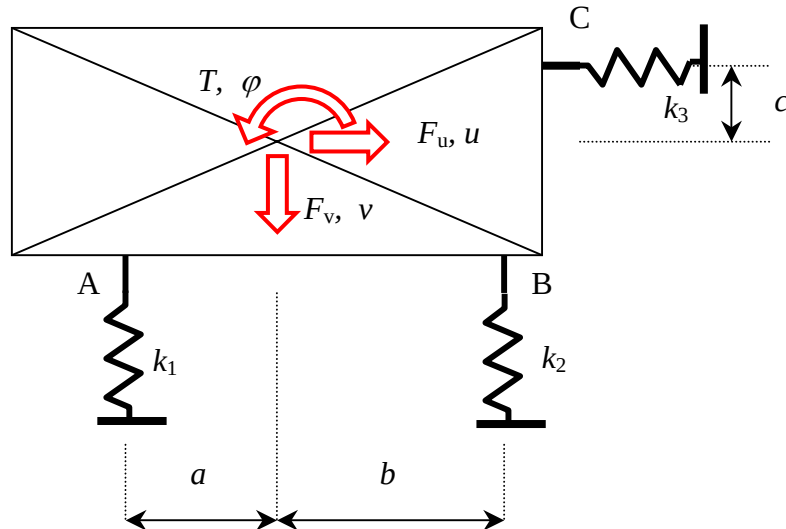


INTRODUCTIE VERPLAATSINGENMETHODE

Blok op veren

Op onderstaande blok, in het platte vlak, grijpen in het massacentrum een verticale kracht F_v , een horizontale kracht F_u en/of een koppel T aan. Het blok is in A, B en C met veren elastisch ondersteund. Deze veren hebben ieder een eigen veerstijfheid k_i . De afstanden van de aangrijpingspunten van de veren op het blok tot het massacentrum zijn aangegeven in de figuur met a , b en c .



Het blok heeft drie bewegingsmogelijkheden : u , v en φ . Dit zijn de enige “vrije” verplaatsingen van het systeem en deze worden dan ook de *systeemvrijheidsgraden* genoemd. Het blok kan alleen belast worden in het massacentrum in de richting van deze drie vrijheidsgraden. Met behulp van de *verplaatsingenmethode* zal een systematische methode worden geïntroduceerd waarmee de verplaatsingen van het blok kunnen worden bepaald bij gegeven belastingen.

De verlenging e_i van iedere veer¹ kan worden uitgedrukt in de drie verplaatsingen die het blok kan ondergaan. Als het blok positieve verplaatsingen ondergaat levert dit de volgende *kinematische relaties*:

$$\begin{aligned} e_1 &= -v - a \times \varphi \\ e_2 &= -v + b \times \varphi \\ e_3 &= -u + c \times \varphi \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & +b \\ -1 & 0 & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (1)$$

kinematische
matrix

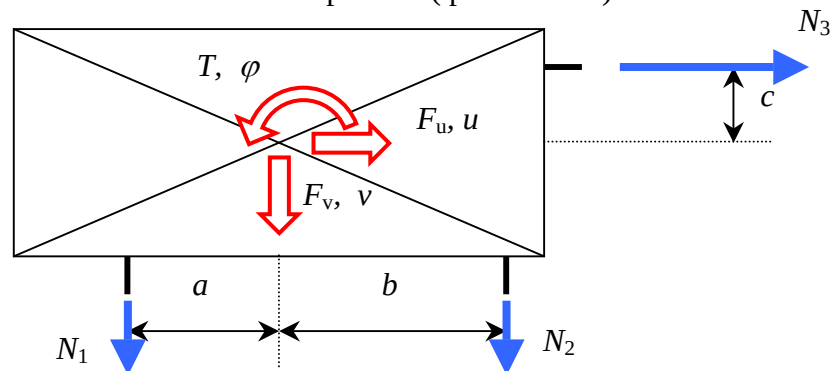
De krachten in de veren t.g.v. deze verlengingen e_i kunnen worden gevonden met behulp van de *constitutieve relatie* en direct worden uitgedrukt in de verplaatsingen van het blok:

$$\begin{aligned} N_1 &= k_1 \times e_1 \\ N_2 &= k_2 \times e_2 \\ N_3 &= k_3 \times e_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & +b \\ -1 & 0 & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

constitutieve
matrix kinematische
matrix

¹ We gaan hierbij uit van kleine verplaatsingen en gebruiken daarom, zoals tot nu toe gebruikelijk, de gelineariseerde uitdrukkingen voor de verlenging e . Geef het blok positieve verplaatsingen u , v en een positieve rotatie φ en bepaal hiermee de verlenging van iedere veer.

