . Deze laatste speelt voor de bepaling van de momentenverdeling geen rol (!) en is weggelaten.



Als statisch onbepaalde worden gekozen :

- het moment in B
- Het moment in staaf BC in C

Opmerking : De richting van de momenten wordt gekozen a.h.v. de geschetste vervormingstekens.

Voor het oplossen van de statisch onbepaalden zijn twee vormveranderingsvoorwaarden nodig :

$$\varphi_C^{CA} = \varphi_C^{CB} \quad \varphi_B^{BC} = 0$$

Let op:

Er kunnen slechts twee statisch onbepaalden gekozen worden !
Knoop C moet in evenwicht zijn, van de aangegeven momenten is er hier dus slechts één onbekend !

Uitwerken van de v.v.v. levert :

$$-\frac{M_C^{CA} 5a}{3EI} = -\frac{M_C^{CB} 4a}{3EI} + \frac{M_B 4a}{6EI}$$

$$\frac{M_C^{CB} 4a}{6EI} - \frac{M_B 4a}{3EI} = 0$$

Uit het knoopenevenwicht volgt :

$$M_C^{CA} + M_C^{CB} - 3Fa = 0 \Rightarrow M_C^{CA} = 3Fa - M_C^{CB}$$

Dit invullen in de bovenstaande v.v.v. levert :

$$M_C^{CB} = \frac{30}{16} Fa = 30 \text{ kNm}$$

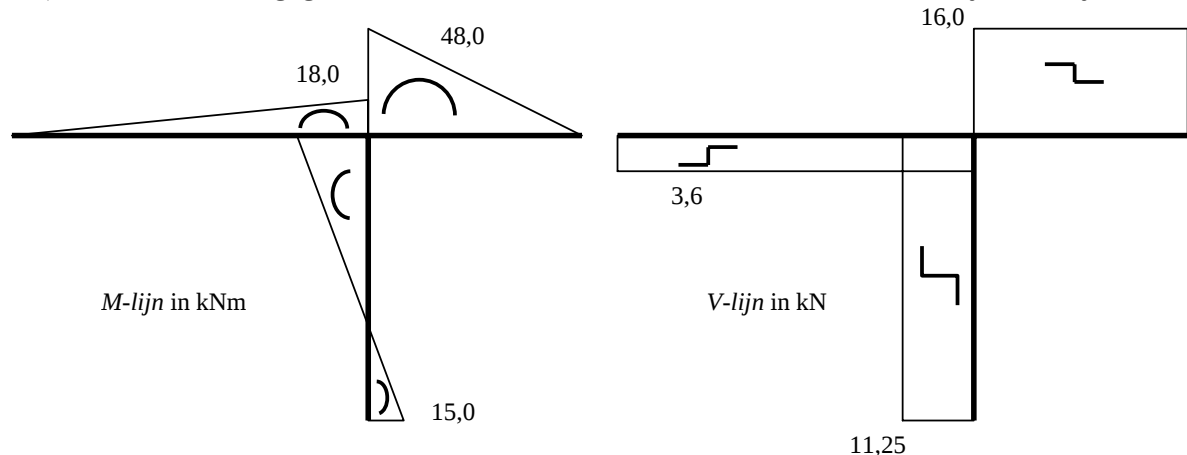
$$M_B = \frac{1}{2} M_C^{CB} = 15 \text{ kNm}$$

Uit het evenwicht van knoop C volgt:

$$M_C^{CA} = 18 \text{ kNm}$$

De gevonden antwoorden zijn allen positief, de aangenomen richting van de momenten was dus juist.

- c) Invullen van de gegevens en verder uitwerken levert de onderstaande M -lijn en V -lijn.



Merk op dat de vervormingstekens overeenkomen met die van vraag a).

