

MODELUITWERKING

VRAAGSTUK 1 : Theorie

Deel 1

- a) De grenzen kunnen m.b.v. de basisgevallen van Euler worden bepaald:

$$\begin{array}{ll}
 r = 0 \text{ en } k = 0 : & F_k = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \\
 r = \text{inf en } k = \text{inf} : & F_k = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \\
 r = \text{inf en } k = 0 : & F_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \\
 r = 0 \text{ en } k = \text{inf} : & F_k = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}
 \end{array}$$

De kniklast kan, afhankelijk van de stijfheden variëren tussen :

$$\frac{\pi^2 EI}{4l^2} \leq F_k \leq \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{voor specifieke waarden van } k \text{ en } r \text{ is, gezien de bandbreedte, nader onderzoek noodzakelijk})$$

Opmerking : Beantwoording m.b.v. kniklengten is uiteraard het equivalent .

- b) **Stelling 1:** Onjuist, alleen voor starre staven geldt dat de vergrotingsfactor $n/(n-1)$ exacte resultaten levert, de benadering m.b.v. de vergrotingsfactor is overigens voor buigzame staven veelal goed genoeg maar niet exact.
Stelling 2: Onjuist, er zal een transcendente vergelijking moeten worden opgelost. Hiervoor bestaat geen gesloten oplossing.

Deel 2

- c) De echte vrijheidsgraad van dit starre blok is de enige verplaatsingsmogelijkheid en dat is de rotatie φ van het blok om de scharnierende oplegging.
d) Neem hiervoor trekkrachten aan in de veren en stel vervolgens de evenwichtsvoorwaarde op die hoort bij de rotatievrijheidsgraad. Dit is de momentenevenwichtsvergelijking om de oplegging. De verlenging e van iedere veer kan worden uitgedrukt in de enige vrijheidsgraad van dit systeem:

evenwichtsvergelijking

$$\sum T = 0: F \times c + F_1 \times a - F_2 \times b = 0$$

constitutieve vergelijking

$$F_1 = k_1 \times e_1$$

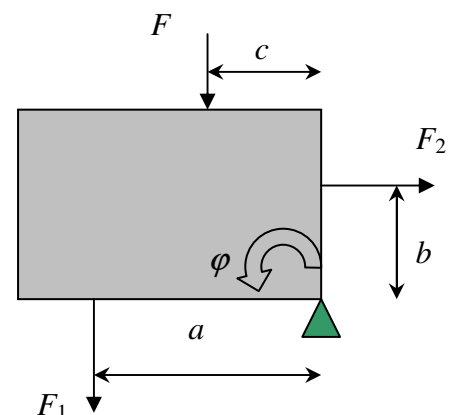
$$F_1 = k_2 \times e_2$$

kinematische vergelijking

$$e_1 = -\varphi \times a$$

$$e_2 = +\varphi \times b$$

verplaatsingenmethode



- e) Uitwerken levert:

$$F = \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2}{c} \times \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{c}{k_1 a^2 + k_2 b^2} \times F$$

VRAAGSTUK 2 : Statisch onbepaalde constructies-1

- a) Steunpuntsmoment t.g.v. een enkel belast veld (*maak gebruik van VGN-tjes*):

$$M = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} ql^2 = -\frac{1}{16} ql^2 = -\frac{1}{16} \times 8 \times 64 = -32 \text{ kNm}$$

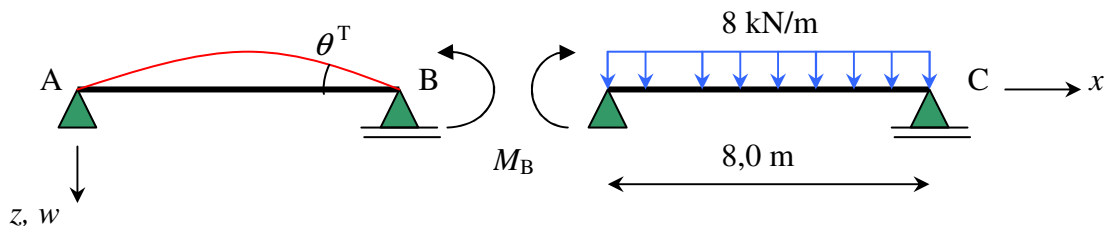
Dit is een negatief buigend moment (trek aan de bovenzijde van de ligger).

Teken een correcte momentenlijn met de juiste vervormingstekens en geef de raaklijnen aan.

