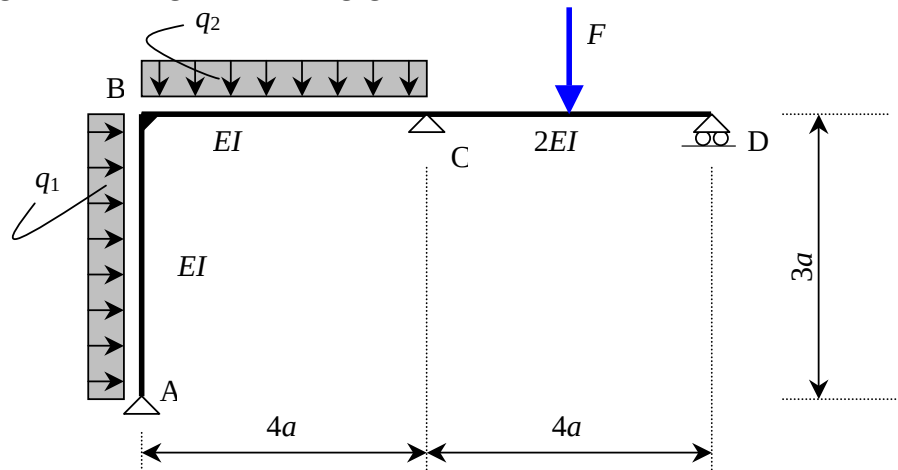


Elementbelastingen

Tot nu toe is er alleen gebruik gemaakt van belastingen in de richting van de vrijheidsgraden. Deze vrijheidsgraden zitten in de knopen. Voor een op buiging belast element met niet verplaatsbare knopen zijn *elementbelastingen* echter veel voorkomende belastingen. We spreken van elementbelastingen indien de belasting op een element aangrijpt. Voor de eenvoud beperken we deze belastingen alleen tot puntlasten en gelijkmatig verdeelde belastingen zoals in figuur 1 is weergegeven.

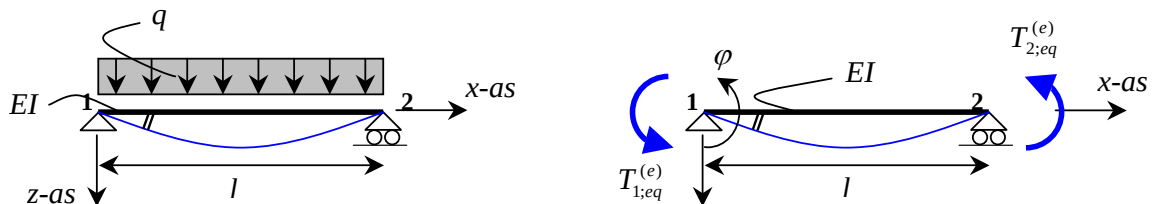


Figuur 1 : Belastingen op elementen

Om met elementbelastingen om te kunnen gaan moeten we de elementbelastingen “vertalen” naar knoopladingen die de elementbelasting vervangen. Deze knoopladingen moeten zodanig zijn dat precies hetzelfde resultaat¹ wordt verkregen als met de elementbelasting. In het vervolg zullen deze knoopladingen worden aangeduid als equivalente knooplading. De equivalente knooplading wordt net als een gewone knooplading in de assemblage-stap verwerkt in de systeemkrachtenvector.

Equivalente belasting

Het bepalen van de equivalente belasting voor een elementbelasting zal worden verduidelijkt aan de hand van een eenvoudig model dat in figuur 2 is weergegeven



Figuur 2 : Bepalen van de equivalente belasting

Dit model wordt met 1 staaf en 2 knopen beschreven. De elementbelasting moet vertaald worden naar equivalente knoopladingen die zodanig van grootte en richting zijn dat de ligger dezelfde verplaatsingen ondergaat. Voor de richting van de knoopladingen wordt vooralsnog de positieve afspraak aangehouden. De verplaatsingen zijn in dit model de hoekverdraaiingen in 1 en 2. Dit zijn immers de vrijheidsgraden waarmee de vervorming van het element wordt beschreven.

¹ In feite moeten de knoopladingen dezelfde arbeid verrichten als de elementbelasting.