- d) De oplegreacties, zoals ze in werkelijkheid werken, zijn hieronder weergegeven:

$$A_H = 11,25 \text{ kN} \leftarrow$$

$$A_V = 3,6 \text{ kN} \downarrow$$

$$B_H = 11,25 \text{ kN} \rightarrow$$

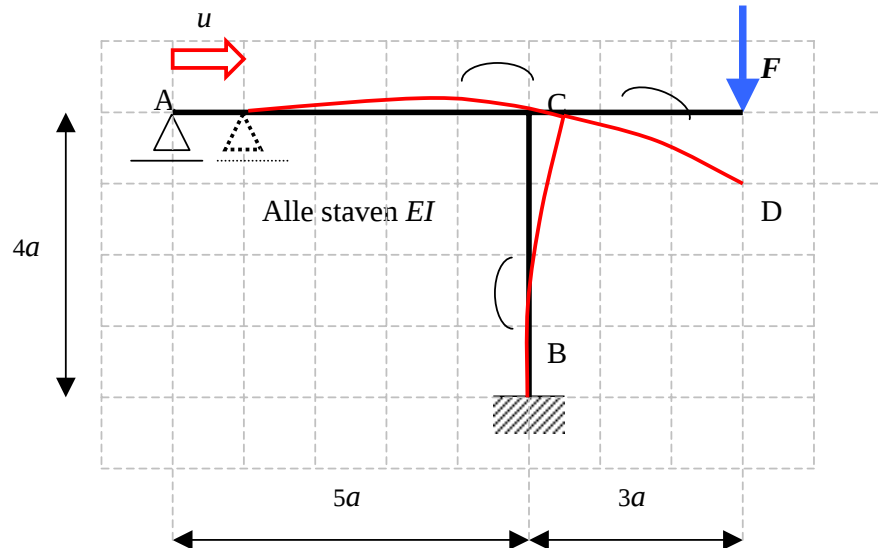
$$B_V = 19,6 \text{ kN} \uparrow$$

$$B_T = 15,0 \text{ kNm} \curvearrowright$$

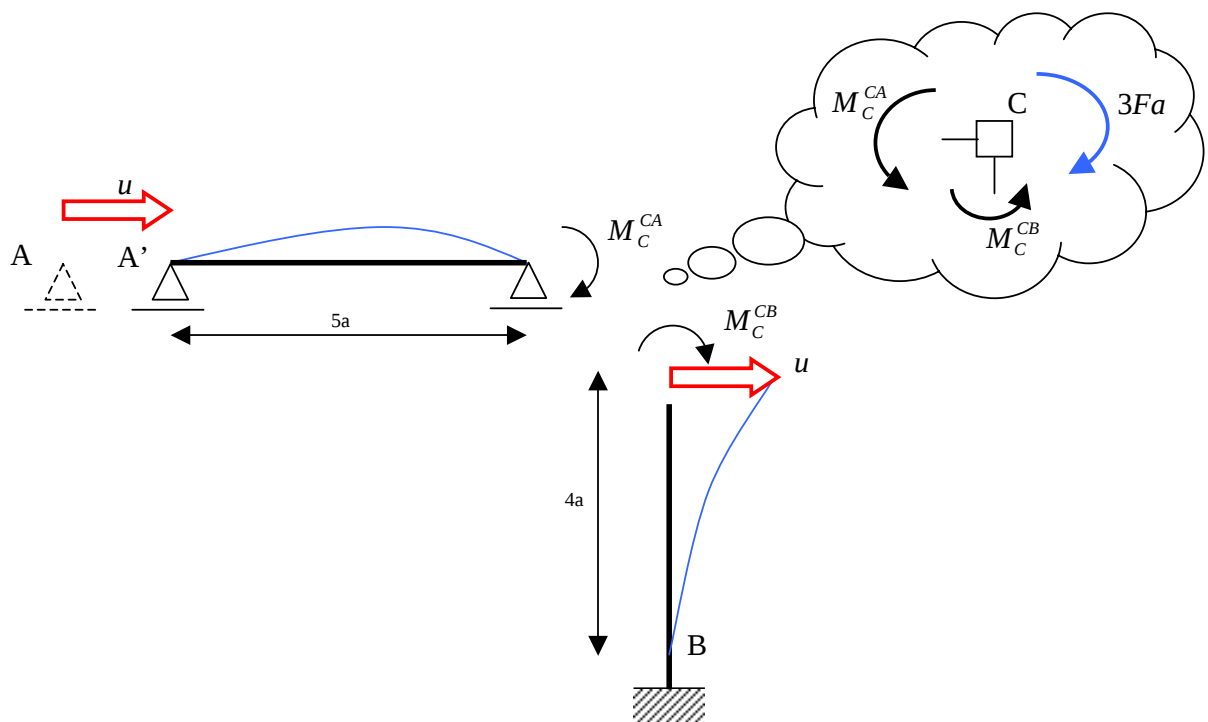
Merk op dat de kracht F in knoop C nu wel meegenomen moet worden bij de bepaling van de verticale oplegreactie in B !