- b) T.g.v. de temperatuursinvloeden op het linker veld ontstaat er in B een positief steunpuntsmoment (trek aan de onderzijde). In absolute zin zal de 32 kNm dus in grootte kleiner worden.

Merk op dat de relatie tussen kromming en M -lijn in het geval van temperatuursbelastingen niet dezelfde is als die voor normale belastingen. Deze vraag is dus een regelrechte instinker voor die studenten die de theorie niet hebben bestudeerd.

- c) Statisch bepaald hoofdsysteem zijn twee liggertjes op twee steunpunten. De vormveranderingsvoorwaarde is de rotatie t.p.v. het middensteunpunt.



De vrij optreedbare hoekverdraaiing links t.g.v. **alleen** de temperatuursbelasting bedraagt:

$$\varphi_B^{AB} = \theta^T = -\frac{1}{2} \kappa^T \times l = -\frac{\alpha \Delta T l}{2h}$$

De hoekveranderingsvoorwaarde voor het geheel wordt hiermee:

$$-\frac{\alpha \Delta T l}{2h} + \frac{M_B l}{3EI} = -\frac{M_B l}{3EI} - \frac{ql^3}{24EI}$$

Hieruit volgt het steunpuntsmoment:

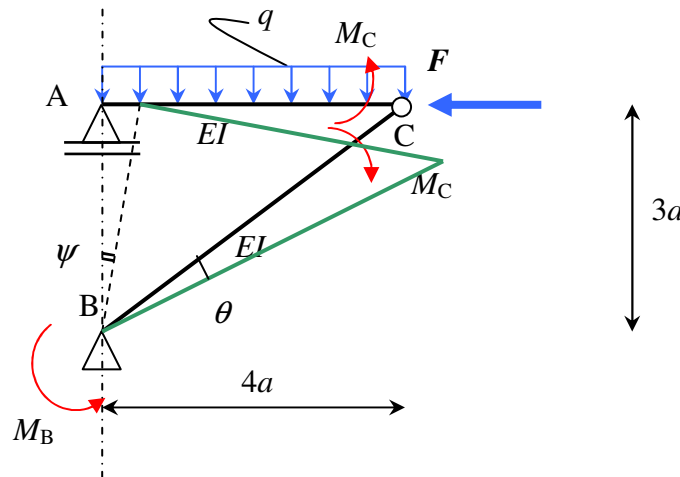
$$M_B = -23,0 \text{ kNm}$$

Dit steunpuntsmoment veroorzaakt trek aan de bovenzijde en is in het gehanteerde assenstelsel dus een negatief buigend moment.

Teken een correcte momentenlijn met de juiste vervormingstekens en geef de raaklijnen aan.

VRAAGSTUK 3 : Statisch onbepaalde constructies-2

- a) De constructie betreft een statisch onbepaalde constructie met verplaatsbare knopen. Als de constructie wordt opgedeeld in liggers op twee steunpunten ontstaat een mechanisme. De kinematica van het mechanisme kan met één vrijheidsgraad worden beschreven. Hieronder is het mechanisme weergegeven. Essentieel daarbij is de juiste aanduiding van de rotaties van ieder (staaf)deel van de constructie.



De statisch onbepaalden zijn de momenten in C en B. De vrijheidsgraad van het mechanisme is de derde onbekende. Om de onbekenden op te lossen zijn twee v.v.v.'s nodig en één extra evenwichtsvoorwaarde voor het evenwicht van het mechanisme in de vorm van een virtuele arbeidsvergelijking. De horizontale roloplegging in A kan vervangen worden gedacht door een verticale pendel. Op het snijpunt van deze pendel met de pendel BC ligt het rotatiecentrum van staaf AC. Staaf AC draait dus om punt B. Aangezien AC in C vast verbonden zit met BC kan de rotatie van staaf AC worden uitgedrukt in die van BC. Als we de rotatie van BC kiezen als de vrijheidsgraad waarmee de verplaatsing van het mechanisme wordt beschreven dan volgt uit de kinematica van het mechanisme:

$$u_C^{AC} = u_C^{BC} \quad \psi \times 3a = \theta \times 3a \quad \Rightarrow \quad \psi = \theta \quad (\text{alle staven draaien dus met dezelfde hoek})$$