Met behulp van de *vergeet-mij-nietjes* is de equivalente knoopbelasting te bepalen. Voor de hoekverdraaiing in 1 en 2 t.g.v. de elementbelasting geldt :

$$\varphi_1 = -\frac{ql^3}{24EI}; \quad \varphi_2 = \frac{ql^3}{24EI}$$

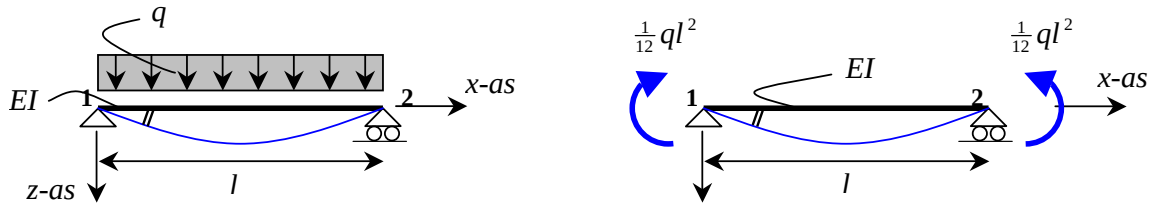
Dezelfde hoekverdraaiing moet ook optreden t.g.v. de equivalente knoopbelasting. Gebruik makend van de *vergeet-mij-nietjes* wordt hiervoor gevonden:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{T_{1;eq}^{(e)}l}{3EI} - \frac{T_{2;eq}^{(e)}l}{6EI} = -\frac{ql^3}{24EI} \Rightarrow 2T_{1;eq}^{(e)} - T_{2;eq}^{(e)} = -\frac{1}{4}ql^2 \\ \varphi_2 &= \frac{-T_{1;eq}^{(e)}l}{6EI} + \frac{T_{2;eq}^{(e)}l}{3EI} = \frac{ql^3}{24EI} \Rightarrow -T_{1;eq}^{(e)} + 2T_{2;eq}^{(e)} = \frac{1}{4}ql^2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} T_{1;eq}^{(e)} &= -\frac{1}{12}ql^2 \\ T_{2;eq}^{(e)} &= \frac{1}{12}ql^2 \end{aligned}$$

Dat de koppels even groot zijn was op basis van symmetrie te verwachten. Ook de richtingen waarin de equivalente knooplasten moeten werken zijn zoals we dat mogen verwachten. De werkelijke equivalente belasting is in figuur 3 weergegeven.



Figuur 3 : Equivalente knooplast

Bij het assembleren van het stelsel vergelijkingen is de bijdrage aan de systeem krachtenvector van een element t.g.v. een gelijkmatig verdeelde belasting :

$$\{f\}_{eq}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12}ql^2 \\ \frac{1}{12}ql^2 \end{bmatrix}$$

Deze belasting wordt op identieke wijze als de uitwendig aangrijpende knoopbelastingen f (bekende knooplasten en onbekende oplegreacties) geassembleerd. Formeel levert dit:

$$\begin{aligned} \sum_e [K^{(e)}] \{u\}^{(e)} &= \sum_e \{f\}^{(e)} + \sum_e \{f\}_{eq}^{(e)} = \{f\}_{\text{systeem}} \\ \{f\}_{\text{systeem}} &= \{f\} + \sum_e \{f\}_{eq}^{(e)} \end{aligned}$$

Voor dit voorbeeld houdt dit in dat het onderstaande stelsel moet worden opgelost:

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12}ql^2 \\ \frac{1}{12}ql^2 \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt:

$$\varphi_1 = -\frac{ql^3}{24EI}; \quad \varphi_2 = \frac{ql^3}{24EI}$$

Dit is uiteraard de inmiddels bekende oplossing die ook uit de vergeet-mij-nietjes volgt en is als zodanig een triviaal voorbeeld.

Staafrachten

Om de krachtsverdeling in de elementen te kunnen bepalen is tot nu toe gebruik gemaakt van de methode om de element stijfheidsmatrix te vermenigvuldigen met de gevonden verplaatsingen van de vrijheidsgraden van het element.