OPGAVE 2 : Krachtenmethode (vervolg)

- a) Door de rol in A kan de constructie naar rechts verplaatsen. We spreken dus nu van een constructie met *verplaatsbare knopen*. De nog onbekende horizontale verplaatsing u is een extra onbekende t.o.v. het probleem in de voorgaande opgave. De vervormde constructie is hieronder weergegeven.



- b) Het statisch bepaalde hoofdsysteem is hieronder weergegeven. Staaf AC kan horizontaal verplaatsen. Deze verplaatsing u moet ook staaf CB in C ondergaan. In knoop C moeten de staafdelen AC en BC ook dezelfde rotatie ondergaan. Immers deze staven zitten momentvast aan elkaar verbonden. Uiteraard geldt ook hier dat knoop C in evenwicht moet zijn. Er is dus in C één moment onbekend.



- c) Met behulp van de *vergeet-mij-nietjes* op het formuleblad kan nu de krachtsverdeling worden bepaald :

$$\varphi_C^{CA} = \varphi_C^{CB}$$

$$\frac{M_C^{CA} 5a}{3EI} = \frac{M_C^{CB} 4a}{EI}$$

Knoopevenwicht van C levert :

$$M_C^{CA} + M_C^{CB} = 3Fa$$

- d) Hieruit volgt :

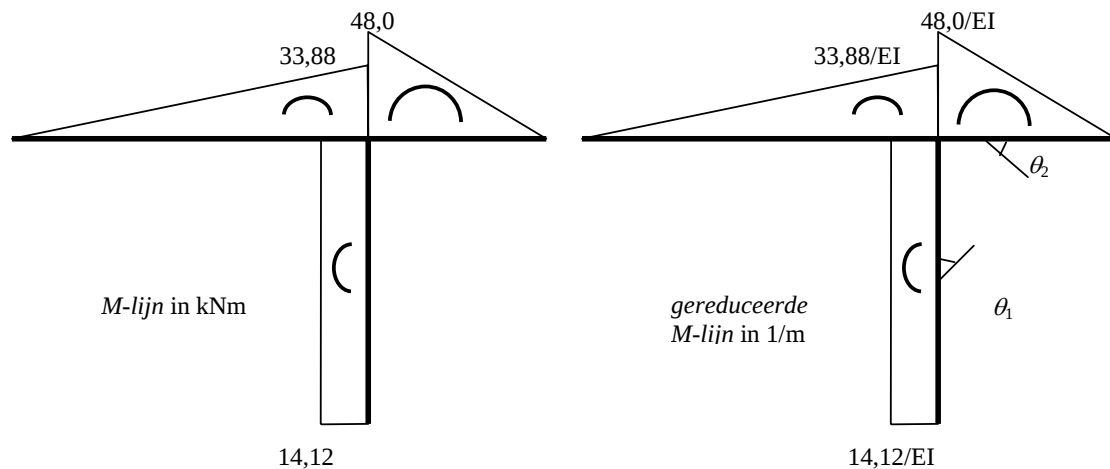
$$M_C^{CB} = \frac{15}{17} Fa \quad \text{kNm}$$

$$M_C^{CA} = \frac{36}{17} Fa \quad \text{kNm}$$

De horizontale verplaatsing in C kan worden bepaald met een *vergeet-mij-nietje* :

$$u_C = \frac{M_C^{CB} (4a)^2}{2EI} = \frac{120Fa^3}{17EI} = 0,113 \quad \text{m}$$