De krachten in de veren zullen als het blok wordt vrijgemaakt volgens het principe “*actie en reactie*” werken op het blok zoals in de onderstaande figuur is weergegeven. Hierbij is de situatie getekend waarbij in alle veren *trekkrachten* optreden (positieve N):



De drie evenwichtsvergelijkingen voor het blok zijn:

$$\begin{aligned} \sum F_{hor} &= 0 & N_3 + F_u &= 0 & F_u &= -N_3 \\ \sum F_{ver} &= 0 & \Rightarrow N_1 + N_2 + F_v &= 0 & \Leftrightarrow F_v &= -N_1 - N_2 \\ \sum T|_{MC} &= 0 & N_1 \times a - N_2 \times b - N_3 \times c + T &= 0 & T &= -N_1 \times a + N_2 \times b + N_3 \times c \end{aligned}$$

Deze evenwichtsrelaties kunnen in matrixnotatie als volgt worden weergegeven:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -a & +b & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

evenwichts
matrix

Door (2) in (3) te substitueren ontstaat:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -a & +b & +c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & +b \\ -1 & 0 & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (4)$$

evenwichts
matrix

constitutieve
matrix

kinematische
matrix

Hiermee is de relatie tussen de *uitwendige belasting* op het blok en de *verplaatsing* van het blok eenduidig vastgelegd. In deze betrekking herkennen we de *kinematische* matrix uit vergelijking (1), de *constitutieve* matrix uit (2) en de *evenwichtsmatrix* uit (3). Opvallend is overigens dat de *evenwichtsmatrix* van uitdrukking (4) juist de *getransponeerde kinematische* matrix is. Deze eigenschap geldt in zijn algemeenheid waardoor het stelsel (4) direct kan worden opgesteld indien de *kinematische* en *constitutieve matrices* bekend zijn. Uitwerken van (4) levert het stelsel:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & 0 & -ck_3 \\ 0 & k_1 + k_2 & ak_1 - bk_2 \\ -ck_3 & ak_1 - bk_2 & a^2k_1 + b^2k_2 + c^2k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Voor gegeven belastingen $\{ F_u, F_v, T \}$ kunnen de verplaatsingen $\{ u, v, \varphi \}$ van het blok worden bepaald. Merk overigens op dat het aantal veren niet uitmaakt. In dit geval is het blok statisch bepaald opgelegd maar ook met meer dan drie veren blijft het aantal op te lossen vergelijkingen gelijk aan het aantal vrijheidsgraden, in dit geval drie.

We voeren nu een formele schrijfwijze in waarbij we de matrices als volgt definiëren:

Kinematische relatie:

Legt het verband tussen de *vervorming* (verlenging) en de verplaatsingen van de *stelselvrijheidsgraden*;

$$\{e\} = [B]\{u\} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & +b \\ -1 & 0 & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (1)$$

Constitutieve relatie:

Legt het verband tussen de *veerkrachten* en de *vervorming* van de veren;

$$\{N\} = [D]\{e\} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Evenwichtsrelatie:

Legt het verband tussen de *uitwendige aangrijpende belasting* in de richting van de stelselvrijheidsgraden en de *veerkrachten*;

$$\{F\} = [B]^T \{N\} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -a & +b & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

verplaatsingsmethode

Het uiteindelijk op te lossen stelsel vergelijkingen wordt gevonden door de *kinematische relatie* in de *constitutieve relatie* in te vullen en dit resultaat vervolgens in de *evenwichtsrelatie* in te vullen. Als we deze volgorde aanhouden spreken we van de *verplaatsingsmethode*². Dit stelsel is dan te schrijven als:

$$\{F\} = [B]^T [D][B]\{u\}$$

$$\{F\} = [K_{\text{systeem}}]\{u\} \Rightarrow [K_{\text{systeem}}] = [B]^T [D][B]$$

Uitwerken van de relaties uit dit voorbeeld levert voor de *systeemstijfheidsmatrix*:

$$[K_{\text{systeem}}] = [B]^T [D][B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -a & +b & +c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & +b \\ -1 & 0 & +c \end{bmatrix}$$

$$[K_{\text{systeem}}] = \begin{bmatrix} k_3 & 0 & -ck_3 \\ 0 & k_1 + k_2 & ak_1 - bk_2 \\ -ck_3 & ak_1 - bk_2 & a^2k_1 + b^2k_2 + c^2k_3 \end{bmatrix}$$

Merk op dat de *systeemstijfheidsmatrix* een symmetrische matrix is.

