

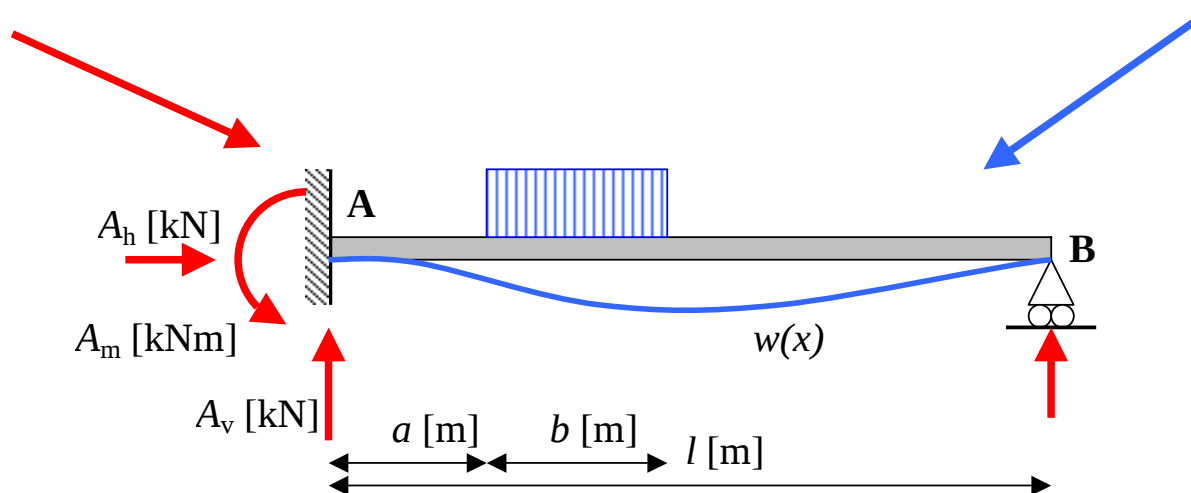
# BEREKENEN VAN STATISCH ONBEPAAALDE CONSTRUCTIES

## KRACHTENMETHODE

Fundamentele onbekenden zijn krachten zoals oplegreacties of staafkrachten.

## VERPLAATSINGENMETHODE

Fundamentele onbekenden zijn verplaatsingsgrootheden van de knooppunten.



## KRACHTENMETHODE

- Methode voor handberekeningen
- Zelf “handige keuze maken” om rekenwerk te minimaliseren
- Vergt wel wat inzicht en oefening

## VERPLAATSINGENMETHODE

- Systematische methode
- Zeer geschikt om te programmeren
- Basis voor computerprogramma's



Kinematische vergelijkingen

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

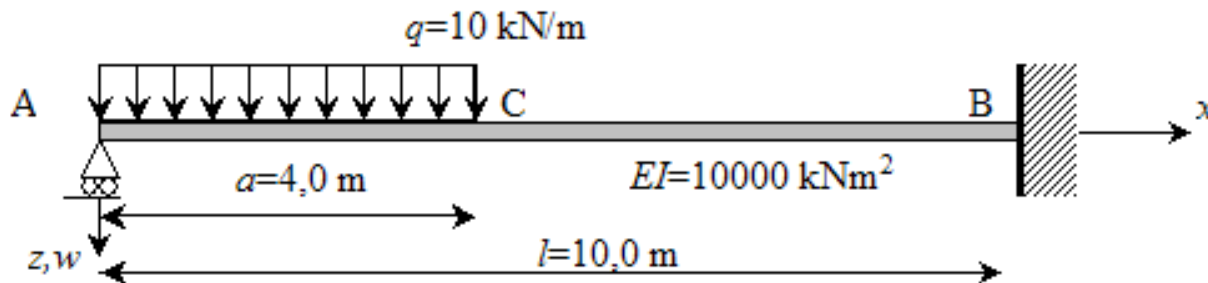
Constitutieve vergelijkingen

$$M = EI\kappa = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Evenwichtsvergelijkingen

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \text{en} \quad \frac{dV}{dx} = -q(x)$$