- e) De momentenlijn voor de gehele constructie is hieronder weergegeven :



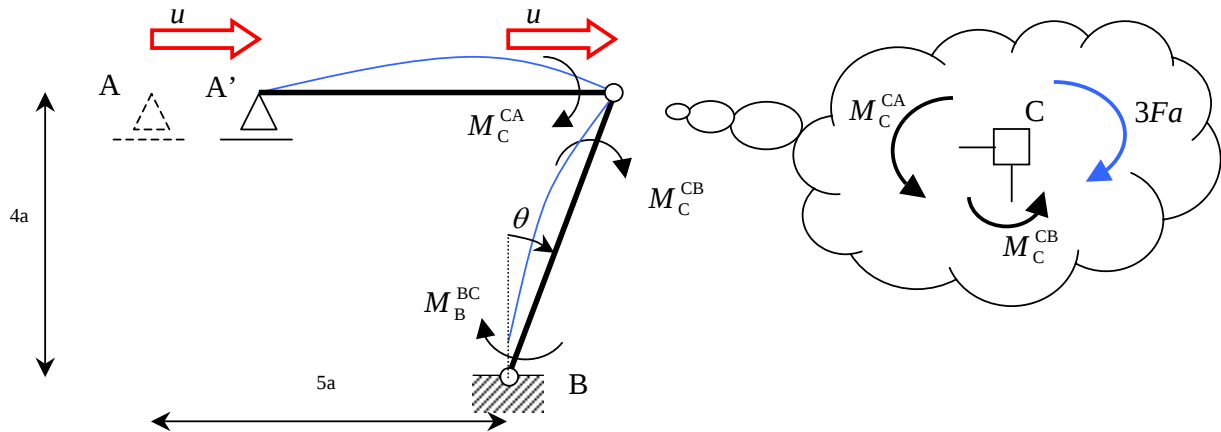
- f) Voor het bepalen van de verplaatsingen van knoop D kan gebruik worden gemaakt van de gereduceerde momentenlijn. Deze is in dit geval gelijkvormig aan de geschetste M-lijn, zie hiervoor ook de stof van het 1^e jaar.

$$u_D = \theta_1 * 2a = \frac{120Fa^3}{17EI} = 0,113 \quad \text{m}$$

$$w_D = \theta_1 * 3a + \theta_2 * 2a = \frac{180Fa^3}{17EI} + \frac{9Fa^3}{EI} = 0,313 \quad \text{m}$$

Deze oplossing kan ook gevonden worden m.b.v. *vergeet-mij-nietjes* maar let er dan wel op dat voor de verticale verplaatsing het *kwispeleffect* niet wordt vergeten !

Een alternatief voor deze berekening is de aanpak met behulp van de *gemengde methode* waarbij door het aanbrengen van scharnieren in de knopen er een mechanisme ontstaat met één vrijheidsgraad θ .



Het systeem heeft 2 onbekende momenten en één onbekende verplaatsing, θ . Om deze drie onbekenden op te lossen zijn er twee hoekveranderingsvergelijkingen nodig en één evenwichtsvergelijking : de virtuele arbeidsvergelijking voor het mechanisme. Let er daarbij op dat de starre rotatie θ van staaf BC in de hoekveranderingsvergelijkingen moet worden verwerkt.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \varphi_C^{AC} &= \varphi_C^{BC} - \frac{M_C^{CA} \times 5a}{3EI} = -\frac{M_C^{CB} \times 4a}{3EI} + \frac{M_B \times 4a}{6EI} - \theta \\
 2) \quad \varphi_B &= 0 \quad \frac{M_C^{CB} \times 4a}{6EI} - \frac{M_B \times 4a}{3EI} - \theta = 0 \\
 3) \quad \delta A &= 0 \quad M_C^{CA} \times 0 + M_C^{CB} \times \delta\theta + M_B \times \delta\theta = 0
 \end{aligned}$$

