

COLLEGE 1/2 : INLEIDING + ELEMENTEN

Opzet van de EEM : Powerpoint presentatie

Voorbeelden : vb 1 en 2 van de website (<http://go.to/jw-welleman> of via BlackBoard)

Elementen : Sheets college 1 (boek Hartsuijker deel 3, blz 218-220)

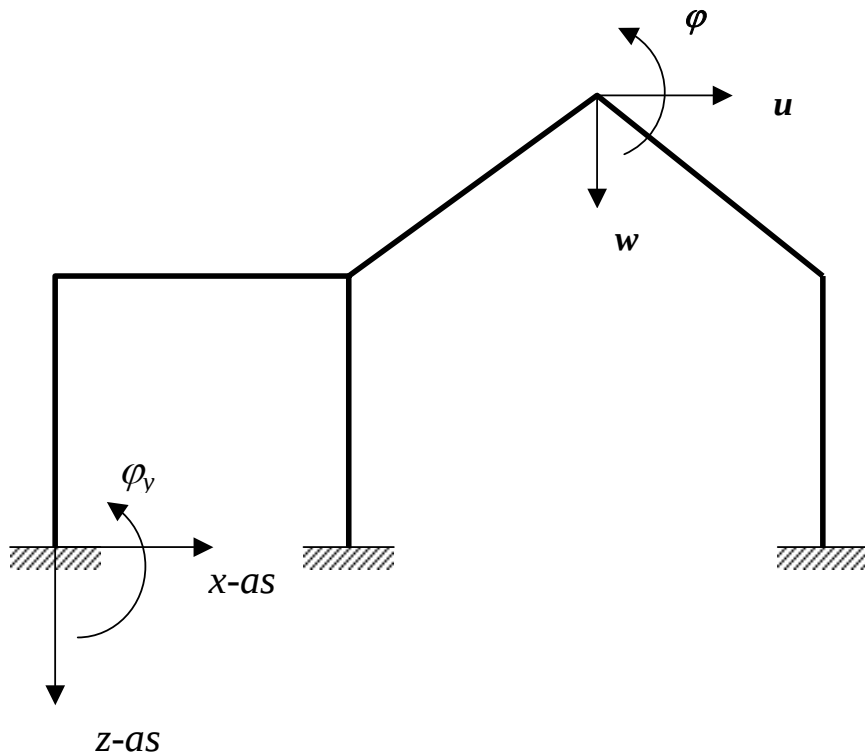
COLLEGE 3 : ELEMENTBELASTINGEN

Boek blz 248

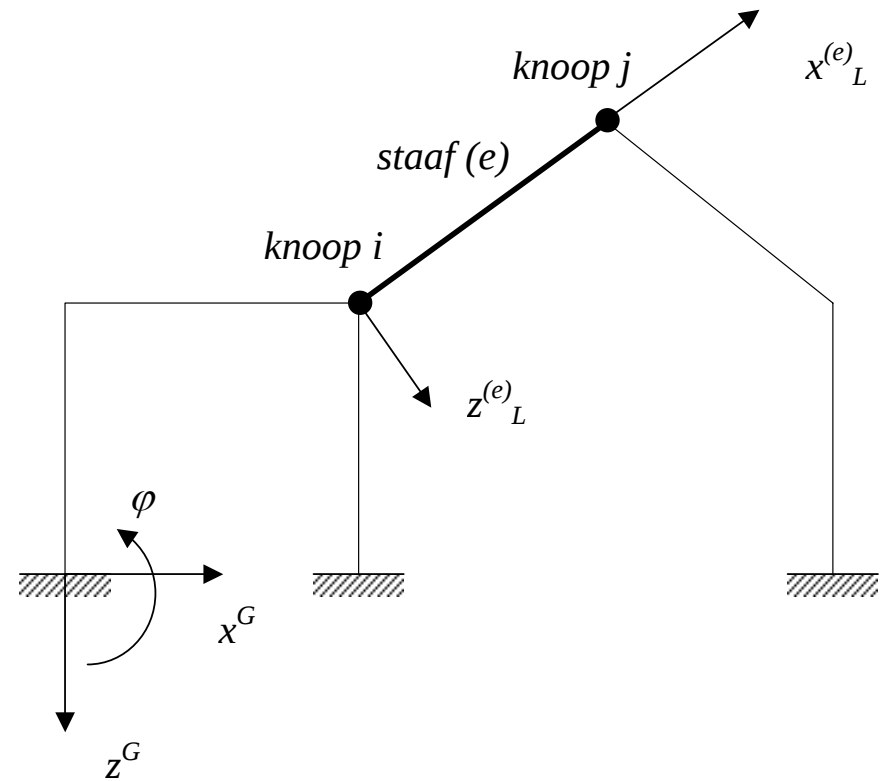
Sheets

COLLEGE 4 : WILLEKEURIGE STRUCTUREN (VAKWERKEN EN BUIGING MET VERPLAATSBARE KNOPEN)