# KLASSIEKE (CONTINUE) AANPAK MET DE DIFFERENTIAALVEGELIJKING



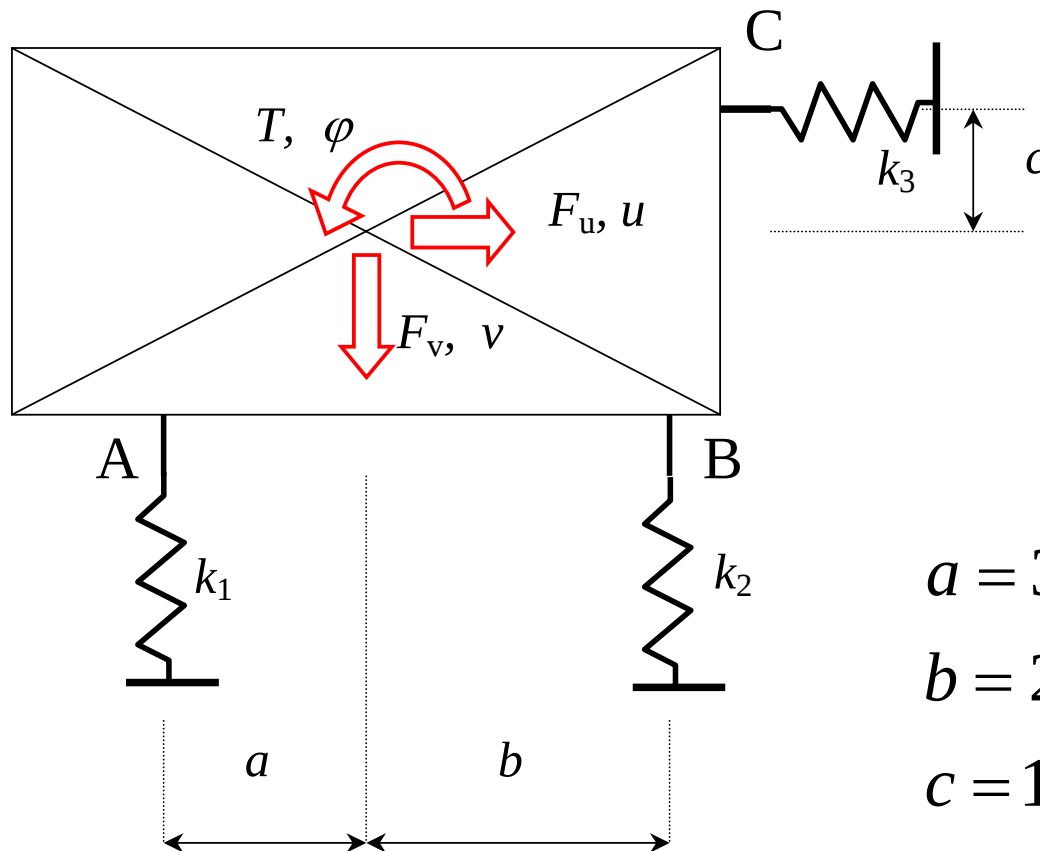
$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q$$

met:

$$\begin{aligned} \text{r.v.w.: } x = 0; \quad w = 0; \quad M = 0 \\ x = l; \quad w = 0; \quad \varphi = 0 \end{aligned}$$

**OPLOSSEN  
MET  
MAPLE**

# DISCRETE TOEPASSING : STAR BLOK OP VEREN



$$\begin{aligned} a &= 3,0 \text{ m} & k_1 &= 1000 \text{ kN/m} \\ b &= 2,0 \text{ m} & k_2 &= 2000 \text{ kN/m} \\ c &= 1,0 \text{ m} & k_3 &= 3000 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

## KINEMATISCHE RELATIES

$$\begin{aligned} e_1 &= -v - a \times \varphi \\ e_2 &= -v + b \times \varphi \\ e_3 &= -u + c \times \varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & +b \\ -1 & 0 & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}$$

kinematische  
matrix

## CONSTITUTIEVE RELATIES

$$\begin{aligned} N_1 &= k_1 \times e_1 \\ N_2 &= k_2 \times e_2 \\ N_3 &= k_3 \times e_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

constitutieve  
matrix

## EVENWICHTRELATIES

$$\begin{array}{llll}
 \sum F_{hor} = 0 & N_3 + F_u = 0 & & F_u = -N_3 \\
 \sum F_{ver} = 0 \Rightarrow & N_1 + N_2 + F_v = 0 & \Leftrightarrow & F_v = -N_1 - N_2 \\
 \sum T|_{MC} = 0 & N_1 \times a - N_2 \times b - N_3 \times c + T = 0 & & T = -N_1 \times a + N_2 \times b + N_3 \times c
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -a & +b & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

evenwichts  
matrix

## VERPLAATSINGENMETHODE

Kinematische vergelijkingen

$$\{e\} = [B] \{u\}$$

Constitutieve vergelijkingen

$$\{N\} = [D] \{e\}$$

Evenwichtsvergelijkingen

$$\{f\} = [B^T] \{N\}$$

$$\{f\} = [B]^T [D] [B] \{u\}$$

$$\{f\} = [K_{\text{systeem}}] \{u\} \Rightarrow [K_{\text{systeem}}] = [B]^T [D] [B]$$