De koppels op de staaftuiteinden worden hiermee:

$$\begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}^{(e)} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

Uitwerken van deze relatie levert:

$$T_1^{(e)} = \frac{EI}{l} \left(4 \times -\frac{ql^3}{24EI} + 2 \times \frac{ql^3}{24EI} \right) = -\frac{1}{12}ql^2$$

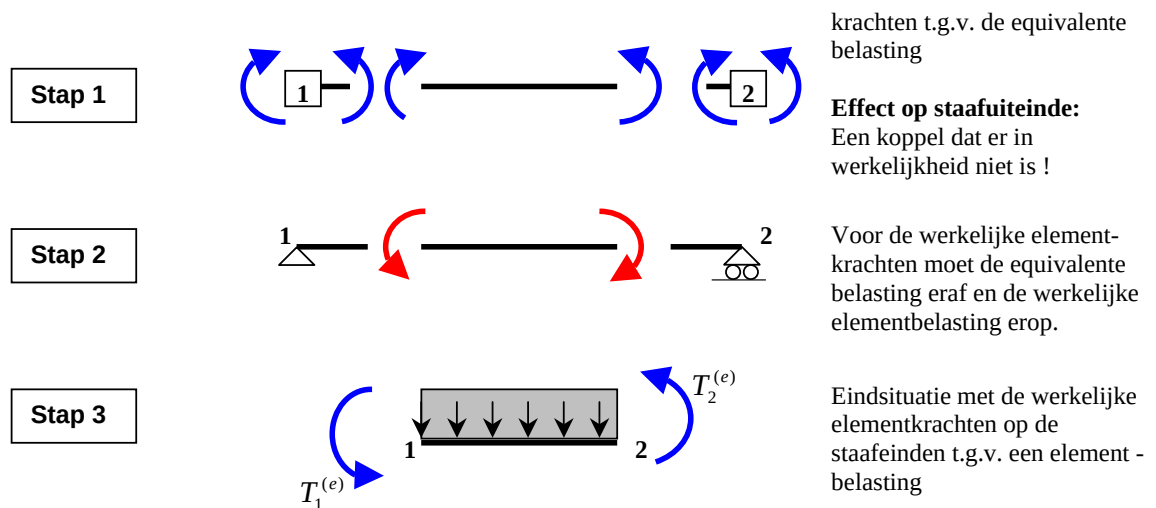
$$T_2^{(e)} = \frac{EI}{l} \left(2 \times -\frac{ql^3}{24EI} + 4 \times \frac{ql^3}{24EI} \right) = \frac{1}{12}ql^2$$

Dit antwoord houdt in dat het element belast met een gelijkmatig verdeelde belasting aan de uiteinden een moment heeft ongelijk aan nul ! Dit is uiteraard onjuist. De equivalente koppels zijn alleen aangebracht om dezelfde verplaatsingen van de constructie te vinden als met de elementbelastingen. Op elementniveau moet t.g.v. de equivalente belasting dus een correctie worden uitgevoerd voor het vinden van de juiste staafrachten:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^{(e)} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ql^2 \\ -\frac{1}{12}ql^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De verklaring hiervoor is hieronder grafisch weergegeven.

Per element zijn op de knopen de equivalente knooppelastingen geplaatst die natuurlijk voor de daarbij behorende momenten in het element zorgen zoals in stap 1 van figuur 4 is weergegeven. In de werkelijke situatie is de equivalente belasting niet aanwezig maar de elementbelasting. Voor het bepalen van de juiste krachtsverdeling in het element moet dus de equivalente belasting op de staafeinden worden weggenomen (stap 2) en de werkelijke belasting worden aangebracht ten gevolge van de elementbelasting (stap 3). Zie figuur 4.

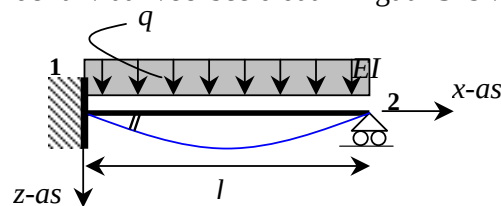


Figuur 4 : Bepaling van de staafkrachten bij elementbelasting

De werkelijke krachtsverdeling is dus de gevonden krachtsverdeling t.g.v. de equivalente belasting minus de equivalente knooppelasting. Formeel geschreven levert dit:

$$\{f\}^{(e)} = [K]^{(e)} \{u\}^{(e)} - \{f\}_{eq}^{(e)}$$

Met de gevonden krachten op de staafeinden en de elementbelasting kan vervolgens de krachtsverdeling over het element worden bepaald. De gang van zaken passen we toe op een iets minder triviaal voorbeeld dat in figuur 5 is weergegeven.