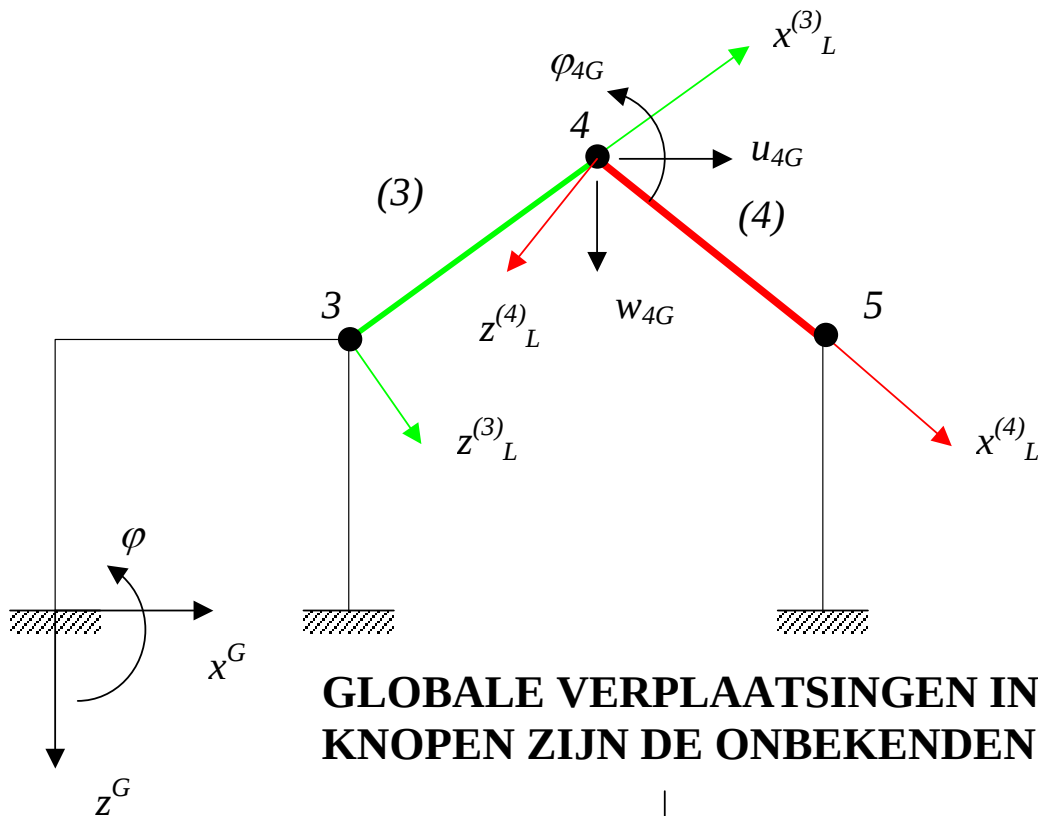
Sheets



**GLBAAL ASSENSTELSEL
(CONSTRUCTIE-NIVEAU)**

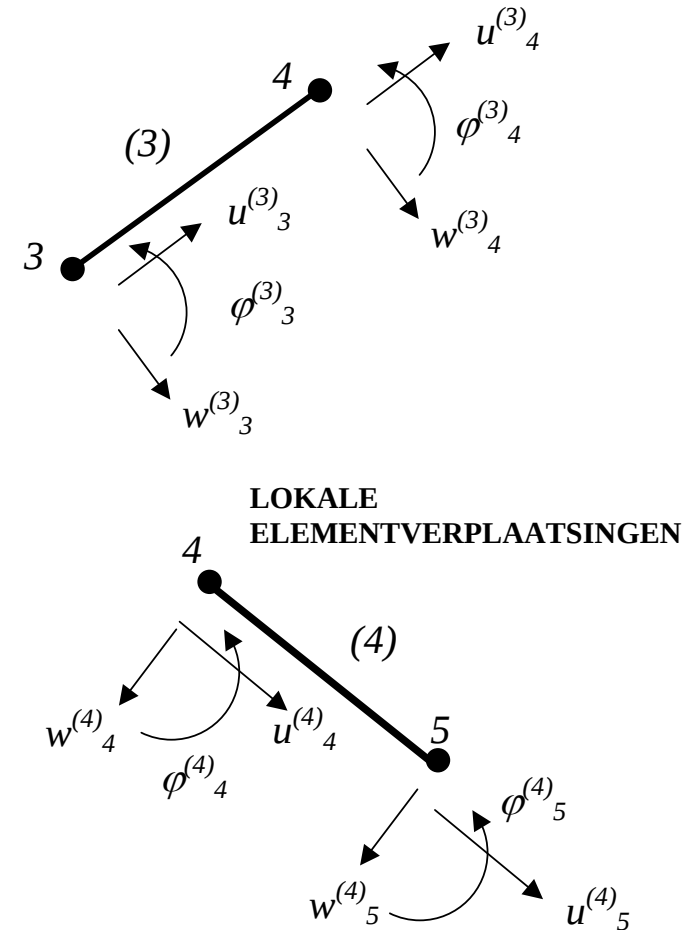


**LOKAAL ASSENSTELSEL
(ELEMENT-NIVEAU)**

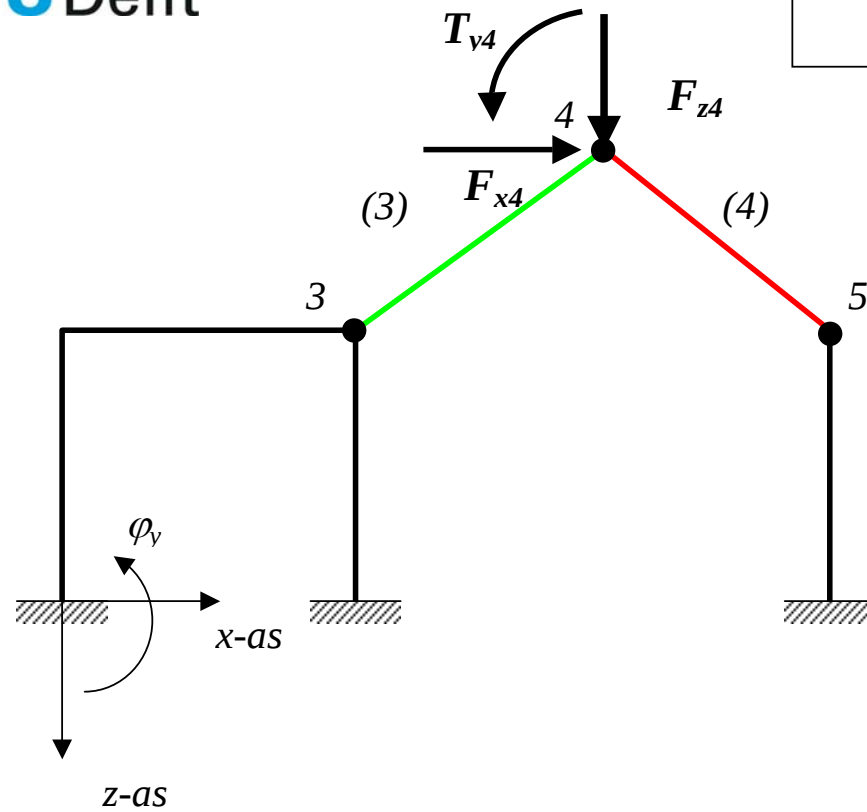


**GLOBALE VERPLAATSINGEN IN DE
KNOPEN ZIJN DE ONBEKENDEN**

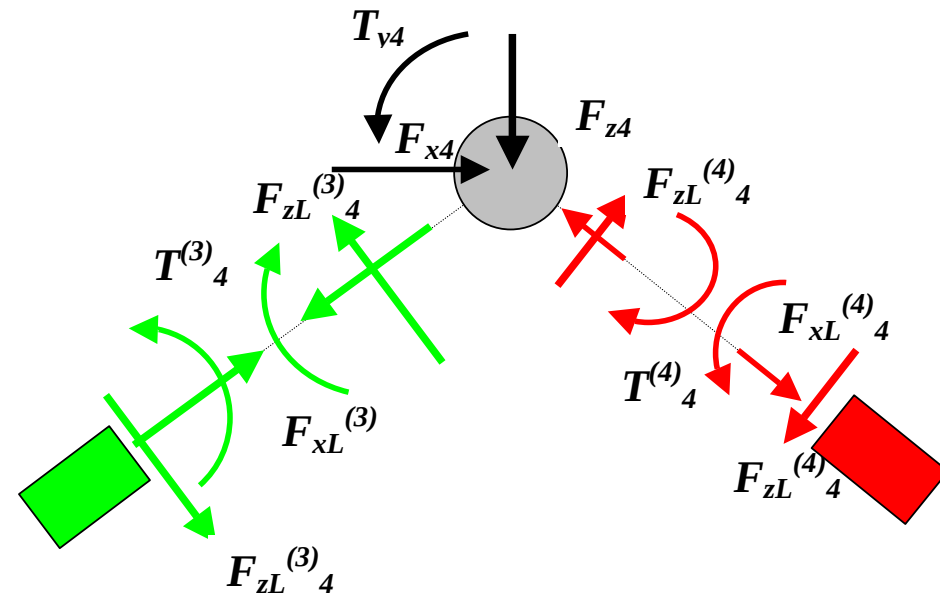
**VRIJHEIDSGRADEN VAN HET
(CONSTRUCTIE)SYSTEEM**



**LOKALE
ELEMENTVERPLAATSINGEN**



BELASTINGEN evenwicht



**BELASTING IN DE KNOPEN EN ALEEN IN DE
RICHTING VAN DE VRIJHEIDSGRADEN**