Uit het knoopenevenwicht volgt :

$$M_C^{CA} + M_C^{CB} - 3Fa = 0 \Rightarrow M_C^{CA} = 3Fa - M_C^{CB}$$

Hiermee kan (1) en (2) worden herschreven tot:

$$\begin{aligned}
 18M_C^{CB} - 4M_B &= 30F - 6EI \times \theta / a \\
 4M_C^{CB} - 8M_B &= +6EI \times \theta / a \\
 \hline
 22M_C^{CB} - 12M_B &= 30Fa
 \end{aligned}$$

Uit (3) volgt:

$$M_C^{CB} = -M_B$$

Hiermee wordt uiteindelijk dezelfde krachtsverdeling en de verplaatsing gevonden :

$$\begin{aligned}
 M_B &= -\frac{30Fa}{24} = -14,12 \text{ kNm} \\
 M_C^{CB} &= 14,12 \text{ kNm} \\
 M_C^{CA} &= 33,88 \text{ kNm} \\
 \theta &= -\frac{12M_B}{6EI} = \frac{12 \times 14,12}{6 \times 1000} = 0,028 \text{ rad} \\
 u &= 4a \times \theta = 0,113 \text{ m}
 \end{aligned}$$

OPGAVE 3 : Verplaatsingenmethode

a) Elementstijfheidsmatrix

Alle staaf-elementen hebben dezelfde lengte van 5,0 m :

$$K^{(e)} = \frac{12,5 \cdot 10^3}{5,0} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Elementkrachtenvector:

Alleen voor de staven (2) en (4) is er een aandeel t.g.v. de elementbelastingen.

De *primaire momenten* t.g.v. deze elementbelastingen kunnen worden bepaald met behulp van de *vergeet-mij-nietjes* van het formuleblad. De staafkrachten per element kunnen worden bepaald met :

$$f^{(e)} = K^{(e)} u^{(e)} + f_{prim}^{(e)}$$

$$\text{staaf 1: } \begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{staaf 2: } \begin{bmatrix} T_2^{(2)} \\ T_3^{(2)} \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 35 \\ -35 \end{bmatrix}$$

$$\text{staaf 3: } \begin{bmatrix} T_2^{(3)} \\ T_4^{(3)} \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{staaf 4: } \begin{bmatrix} T_4^{(4)} \\ T_5^{(4)} \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 \\ -25 \end{bmatrix}$$

b) Assemblage van het stelsel levert :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \\ T_3 \\ 0 \\ T_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -35 \\ 35 \\ -25 \\ -25 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 30 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \\ 0 \\ \varphi_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) De fundamentele onbekenden zijn de rotaties in de knopen 2 en 4. Uiteraard zijn ook de oplegreacties in knoop 1, 3 en 5 nog onbekend, deze kunnen worden bepaald nadat de onbekende rotaties zijn bepaald. Het op te lossen stelsel wordt na reductie :

$$\begin{bmatrix} -35 \\ -25 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

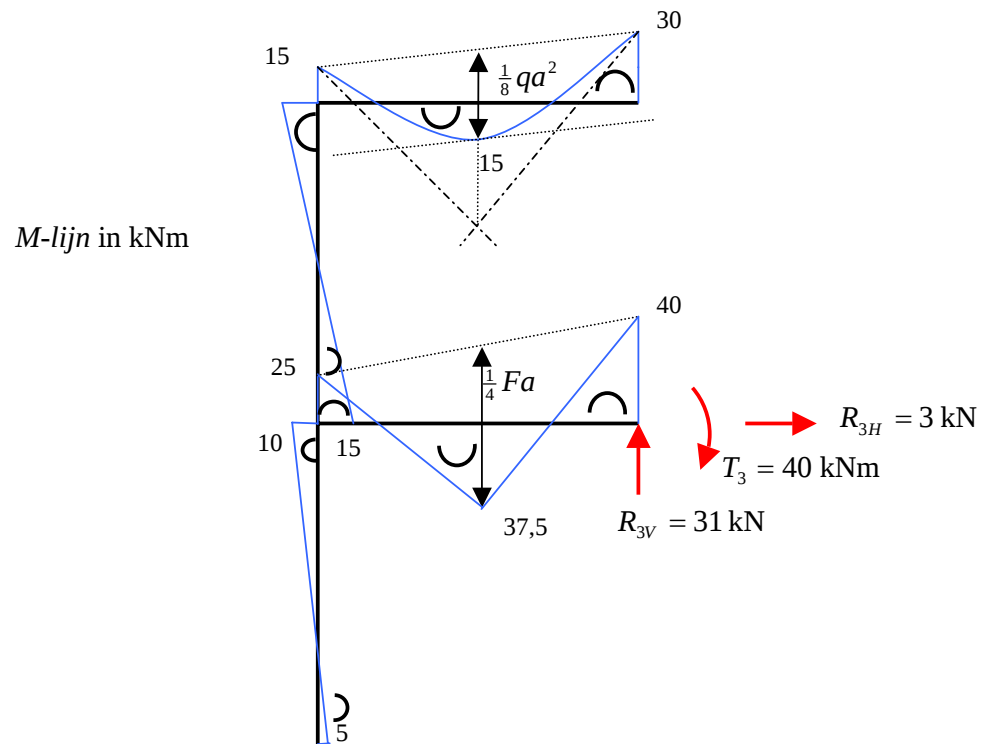
d) Oplossen levert : $\varphi_2 = -10^3$ $\varphi_4 = -10^3$