De v.v.v.'s zijn:

$$\begin{aligned} \varphi_C^{AC} &= \varphi_C^{BC} \quad \frac{M_C \times 4a}{3EI} + \frac{q \times (4a)^3}{24EI} - \theta = -\frac{M_C \times 5a}{3EI} - \frac{M_B \times 5a}{6EI} - \theta \\ \varphi_B^{BC} &= 0 \quad \frac{M_C \times 5a}{6EI} + \frac{M_B \times 5a}{3EI} - \theta = 0 \end{aligned}$$

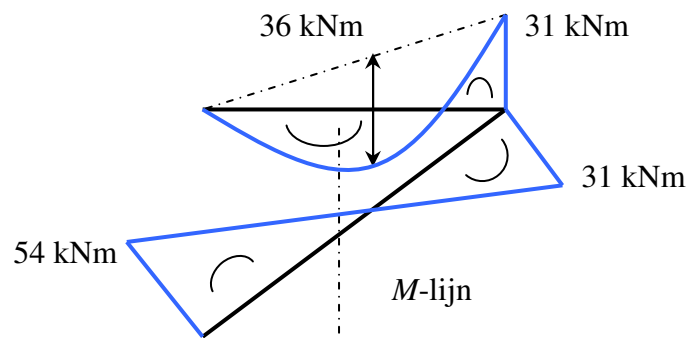
Voor de virtuele arbeidsvergelijking geldt:

$$\delta A = (q \times 4a) \times 2\delta\theta - F \times 3a \times \delta\theta - M_C \times \delta\theta + M_C \times \delta\theta - M_B \times \delta\theta = 0$$

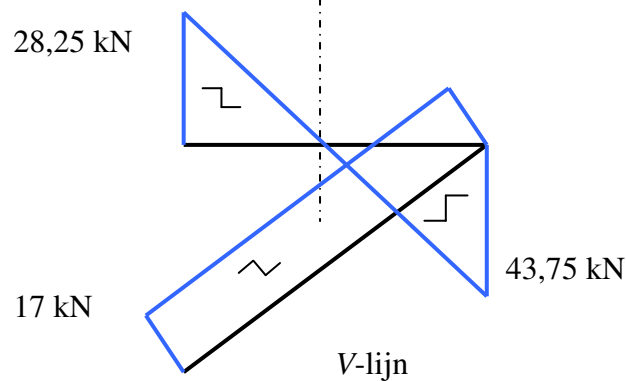
- b) Uit deze laatste vergelijking valt het moment in C weg en resteert direct een uitdrukking voor het moment in B waarmee vervolgens M_C en θ kunnen worden bepaald:

$$M_B = 3Fa - 8qa^2 = 54 \text{ kNm}; \quad M_C = -\frac{28}{9}qa^2 + \frac{5}{6}Fa = -31 \text{ kNm}; \quad \theta = \frac{1}{120} \text{ rad}$$

Met de nu bekende momenten in B en C is de M -lijn te tekenen.



c) Uit de helling van de M -lijn volgt de V -lijn.



d) De verticale oplegreactie in A volgt direct uit de V -lijn. Uit het verticale evenwicht volgt direct de verticale oplegreactie in B. Uit de horizontale evenwichtsvergelijking volgt direct de horizontale oplegreactie in B aangezien A een horizontale roloplegging betreft.

$$A_v = 28,25 \text{ kN} \uparrow$$

$$B_H = 30 \text{ kN} \rightarrow$$

$$B_v = 43,75 \text{ kN} \uparrow$$

$$B_M = 54 \text{ kNm}$$

e) De verplaatsing van punt C volgt direct uit de starre rotatie van het mechanisme:

$$u_C = \theta \times 3a = 0,025 \text{ m}$$

$$v_C = \theta \times 4a = 0,033 \text{ m}$$

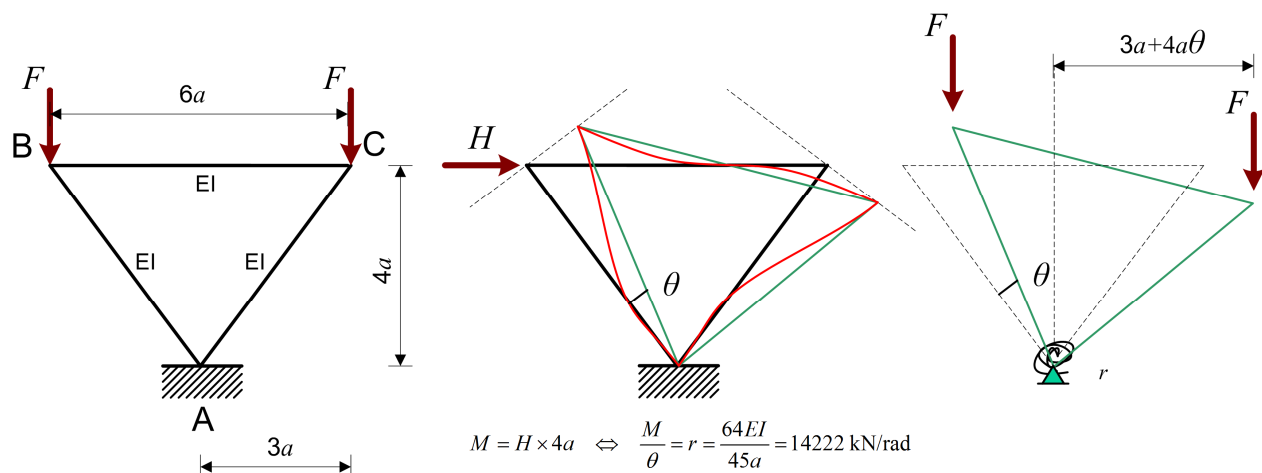
VRAAGSTUK 4 : Stabiliteit

- a) De drukkracht in de schuine staven is 50 kN.
- b) Er zijn drie gevallen te onderscheiden.
1. Globale instabiliteit, de staven knikken niet uit maar door vervorming kantelt de constructie in zijn geheel en verliest het evenwicht. (de staven knikken dus niet!)
 2. Lokale knik van de druk staven (geschoord)
 3. Lokale knik van de drukstaven (ongeschoord)

Geval 1 zal over het algemeen niet maatgevend zijn. Bekend is tevens dat de lokale, ongeschoorde knikvorm veelal maatgevend is. Uitwerken van alleen 3 volstaat daarom.

c) Geval 1:

Voor het eerste geval is de *overall* rotatieveerstijfheid nodig. Aangezien deze knikvorm veelal niet maatgevend is volstaat het om deze in de uitwerking alleen te melden hoe deze kan worden bepaald. De rotatieveerstijfheid kan gevonden worden door een horizontale kracht H aan te brengen en de rotatie van de “starre driehoek” te bestuderen. De constructie wordt a.h.w. vervangen door een star lichaam met een rotatieveer r in A. Deze berekening kan met MAPLE of een raamwerkprogramma worden uitgevoerd.