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -a & +b & +c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & +b \\ -1 & 0 & +c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}$$

## NA UITWERKEN RESTEERT

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & 0 & -ck_3 \\ 0 & k_1 + k_2 & ak_1 - bk_2 \\ -ck_3 & ak_1 - bk_2 & a^2k_1 + b^2k_2 + c^2k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Stel de belasting is gegeven:

$$F_u = 50 \text{ kN}$$

$$F_v = 150 \text{ kN}$$

$$T = -5 \text{ kNm}$$

## OPLOSSEN

```
> restart;  
> with(linalg):  
> K:=matrix([[k3, 0, -c*k3], [0, k1+k2, a*k1-b*k2],  
[-c*k3, a*k1-b*k2, a^2*k1+b^2*k2+c^2*k3]]);  
> a:=3: b:=2: c:=1:  
> k1:=1000: k2:=2000: k3:=3000:  
> F:=inverse(K):  
> load:=vector([50, 150, -5]):  
> disp:=multiply(F, load);
```

$$u = 0,022367 \text{ m}$$

$$v = 0,051900 \text{ m}$$

$$\varphi = 0,005700 \text{ rad}$$

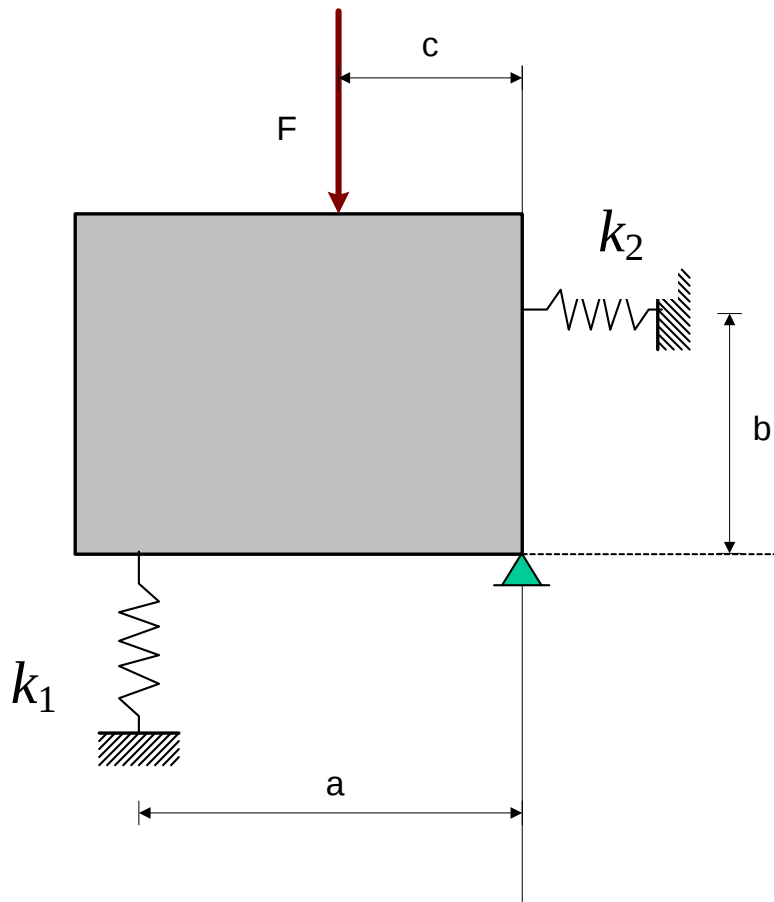
## VEERKRACHTEN

$$N_1 = k_1 \times e_1 = -69 \text{ kN}$$

$$N_2 = k_2 \times e_2 = -81 \text{ kN}$$

$$N_3 = k_3 \times e_3 = -50 \text{ kN}$$

## OPDRACHT



- a) Welke vrijheidsgraden heeft dit systeem?
- b) Stel de vergelijkingen op waarbij gebruik wordt gemaakt van de aanpak volgens de verplaatsingenmethode.
- c) Bepaal de uitdrukking voor de verplaatsing in de richting van de vrijheidsgraden.