Figuur 5 : Belastingen op elementen

Deze constructie laat zich modelleren met 1 element waarbij de vrijheidsgraden weer de hoekverdraaiingen in knoop 1 en 2 zijn. Er zijn geen knooplaster, er is wel een elementbelasting die wordt vervangen door equivalente knooplaster.

Het stelsel dat moet worden opgelost is :

$$[K]_{\text{sys}} \{\varphi\} = \{f\} + \sum_e \{f\}_{eq}^{(e)}$$

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} ql^2 \\ \frac{1}{12} ql^2 \end{bmatrix}$$

De inklemming ter plaatse van knoop 1 heeft tot gevolg dat de hoekverdraaiing in knoop 1 de voorgeschreven waarde nul heeft.

Het stelsel kan nu worden gereduceerd tot :

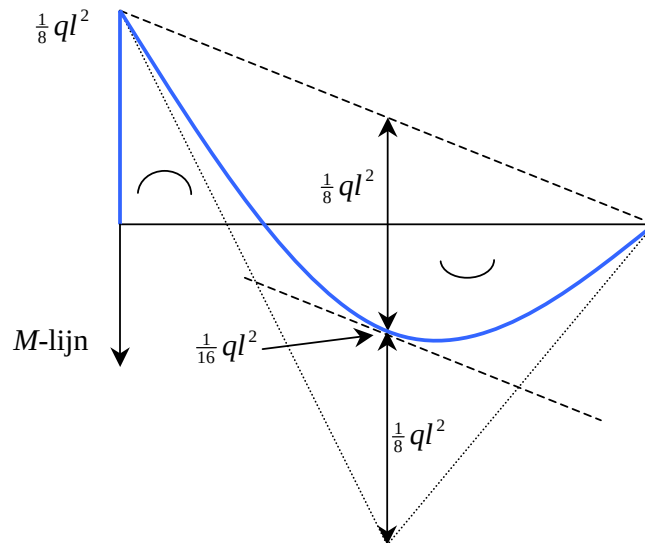
$$\frac{4EI}{l} \varphi_2 = \frac{1}{12} ql^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{ql^3}{48EI}$$

De krachtsverdeling in het element kan nu gevonden worden met:

$$\{f\}^{(e)} = [K]^{(e)} \{u\}^{(e)} - \{f\}_{eq}^{(e)}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^{(e)} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ql^3}{48EI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{12} ql^2 \\ -\frac{1}{12} ql^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} ql^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ga zelf na dat deze staafkrachten kunnen worden vertaald naar de onderstaande momentenlijn.



Figuur 6 : Momentenlijn

Hiermee is laten zien dat de gevolgde procedure onafhankelijk is van de randvoorwaarden van het probleem en dus de wijze waarop het element in de constructie zit.

Samenvatting

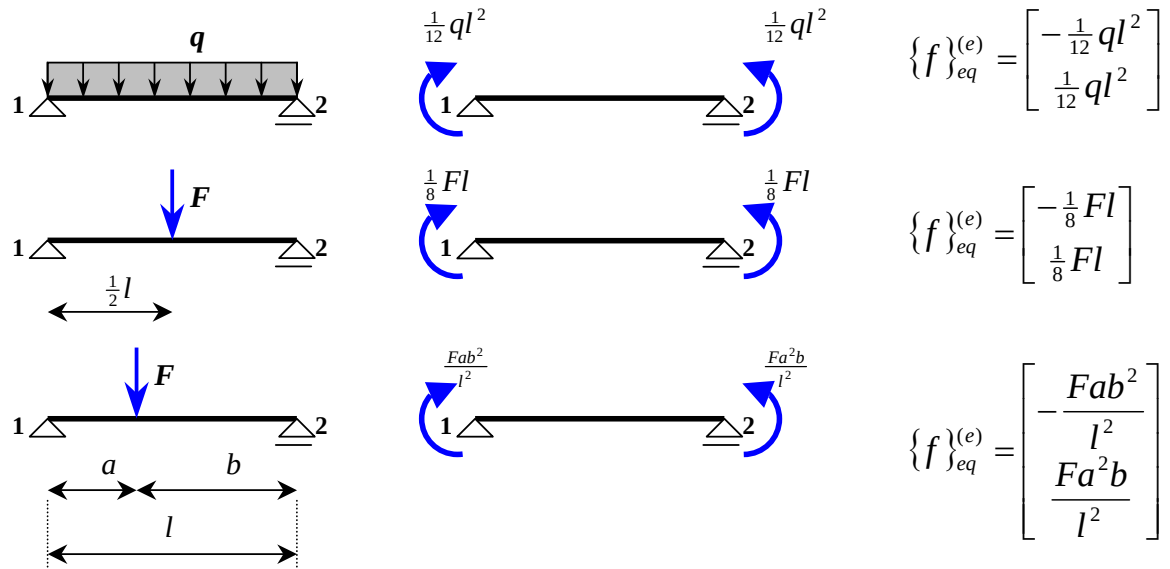
De strategie voor het verwerken van elementbelastingen is hiermee uiteengezet. Bij het bepalen van de systeemkrachtenvector wordt een equivalente belasting op het systeem gezet en geldt:

$$\{f\}_{\text{systeem}} = \{f\} + \sum_e \{f\}_{eq}^{(e)}$$

Bij het bepalen van de krachtsverdeling in het element wordt, gebruikmakend van de inmiddels bekende verplaatsingen, voor de koppels op de staafuiteinden gevonden:

$$\{f\}^{(e)} = [K]^{(e)} \{u\}^{(e)} - \{f\}_{eq}^{(e)}$$

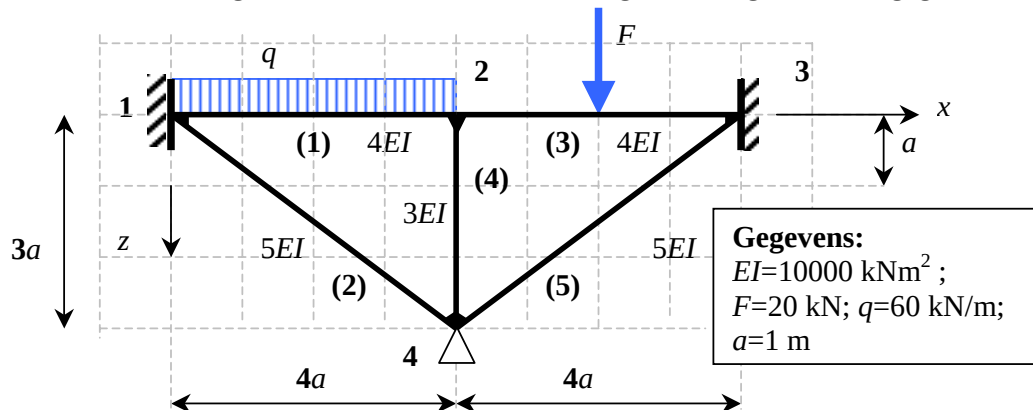
Voor verschillende elementbelastingen zijn hieronder de equivalente knooplasteren gegeven.



Figuur 7 : Equivalente belasting voor basis-elementbelastingen

Toepassing

De procedure zal worden toegelicht aan de hand van een voorbeeld met meerdere staven en verschillende belastingen. De constructie met belastingen is in figuur 8 weergegeven.



Figuur 8 : Toepassing

Van deze constructie wordt de krachtsverdeling gevraagd. Voor de uitwerking is het noodzakelijk om eerst per element te bepalen wat de elementstijfheidsmatrix is en indien op het element een elementbelasting werkt hoe groot de equivalente knooplading moet zijn die de elementbelasting kan vervangen. De vervorming van de constructie wordt beschreven met de hoekverdraaiingen in de knopen. Deze vrijheidsgraden zijn:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

De elementstijfheidsmatrices zijn i.v.m. de gegeven buigstijfheden en elementlengten voor alle elementen gelijk:

$$K^{(1)} = K^{(2)} = K^{(3)} = K^{(4)} = K^{(5)} = \frac{EI}{a} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

Op element (1) en (3) is een elementbelasting werkzaam. Deze belasting moet dus vertaald worden naar equivalente knoopladingen. Gebruikmakend van het overzicht van figuur 7 volgt voor deze elementen:

$$f_{eq}^{(1)} = \begin{bmatrix} T_{1;eq}^{(1)} \\ T_{2;eq}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} qa^2 \\ \frac{1}{12} qa^2 \end{bmatrix} \text{ kNm}; \quad f_{eq}^{(3)} = \begin{bmatrix} T_{2;eq}^{(3)} \\ T_{3;eq}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} Fa \\ \frac{1}{8} Fa \end{bmatrix} \text{ kNm};$$