e) De elementkrachten in kNm zijn hiermee te bepalen :

$$\begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} T_2^{(2)} \\ T_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -40 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} T_2^{(3)} \\ T_4^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -15 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} T_4^{(4)} \\ T_5^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Let op : Vergeet bij deze stap niet de invloed van de elementbelasting, zie hiervoor vraag b).

f) De momentenlijn voor de gehele constructie is hieronder weergegeven.



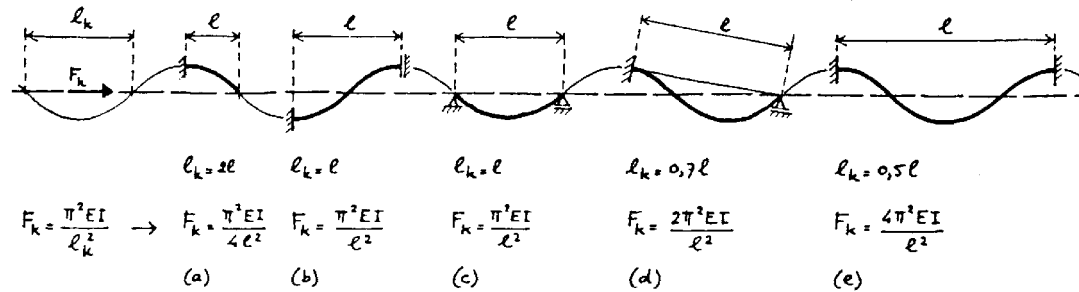
g) De oplegreacties in knoop 3 zijn :

$$\begin{aligned} R_{3H} &= 3 \text{ kN} \\ R_{3V} &= 31 \text{ kN} \\ T_3 &= 40 \text{ kNm} \end{aligned}$$

De richtingen van deze oplegreacties zijn in de bovenstaande figuur weergegeven.

OPGAVE 4 : Stabiliteit van de verend ondersteunde buigzame staaf

- a) Standaard gevallen (a) voor $k=0$ en (d) voor $k=\infty$



- b) Oplossen m.b.v. de D.V. en de r.v.w :

$$\begin{aligned} 1) \quad M(0) &= 0 & 3) \quad w(l) &= 0 \\ 2) \quad S_z(0) &= H = k \cdot w(0) & 4) \quad \varphi(l) &= 0 \end{aligned}$$

Uitwerken (zie formuleblad) levert:

$$\begin{aligned} 1) \quad EI\alpha^2 C_3 &= 0 & 3) \quad C_1 + C_2 l + C_4 \sin \alpha l &= 0 \\ 2) \quad -FC_2 &= kC_1 & 4) \quad C_2 + \alpha C_4 \cos \alpha l &= 0 \end{aligned}$$