- Verplaatsingen in de knopen (vrijheidsgraden)

*Systeem –verplaatsingen*vector $\{ u \}$

GLOBALE ASSENSTELSEL

$$\left\{ \begin{array}{c} \dots \\ u_4 \\ w_4 \\ \varphi_4 \\ \dots \end{array} \right\}$$

- Uitwendige krachten op de knopen (belastingen)

*Systeem-krachten*vector $\{ f \}$

GLOBALE ASSENSTELSEL

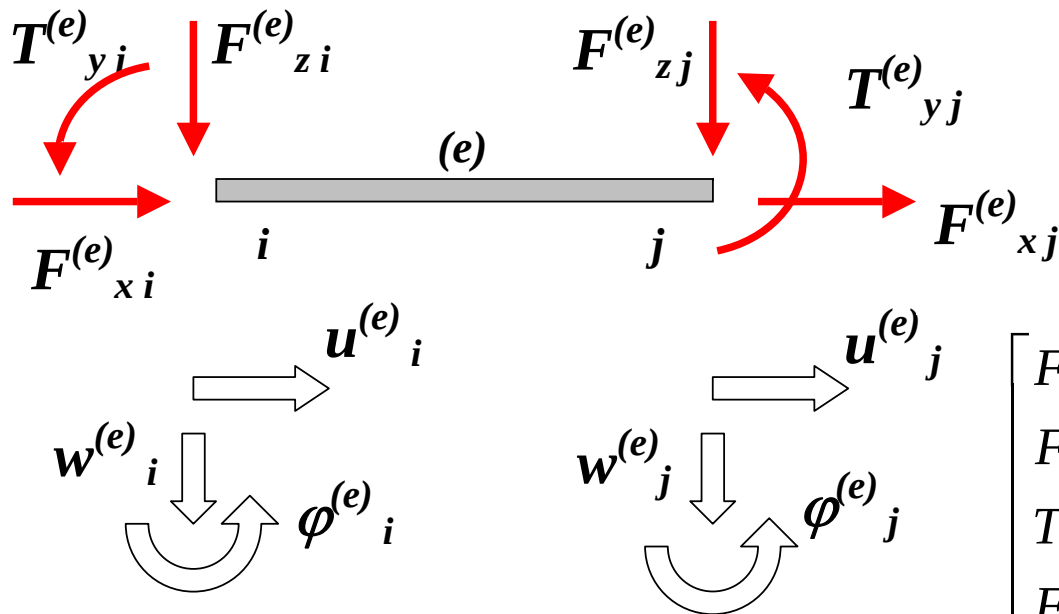
$$\left\{ \begin{array}{c} \dots \\ F_{x_4} \\ F_{z_4} \\ T_{y_4} \\ \dots \end{array} \right\}$$