De uitwendige belasting f op de knopen, inclusief de onbekende oplegreacties is:

$$\{f\} = \begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \\ T_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ga zelf na dat het assembleren van de elementstijfheidsmatrices de volgende systeemstijfheidsmatrix oplevert:

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 12 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 12 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

De systeemkrachtenvector kan worden gevonden met:

$$\{f\}_{\text{systeem}} = \{f\} + \sum_e \{f\}_{eq}^{(e)}$$

Uitwerken levert:

$$\{f\}_{\text{systeem}} = \begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \\ T_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{12}qa^2 \\ \frac{1}{12}qa^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}Fa \\ \frac{1}{8}Fa \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 - 80 \\ 70 \\ T_3 + 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hierin zijn T_1 en T_3 de nog onbekende oplegreacties in knoop 1 en 3. Het op te lossen stelsel is:

$$10^4 \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 12 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 = 0 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 - 80 \\ 0 + 80 - 10 \\ T_3 + 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Het verwerken van de randvoorwaarden levert na het wegstrepen van 1^e en 4^e rij en kolom een gereduceerd 2x2 stelsel op:

$$10^4 \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oplossen van de onbekende verplaatsingen levert:

$$\varphi_2 = 6,0 \cdot 10^{-4}; \quad \varphi_4 = -1,0 \cdot 10^{-4};$$

De inklemmingsmomenten (oplegreacties) kunnen worden bepaald door de nu bekende verplaatsingen in te vullen in de 4 systeemvergelijkingen:

$$10^4 \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 12 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 6,0 \times 10^{-4} \\ 0 \\ -1,0 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 - 80 \\ 70 \\ T_3 + 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dit levert: $T_1 = 90 \text{ kNm}; \quad T_3 = 0 \text{ kNm}$

Hiermee is het eerste deel van het probleem opgelost. De verplaatsingen en de oplegreacties zijn bepaald. De volgende stap is om met de bekende verplaatsingen de elementkrachten te bepalen waarmee de momentenlijn kan worden getekend. De elementkrachten kunnen worden bepaald met:

$$\{f\}^{(e)} = [K]^{(e)} \{u\}^{(e)} - \{f\}_{eq}^{(e)}$$

Voor elementen zonder elementbelasting geldt uiteraard:

$$\{f\}^{(e)} = [K]^{(e)} \{u\}^{(e)}$$

Uitwerken levert voor de vijf elementen:

$$\begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 6,0 * 10^{-4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} qa^2 \\ \frac{1}{12} qa^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92 \\ -56 \end{bmatrix};$$

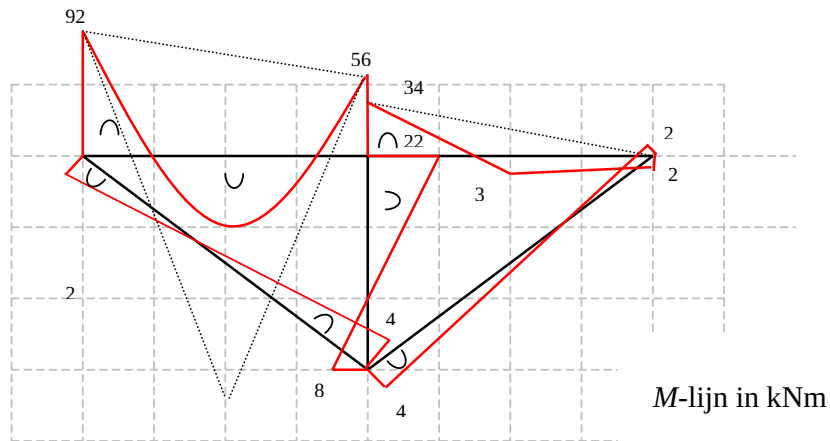
$$\begin{bmatrix} T_1^{(2)} \\ T_4^{(2)} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1,0 * 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} T_2^{(3)} \\ T_3^{(3)} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6,0 * 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} Fa \\ \frac{1}{8} Fa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} T_2^{(4)} \\ T_4^{(4)} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6,0 * 10^{-4} \\ -1,0 * 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 8 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} T_3^{(5)} \\ T_4^{(5)} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1,0 * 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix};$$

Hiermee is de momentenlijn van de gehele constructie te tekenen. Let daarbij op het verloop t.p.v. de elementen met elementbelasting.



Figuur 9 : Momentenlijn