Dit levert het homogene stelsel:

$$\begin{pmatrix} l - \frac{F}{k} \\ C_2 + C_4 \alpha \cos \alpha l = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} l - \frac{F}{k} & \sin \alpha l \\ 1 & \alpha \cos \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Een niet-triviale oplossing kan alleen gevonden worden indien de determinant nul is:

$$\left(l - \frac{F}{k} \right) \alpha \cos \alpha l - \sin \alpha l = 0 \Rightarrow \tan \alpha l = \alpha l - \frac{\alpha F}{k} \quad \text{met : } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\tan \alpha l = \alpha l - (\alpha l)^3 \times \frac{EI}{kl^3} \quad \text{stel : } \rho = \frac{kl^3}{EI}$$

$$\tan \alpha l = \alpha l - \frac{(\alpha l)^3}{\rho}$$

- c) De knikkraft kan worden bepaald door voor $\rho = 3,0$ uit de grafiek de αl af te lezen :

$$\rho = \frac{kl^3}{EI} = 3,0 \quad \alpha l \cong 2,2 \Rightarrow (\alpha l)^2 = \frac{F_k l^2}{EI} = 2,2^2 \Rightarrow F_k = 968 \text{ kN}$$

$$l_k = \frac{\pi}{2,2} l = 1,43l = 5,7 \text{ m}$$

- d) De twee gevallen die gecontroleerd kunnen worden zijn :

$$k = \infty \quad \tan \alpha l = \alpha l \Rightarrow \alpha l = 4,49 = \frac{\pi}{0,7} \quad l_k = 0,7l$$

$$k = 0 \quad \tan \alpha l = 0 \Rightarrow \alpha l = \frac{1}{2}\pi \quad l_k = 2l$$

OPGAVE 5 : Bezwijken door instabiliteit

- a) De algemene evenwichtsvergelijking wordt gevonden uit de e.v. in de verplaatste stand voor de linker en de rechter (vrijgemaakte) stijl:

$$\text{deel 1: } F \cdot u + H \cdot a - M_A - S \cdot a = 0 \quad \text{deel 2: } 2Fu - M_C + S \cdot a = 0$$

$$\text{Hieruit volgt met: } M_A = M_C = M = \frac{6EI}{a} \theta = \frac{6EI}{a^2} u$$

Voor de *elastische fase* :

$$3F \cdot u + H \cdot a - \frac{12EI}{a^2} u = 0$$

Voor de *plastische fase* :

$$(1) \quad 3F \cdot u + H \cdot a - 2M_p = 0 \quad (2)$$

- b) Voor $H=0$ wordt de kniklast gevonden : $F_k = \frac{4EI}{a^2} = 1000 \text{ kN}$

- c) De eerste orde verplaatsing van punt B wordt gevonden met (1) voor $F=0$:

$$u_1 = \frac{15 \times 27}{12 \times 2250} = 0,015 \text{ m}$$

- d) De eerste orde bezwijkbelasting wordt gevonden met (2) voor $F=0$:

$$H_p = \frac{2M_p}{a} = 42 \text{ kN} \quad \text{en} \quad u_p = \frac{M_p a^2}{6EI} = 0,042 \text{ m}$$

- e) De tweede orde verplaatsing voor $F=200 \text{ kN}$ en $H=15 \text{ kN}$:

$$u_2 = \frac{H \cdot a}{\frac{12EI}{a^2} - 3F} = \frac{15 \times 3}{\frac{12 \times 2250}{9} - 3 \times 200} = 0,01875 \text{ m}$$

$$\text{controle : } u_2 = \frac{n}{n-1} u_1 = \frac{5}{4} \times 15 = 18,75 \text{ mm, klopt !}$$

- f) De kritieke belasting waar voor $H=15 \text{ kN}$ bezwijken door instabiliteit optreedt :

$$F_c = \frac{2 \times 63 - 15 \times 3}{3 \times 0,042} = 642,857 \text{ kN}$$

$$\text{controle : } \frac{H}{H_p} + \frac{F_c}{F_k} = 1 \Rightarrow \frac{15}{42} + \frac{642,857}{1000} = 0,357 + 0,643 = 1,0, \text{ klopt !}$$

- g) Zie onderstaande figuur