STELSEL OPGESTELD IN HET GLOBALE ASSENSTELSEL

$$\{f\} = K \{u\}$$

SYSTEEM STIJFHEIDSMATRIX

“OPTELSOM VAN ELEMENTGEDRAG”



GEDRAG BESCHRIJVEN IN
HET **LOKALE**
(ELEMENT)ASSENSTELSEL

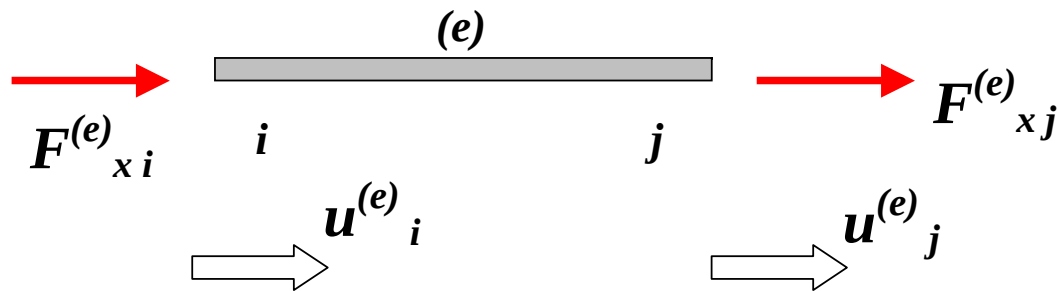
VERPLAATSINGEN
VAN DE STAAFEINDEN

ELEMENT
STIJFHEIDSMATRIX

$$\begin{bmatrix} F_{xi}^{(e)} \\ F_{zi}^{(e)} \\ T_{yi}^{(e)} \\ F_{xj}^{(e)} \\ F_{zj}^{(e)} \\ T_{yj}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

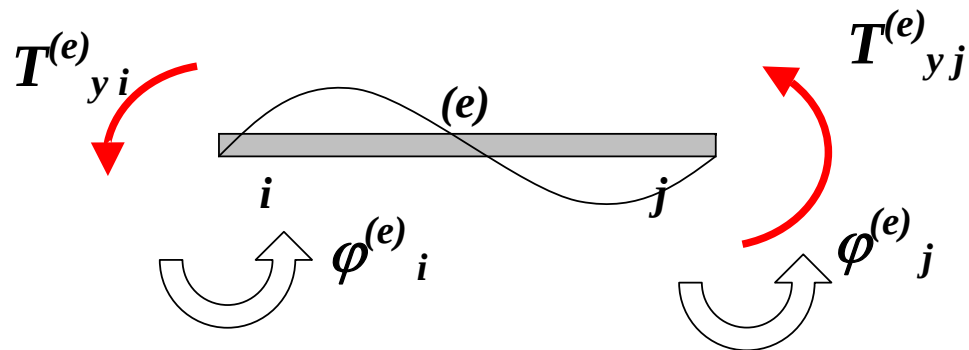
KRACHTEN OP DE STAAFEINDEN

extensie



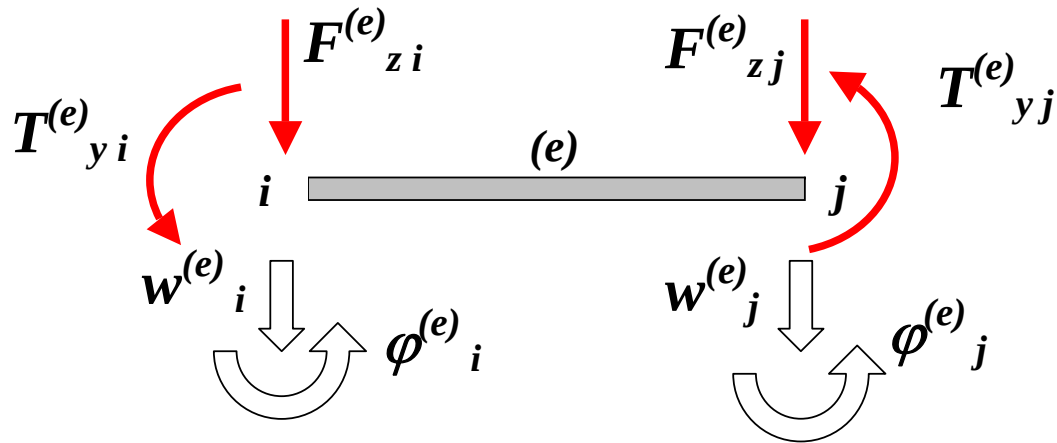
$$\begin{Bmatrix} F_{xi}^{(e)} \\ F_{xj}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ u_j^{(e)} \end{Bmatrix}$$

buiging (niet-verplaatsbare knopen)