² Dit als tegenhanger van de eerder behandelde krachtenmethode waarbij de vergelijkingen in omgekeerde volgorde werden doorlopen.

Rekenvoorbeeld

Als getallenvoorbeeld wordt een blok gekozen waarvoor gegeven is:

$$\begin{array}{lll} a = 3,0 \text{ m} & k_1 = 1000 \text{ kN/m} & F_u = 50 \text{ kN} \\ b = 2,0 \text{ m} & k_2 = 2000 \text{ kN/m} & F_v = 150 \text{ kN} \\ c = 1,0 \text{ m} & k_3 = 3000 \text{ kN/m} & T = -5 \text{ kNm} \end{array}$$

Uitwerken van dit probleem leidt tot het oplossen van het volgende stelsel vergelijkingen:

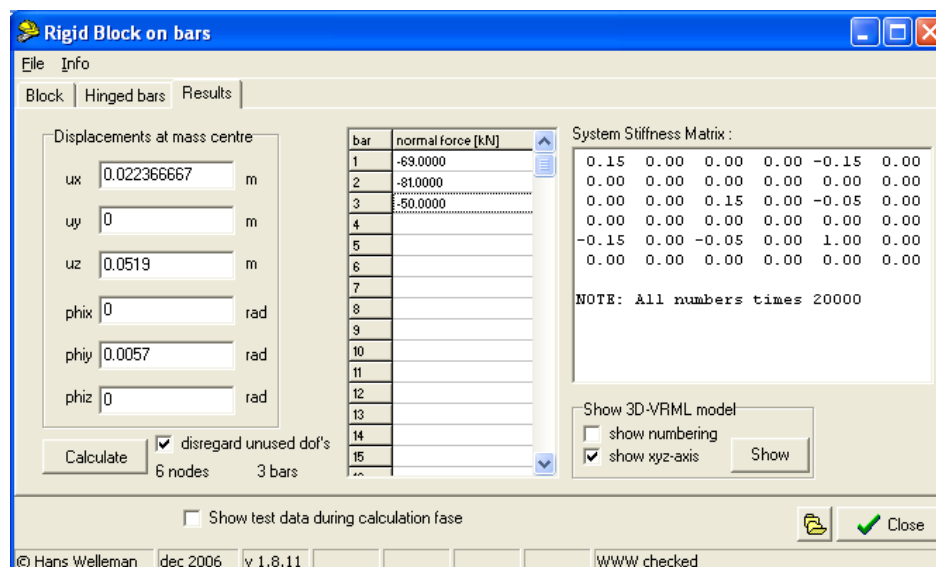
$$\begin{bmatrix} F_u = 50,0 \\ F_v = 150,0 \\ T = -5,0 \end{bmatrix} = 1000 \times \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} u = 0,02267 \text{ m} \\ v = 0,05190 \text{ m} \\ \varphi = 0,0057 \text{ rad} \end{array}$$

De onbekende verplaatsingen kunnen eenvoudig met de grafische rekenmachine of met MAPLE worden gevonden. Ook kan een berekening worden uitgevoerd met het programma RIGIDBLOCK³.

MAPLE sheet:

```
> restart;
> with(linalg):
> Bg:=matrix([[0, -1, -a],[0, -1,b],[-1,0,c]]);
> BgT:=transpose(Bg);
> Dg:=matrix([[k1,0,0],[0,k2,0],[0,0,k3]]);
> K:=multiply(BgT,Dg,Bg);
> a:=3; b:=2; c:=1; k1:=1000; k2:=2000; k3:=3000;
> F:=inverse(K);
> load:=vector([50,150,-5]);
> disp:=multiply(F,load);
> evalf(disp[1]); evalf(disp[2]); evalf(disp[3]);
```

Resultaten RIGIDBLOCK:



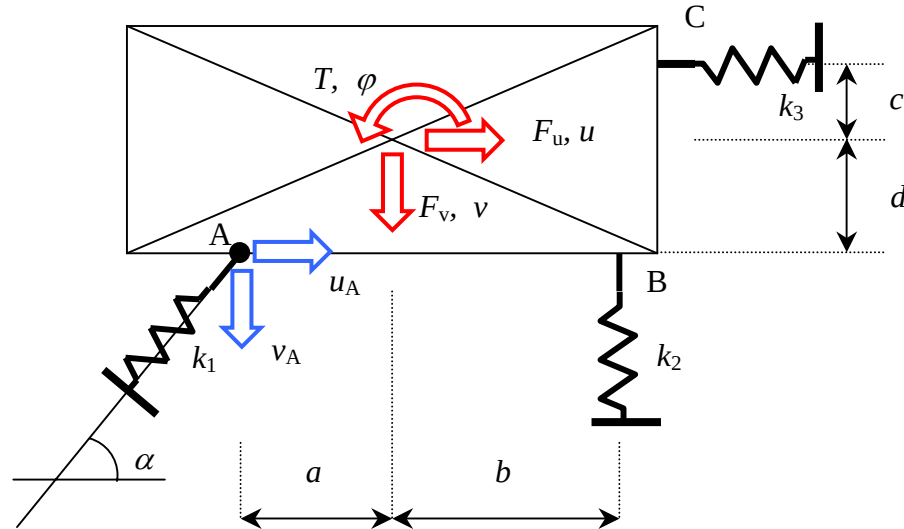
Merk op:

RIGIDBLOCK werkt in principe volledig 3D en het blok heeft dan zes vrijheidsgraden. In het platte vlak worden er echter drie niet gebruikt.

³ Zie de educatieve website op http://mechanics.citg.tudelft.nl/~wmn/TUD_CT/index.shtml.

Willekeurig geplaatste veer

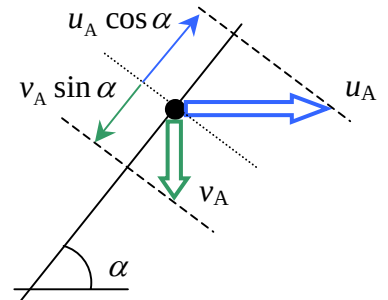
In het voorgaande voorbeeld waren de veren evenwijdig gekozen aan de richtingen van de translaties van het blok. In het geval een willekeurig geplaatste veer aan het blok wordt gekoppeld verandert er feitelijk niets aan de aanpak. Alleen de uitdrukking voor de verlenging van de veer wordt iets ingewikkelder. Hieronder wordt dat toegelicht.



De verlenging van de schuine veer kan worden bepaald met behulp van de verplaatsingen van punt A. Deze verplaatsingen in A zijn gerelateerd aan de vrijheidsgraden van het blok. Ga zelf na, door het blok een positieve verplaatsing u , v en een positieve rotatie φ te geven, dat de verplaatsingen in A gelijk zijn aan:

$$u_A = u + \varphi \times d \quad \text{en} \quad v_A = v + \varphi \times a$$

Deze verplaatsingen leiden tot een verlenging van de veer die kan worden gevonden door de verplaatsingen in A te projecteren op de oorspronkelijke stand van de veer. We gebruiken hiervoor in feite een Williot. We maken zo alleen gebruik van de lineaire termen in de uitdrukkingen voor de verlenging van de veer. Dit is alleen geoorloofd voor kleine verplaatsingen⁴. In de figuur rechts is de projectie van de verplaatsing in A langs de oorspronkelijke veerrichting weergegeven. De **verlenging** e_1 van de veer wordt hiermee:



$$e_1 = u_A \cos \alpha - v_A \sin \alpha = \cos \alpha \times (u + \varphi \times d) - \sin \alpha \times (v + \varphi \times a)$$

In matrix notatie kan voor deze verlenging worden geschreven⁵:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & (-a \times \sin \alpha + d \times \cos \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (5)$$

In de eerder beschreven aanpak zal hierdoor de eerste rij in de *kinematische matrix* (4) moeten worden vervangen door (5). Dat houdt dan tevens in dat ook de eerste kolom in de *evenwichtsmatrix* moet worden aangepast aangezien dit de getransponeerde is van de *kinematische matrix*.

⁴ Zie Engineering Mechanics, Volume 1, Hartsuijker en J.W. Welleman, § 15.3.2 en Volume 2, § 7.2.

⁵ Controleer zelf dat voor $\alpha=90^\circ$ de eerder gehanteerde uitdrukking ontstaat.