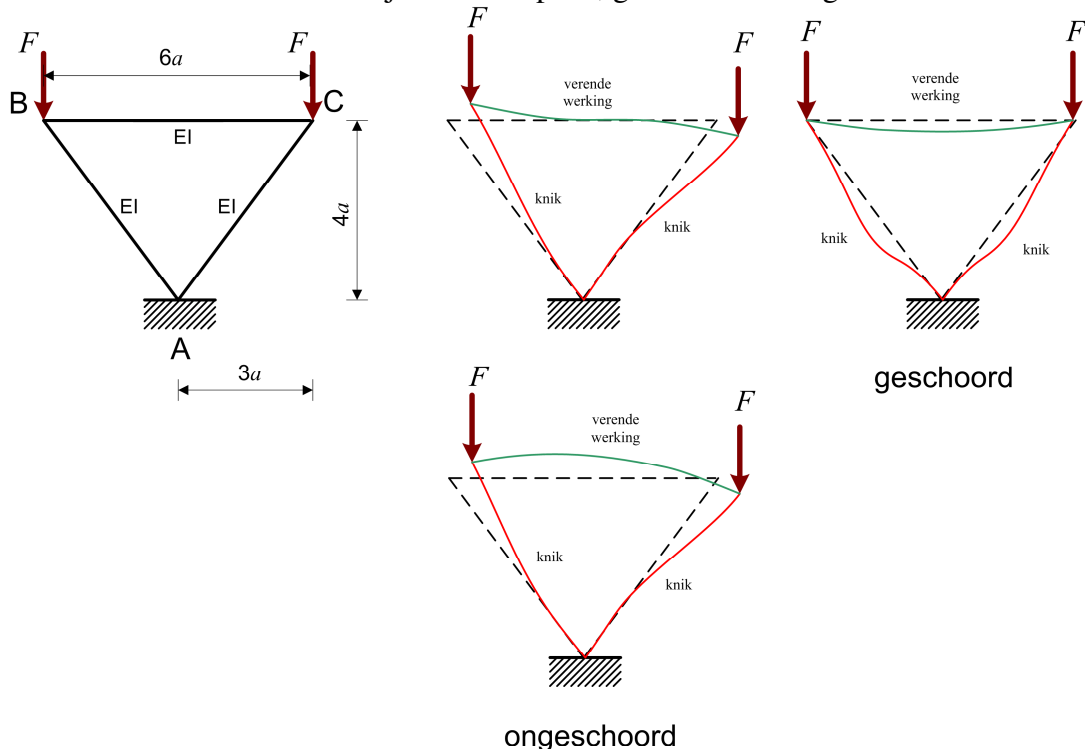


Voor de volledigheid, de veerstijfheid r die wordt gevonden is 14222 kNm/rad. Door het starre model een rotatie θ te geven kan de kniklast worden gevonden:

$$(3a + 4a\theta)F - (3a + 4a\theta)F = r\theta \Leftrightarrow F_k = \frac{r}{8a} = \frac{64EI}{45a \times 8a} = 1778 \text{ kN}$$

Geval 2 en 3:

Voor de lokale knikvormen zijn er twee opties, geschoord en ongeschoord.



De kolom wordt gemodelleerd als een aan twee zijden verend ingeklemde, op druk belaste staaf. Voor beide gevallen geldt dat de veerstijfheid t.p.v. de inklemming van de schuine kolommen oneindig is. Voor de verende werking van de bovenregel geldt:

$$\text{Geschoord: } r_1 = \frac{2EI}{l} = \frac{2EI}{6a}$$

$$\text{Ongeschoord: } r_1 = \frac{6EI}{l} = \frac{6EI}{6a} = \frac{EI}{a} \quad \text{of} \quad r_1 = \frac{2EI}{l} = \frac{2EI}{6a} = \frac{EI}{3a}.$$

Voor de **geschoorde** constructie geldt de ρ -formule:

$$\rho_1 = \frac{r_1 \times 5a}{EI} = \frac{5}{3}; \quad \rho_2 = \infty$$

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1) \times 2}{(5 + \rho_1) \times 1} \times \frac{\pi^2 EI}{(5a)^2} = \frac{5 + \frac{10}{3}}{5 + \frac{5}{3}} \times \frac{2\pi^2 EI}{25a^2} = \frac{\pi^2 EI}{10a^2} \cong \frac{EI}{a^2} = 1000 \text{ kN}$$

(merk op : eerst de ρ_2 wegdelen i.v.m. het oneindig zijn, zie ook de collegevoorbeelden)

Voor de **ongeschoorde** constructie geldt de η -formule. Merk op dat vanwege de inklemming in A de schuine staven onafhankelijk van elkaar kunnen uitknikken. De inklemming eist immers alleen een hoeverdraaiing van nul. Daarom is de laagste buigstijfheid van de bovenregel maatgevend. Hier werden beide opties goed gerekend.

$$\rho_1 = \frac{r_1 \times 5a}{EI} = \frac{5}{3}; \quad \eta_1 = 4 + \frac{30}{5} = 10; \quad \rho_2 = \infty; \quad \eta_2 = 4$$

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{(5a)^2} = \frac{49\pi^2 EI}{2500a^2} \cong 193,4 \text{ kN} \quad (\text{maatgevend})$$

- d) De laagste kniklast van 193,4 kN is maatgevend waaruit volgt dat voor de knikbelasting op de constructie geldt: $F_{k\text{-constructie}} = 0,8 \times 193,4 = 154,8 \text{ kN}^1$.

- e) De vergrotingsfactor kan worden bepaald met:

$$n = \frac{F_{k\text{-staaf}}}{N} = \frac{193,4}{50} = \frac{F_{k\text{-constructie}}}{F} = \frac{154,8}{40} = 3,87$$