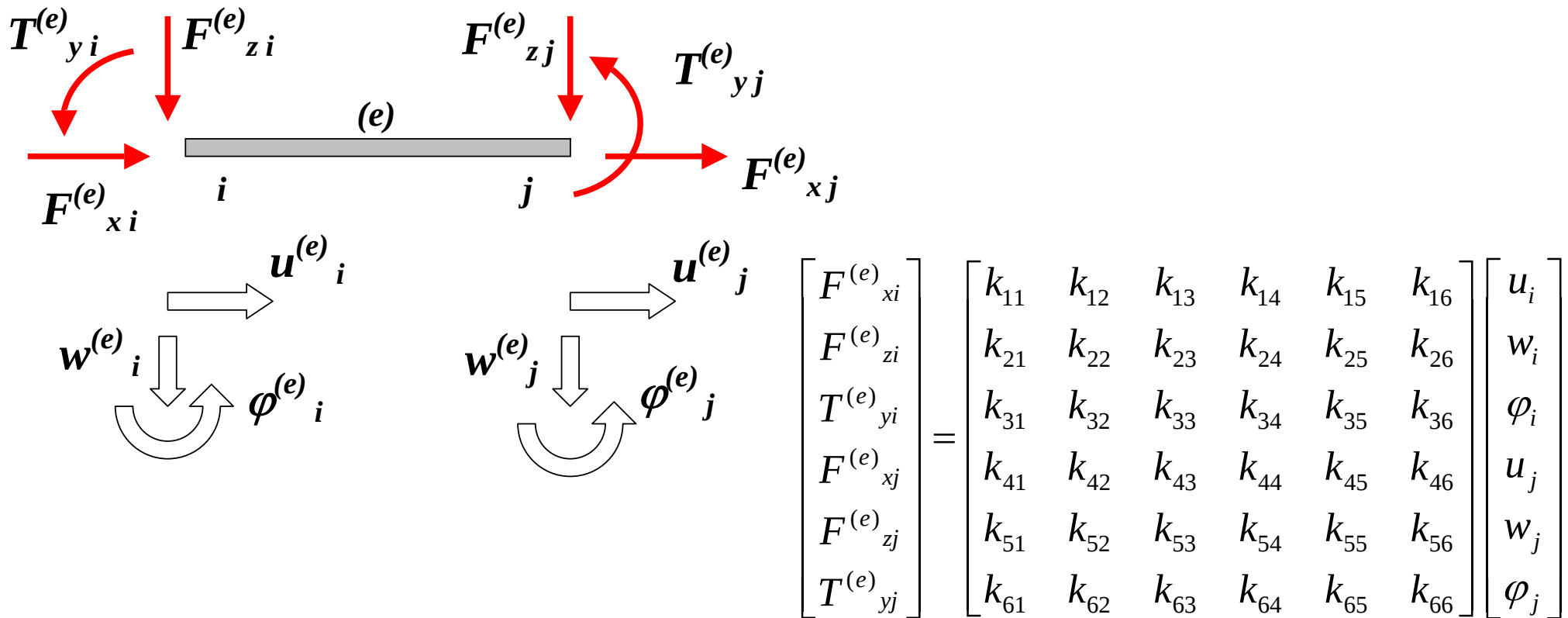
$$\begin{Bmatrix} T_{yi}^{(e)} \\ T_{yj}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i^{(e)} \\ \varphi_j^{(e)} \end{Bmatrix}$$

buiging (met verplaatsbare knopen)



$$\begin{Bmatrix} F_{zi}^{(e)} \\ T_{yi}^{(e)} \\ F_{zj}^{(e)} \\ T_{yj}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i^{(e)} \\ \phi_i^{(e)} \\ w_j^{(e)} \\ \phi_j^{(e)} \end{Bmatrix}$$

raamwerk (extensie + buiging met verplaatsbare knopen)

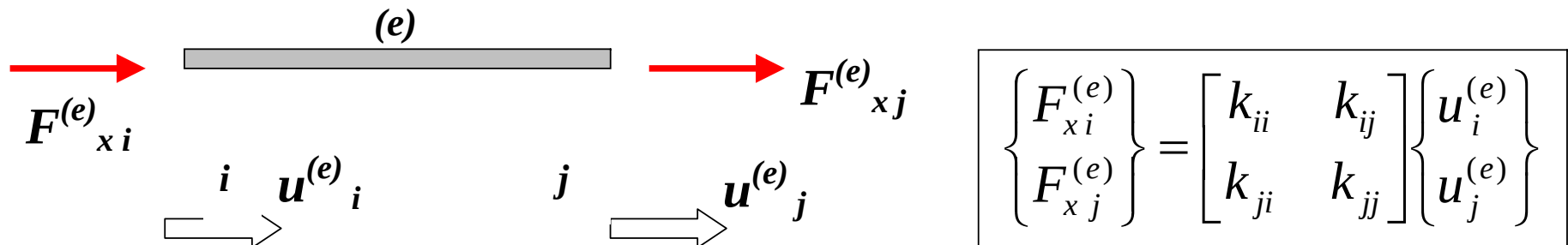


VERSCHILLENDE MOGELIJKHEDEN VOOR BEPALEN VAN STIJFHEIDSMATRIX VAN STAAFELEMENTEN

- directe methode
- shape functies, b.v. met *vergeet-mij-nietjes*
- impliciete interpolatie m.b.v. aangenomen verplaatsingsveld

extensie

Impliciete interpolatie



Neem verplaatsingsveld aan op basis van twee vrijheidsgraden:

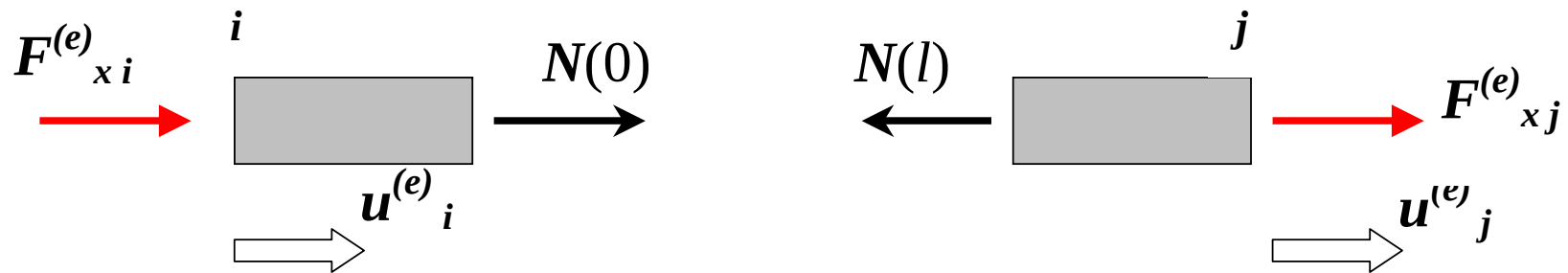
$$u(x) = C_1 + C_2 x \quad \text{met : } u(0) = u_i \quad \text{en} \quad u(l) = u_j$$

$$\Rightarrow C_1 = u_i \quad C_2 = \frac{u_j - u_i}{l}$$

$$\Rightarrow u(x) = u_i + (u_j - u_i) \frac{x}{l}$$

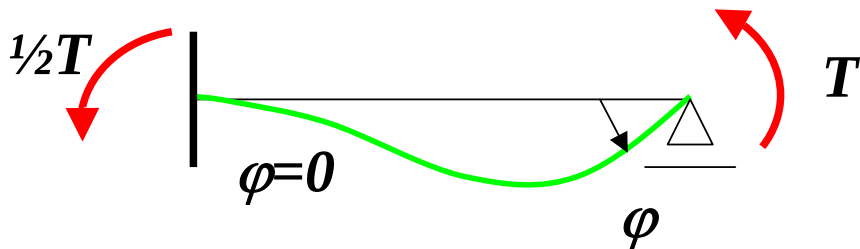
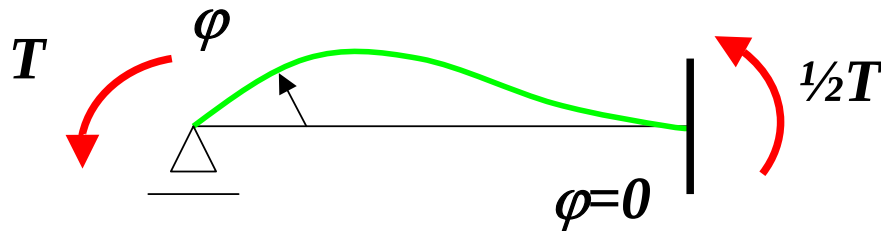
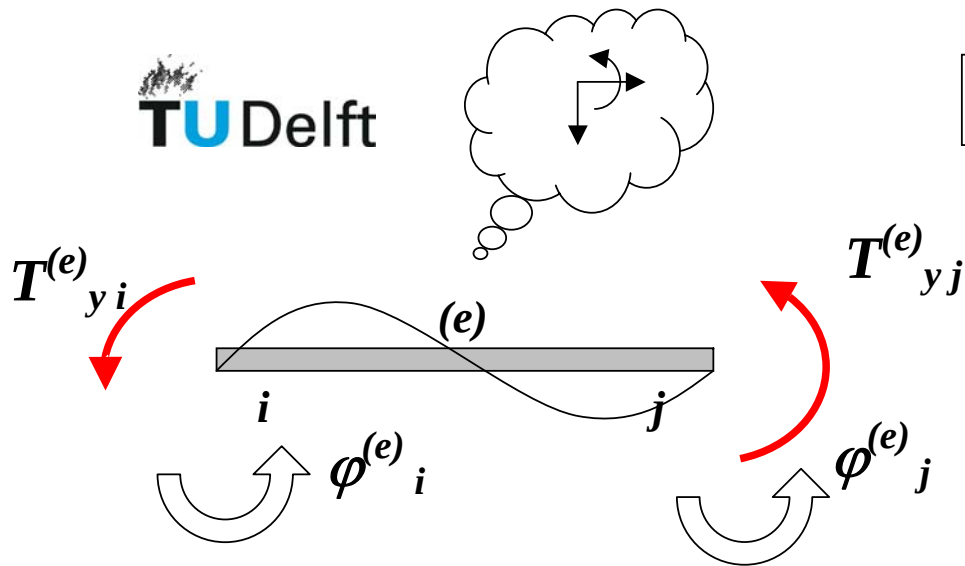
RELATIE TUSSEN $\{F\}$ en $\{u\}$?