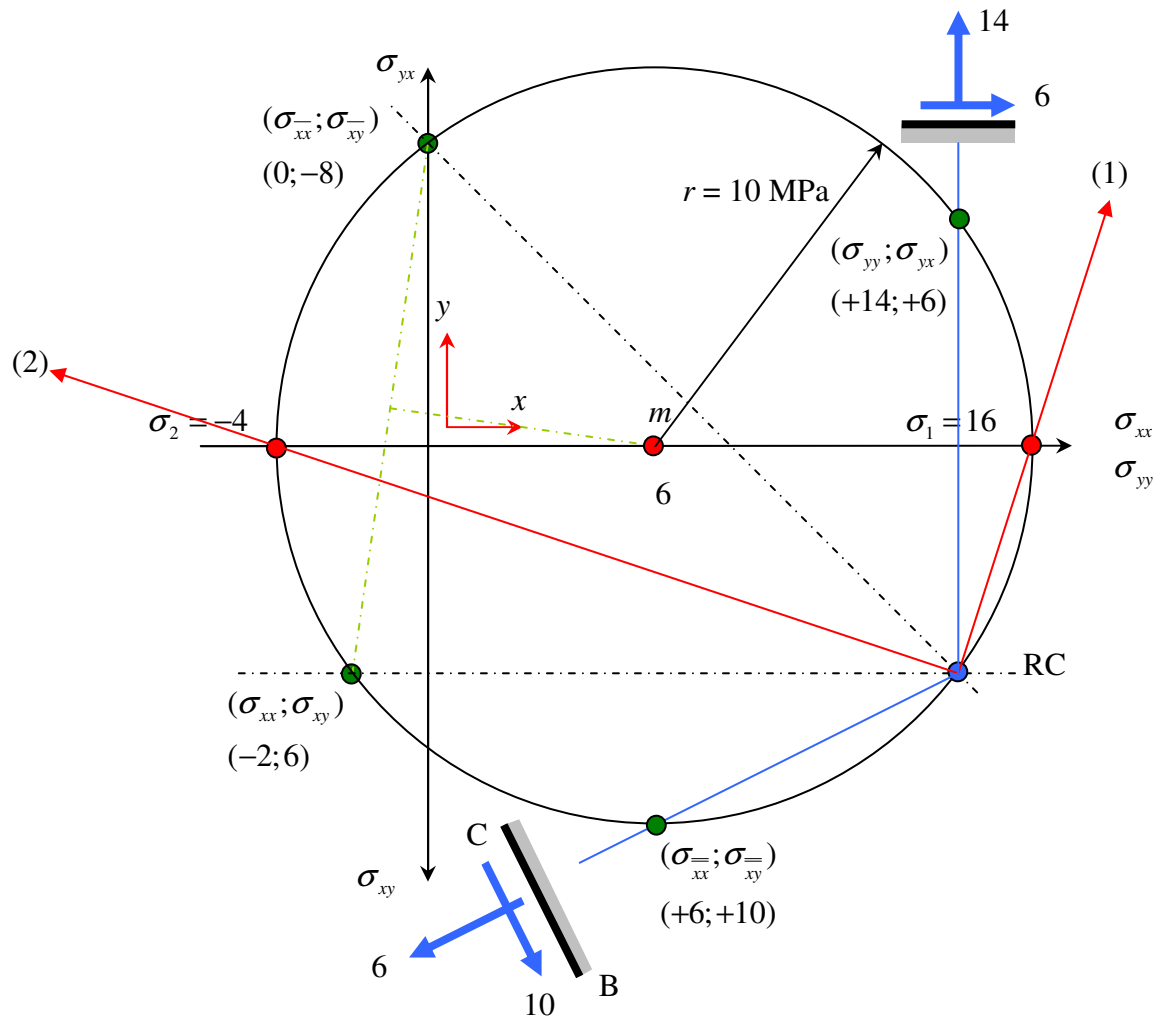
$$\text{vergrotingsfactor} = \frac{n}{n-1} = 1,35$$

Merk op dat deze vergrotingsfactor te groot is, acceptabel is 1,05 – 1,10. Hoewel de constructie symmetrisch belast wordt en er met de belasting op de knopen geen moment ontstaat is de constructie wel gevoelig voor een initiële scheefstand.

¹ Een niet-lineaire numerieke analyse met FEMDEM levert 140,1 kN.

VRAAGSTUK 5 : Elasticiteitsleer

- a) De cirkel van Mohr kan worden getekend met de gegeven spanningen op de vlakjes AC en BC.



- b) Zie bovenstaande figuur.

c) Spanningstensor in x - y assenstelsel : $\sigma = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$

- d) De hoofdrekken kunnen worden bepaald uit de hoofdspanningen m.b.v.:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1}{200 \times 10^3} \times (16 - 0,25 \times (-4)) = \frac{17}{200 \times 10^3} = 8,5 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = \frac{1}{200 \times 10^3} \times (-4 - 0,25 \times (16)) = \frac{-8}{200 \times 10^3} = -4,0 \times 10^{-5}$$

De hoofdrekrichting valt voor een homogeen isotroop materiaal samen met de hoofdspanningsrichting (1) en (2) zoals in de figuur is aangegeven.