$$N = EA\varepsilon = EA \frac{du}{dx} \Rightarrow N(x) = EA \times \frac{(u_j - u_i)}{l}$$



$$\begin{aligned} F_{xi}^{(e)} &= -N(0) \\ F_{xj}^{(e)} &= N(l) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} F_{xi}^{(e)} \\ F_{xj}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}}$$

Shape functies m.b.v.
vergeet-mij-nietjes



$$\varphi_i = \frac{T_i l}{3EI} - \frac{\frac{1}{2} T_i l}{6EI} = \frac{T_i l}{4EI} \Rightarrow k_{ii} = \frac{T_i}{\varphi_i} = \frac{4EI}{l}$$

$$T_j = \frac{1}{2} T_i = k_{ji} \varphi_i \Rightarrow k_{ji} = \frac{\frac{1}{2} T_i}{\varphi_i} = \frac{2EI}{l}$$

$$\varphi_j = \frac{T_j l}{3EI} - \frac{\frac{1}{2} T_j l}{6EI} = \frac{T_j l}{4EI} \Rightarrow k_{jj} = \frac{T_j}{\varphi_j} = \frac{4EI}{l}$$

$$T_i = \frac{1}{2} T_j = k_{ij} \varphi_j \Rightarrow k_{ij} = \frac{\frac{1}{2} T_j}{\varphi_j} = \frac{2EI}{l}$$

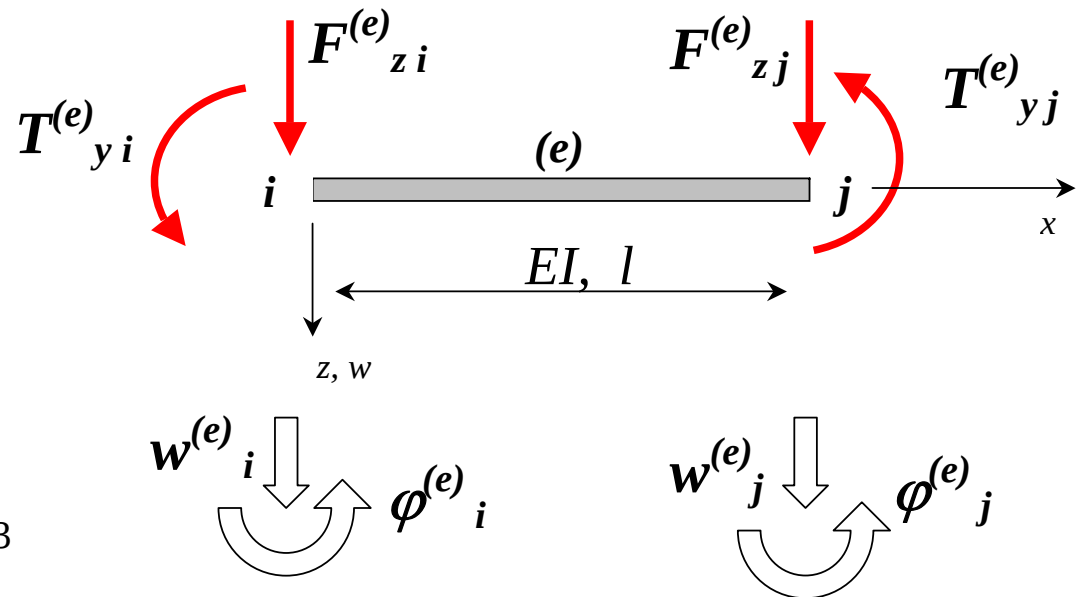
Impliciete interpolatie

(ontwikkel een passend polynoom voor het verplaatsingsveld en zoek de relatie tussen de krachten op de staafenden en de verplaatsingen van de staafenden)

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$$

$$\varphi(x) = -\frac{dw}{dx} = -C_2 - 2C_3 x - 3C_4 x^2$$

$$\text{met : } w(0) = w_i \quad w(l) = w_j \quad \varphi(0) = \varphi_i \quad \varphi(l) = \varphi_j$$



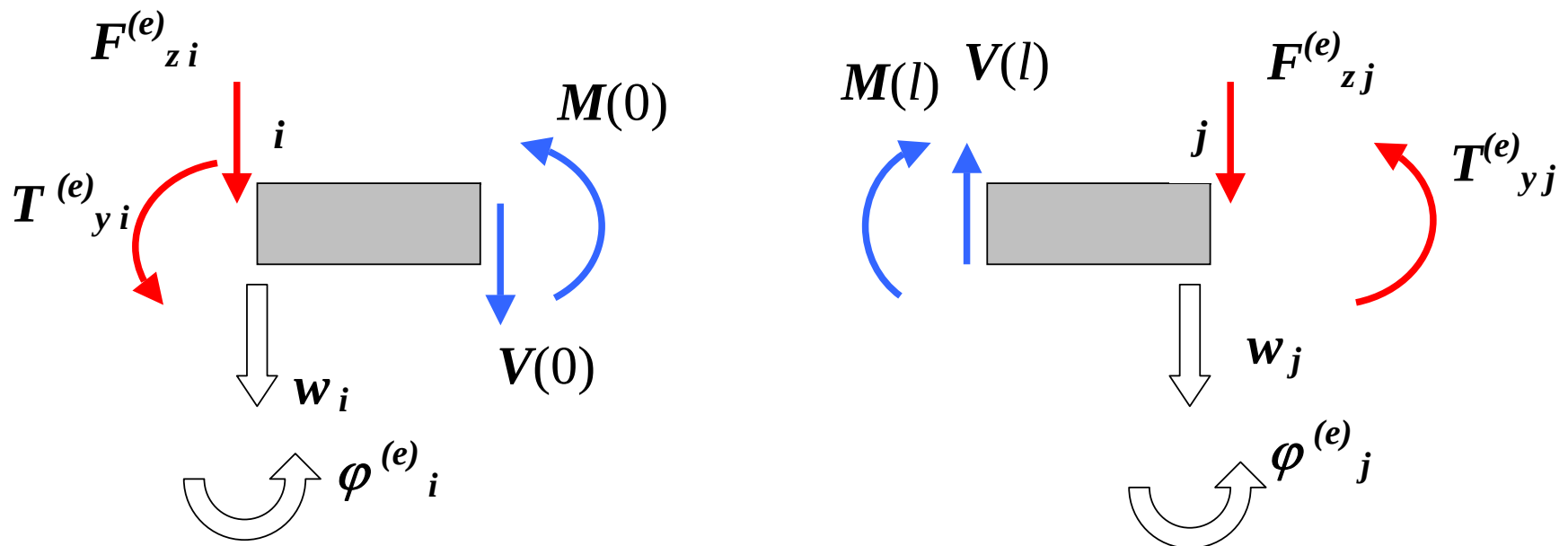
UITWERKEN

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{-1}{l^2} & \frac{-2}{l^3} & \frac{-1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}$$

Constanten bepaald, verplaatsingsveld ligt nu vast m.b.v. de verplaatsingen van de *vrijheidsgraden*.

$$M(x) = EI\kappa = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -2EIC_3 - 6EIC_4 x \quad (\text{lineair})$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx} = -6EIC_4 \quad (\text{constant})$$



krachten op staafenden :

$$F_i = -V(0) = \frac{12EI}{l^3} w_i - \frac{6EI}{l^2} \varphi_i - \frac{12EI}{l^3} w_j - \frac{6EI}{l^2} \varphi_j$$

$$T_i = -M(0) = -\frac{6EI}{l^2} w_i + \frac{4EI}{l} \varphi_i + \frac{6EI}{l^2} w_j + \frac{2EI}{l} \varphi_j$$

$$F_j = V(l) = \frac{-12EI}{l^3} w_i + \frac{6EI}{l^2} \varphi_i + \frac{12EI}{l^3} w_j + \frac{6EI}{l^2} \varphi_j$$

$$T_j = M(l) = -\frac{6EI}{l^2} w_i + \frac{2EI}{l} \varphi_i + \frac{6EI}{l^2} w_j + \frac{4EI}{l} \varphi_j$$

in matrixnotatie :

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ T_i \\ F_j \\ T_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}$$



 element stijfheidsmatrix $K^{(e)}$

MAG DIT ALLEMAAL MAAR ZO ?

- verplaatsingsveld aangenomen ?
- is dat wel nauwkeurig ?

$$w(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$$

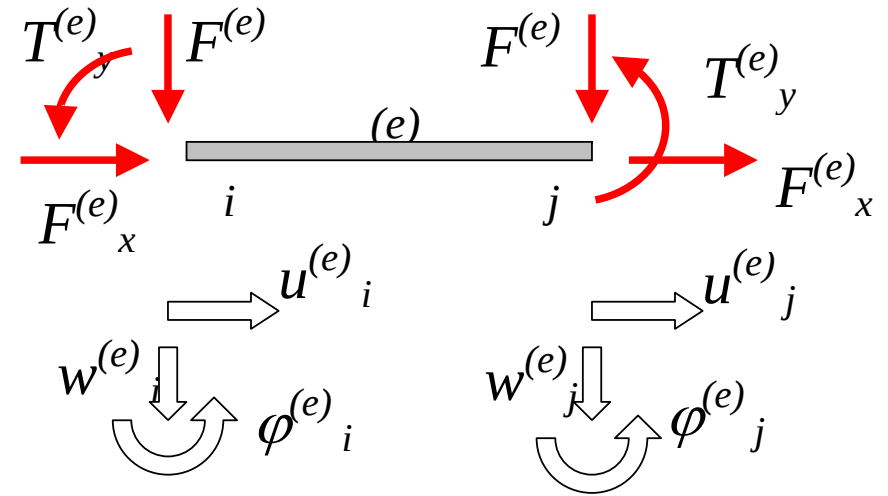
Aangenomen verplaatsingsveld lijkt “verdacht” veel op de homogene oplossing van de 4^e orde D.V. voor buiging

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0$$

Aangenomen verplaatsingsveld is exact voor $q_z = 0$!

ALGEMENE STAAF

(extensie +
buiging met verplaatsbare knopen)



$$\begin{Bmatrix} F_{x_i} \\ F_{z_i} \\ T_{y_i} \\ F_{x_j} \\ F_{z_j} \\ T_{y_j} \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{EA}{l}} & 0 & 0 & \boxed{-\frac{EA}{l}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \boxed{\frac{4EI}{l}} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \boxed{\frac{2EI}{l}} \\ \boxed{-\frac{EA}{l}} & 0 & 0 & \boxed{\frac{EA}{l}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \boxed{\frac{2EI}{l}} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \boxed{\frac{4EI}{l}} \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \phi_i \\ u_j \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix}^{(e)}$$