

BEKNOPTE ANTWOORDEN

(geen modeluitwerking !)

OPGAVE 1

De algemene oplossing van de 4^e orde DV voor buigingsknik is:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI} \quad \text{en } S_z = -F \times C_2$$

De vier randvoorwaarden voor dit probleem zijn (geef schetsjes):

$$w(0) = 0$$

$$M(0) = M_{veer} = r \cdot \varphi(0) = -r \cdot w'(0)$$

$$M(a) = 0$$

$$S_z(a) = -F_{veer} = -k \cdot w(a)$$

Uitwerken van deze vergelijkingen levert:

$$1) \quad C_1 + C_3 = 0$$

$$2) \quad FC_3 = -r(C_2 + C_4 \alpha)$$

$$3) \quad FC_3 \cos(\alpha a) + C_4 \sin(\alpha a) = 0$$

$$4) \quad -FC_2 + kC_1 + kC_2 a + kC_3 \cos(\alpha a) + kC_4 \sin(\alpha a) = 0$$

De kniklast kan worden gevonden door het nul stellen van de determinant van dit stelsel. Alleen dan kan een niet-triviale oplossing worden gevonden voor dit knikprobleem. Uitwerken werd verder niet gevraagd.

De stijfste constructie treedt op indien beide veren oneindig stijf zijn. Dit levert een maximale kniklast op van:

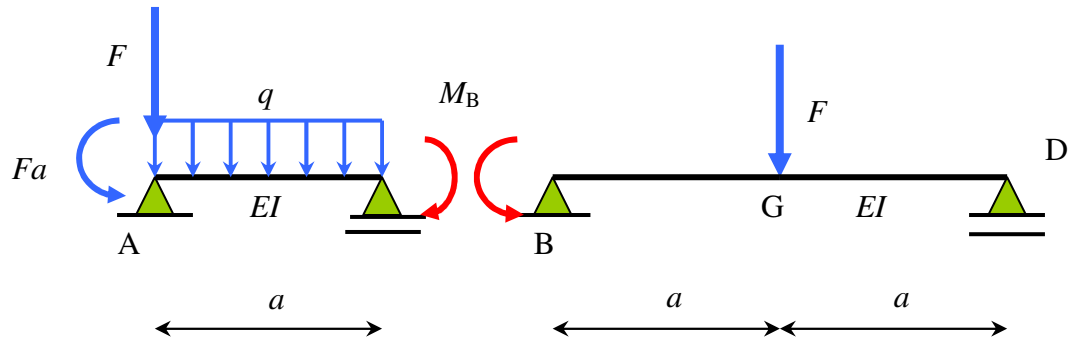
$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2} = \frac{2\pi^2 EI}{a^2}$$

Het minst stijve geval treedt op voor $k = 0$. Dan ontstaat het bekende basisgeval:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r/a} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4a^2}}$$

OPGAVE 2

- a) De constructie is enkelvoudig statisch onbepaald en het betreft een constructie met niet-verplaatsbare knopen. Als statisch onbepaald wordt gekozen voor het overgangsmoment in B. De belasting op het overstek wordt statisch equivalent verplaatst naar knoop A. Schets is hier in de uitwerking niet gegeven maar is wel vereist.
- b) Het schema ziet er als volgt uit:



Vormveranderingsvoorwaarde:

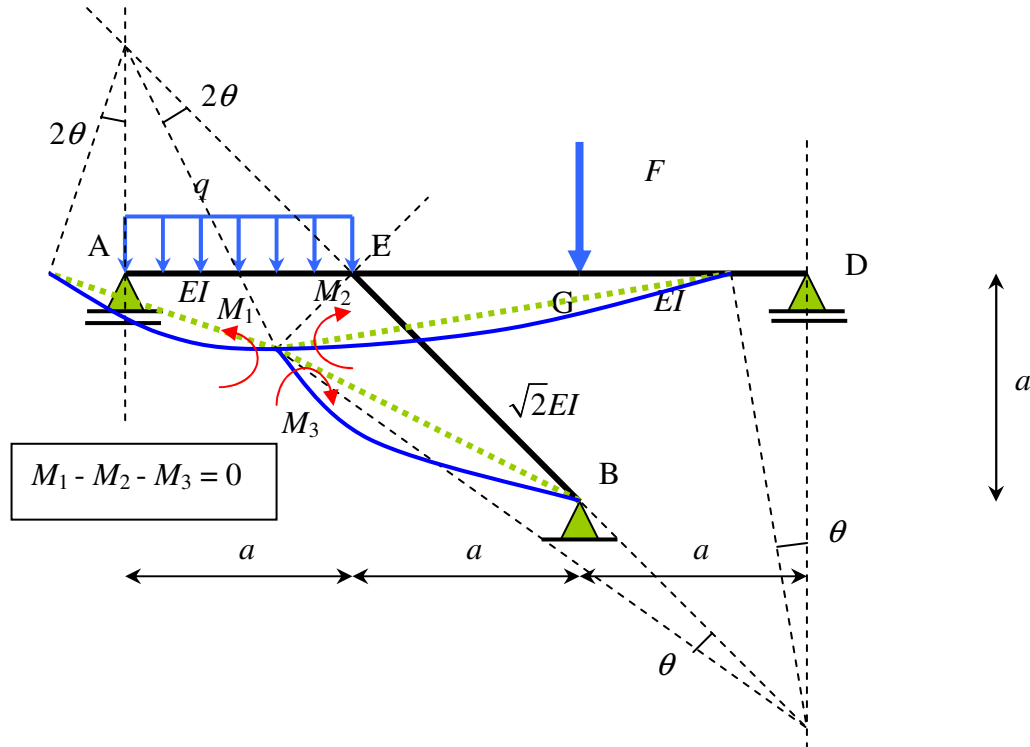
$$\begin{aligned}\varphi_B^{AB} &= \varphi_B^{BD} \\ -\frac{Fa \cdot a}{6EI} + \frac{qa^3}{24EI} - \frac{M_B a}{3EI} &= \frac{M_B 2a}{3EI} - \frac{F(2a)^2}{16EI} \\ M_B &= \frac{a(2F + qa)}{24} = 68 \text{ kNm}\end{aligned}$$

- c) Momentenlijn en dwarskrachtenlijn moeten 100% zijn. Let op het parabolische deel en de knik in de M -lijn onder de puntlast. Overstekje niet vergeten!
- d) Zakking mag worden bepaald m.b.v. de gegeven *vergeet-mij-nietjes*:

$$w = \frac{F(2a)^3}{48EI} - \frac{M_B(2a)^2}{16EI} = 0,0816 \text{ m}$$

OPGAVE 3

- a) De verplaatste constructie is hieronder geschetst. De constructie is een constructie met verplaatsbare knopen. Dit is eenvoudig in te zien door alle starre verbindingen te vervangen door scharnieren. Er ontstaat dan een kinematisch onbepaald vakwerk (mechanisme). De blauwe lijn in de onderstaande figuur is de vervormde constructie.



- b) Van de drie momenten op knoop E zijn er twee fundamenteel onbekend, de derde is te bepalen uit het knoopenevenwicht. Daarnaast is de horizontale verplaatsing van de bovenregel een onbekende. Dit is de enige vrijheidsgraad in het mechanisme dat ontstaat als alle starre verbindingen worden vervangen door scharnieren. Uiteraard kan deze vrijheidsgraad ook worden beschreven m.b.v. een rotatie van een van de staven. In de bovenstaande figuur is het hier beschreven geheel weergegeven. De drie onbekenden kunnen worden bepaald m.b.v. twee vormveranderingsvoorwaarde en de eis dat het mechanisme samen met de onbekende overgangsmomenten en belasting een evenwichtssysteem moeten vormen. Voor deze eis gebruiken we het gereedschap van de virtuele arbeid. Reductie van het aantal onbekende momenten m.b.v. het knoopenevenwicht is niet nodig als het stelsel met de GR wordt opgelost. In dat geval kan direct het totaal worden ingevoerd en worden opgelost.
- c) De vergelijkingen die moeten worden opgelost zijn:

$$\begin{aligned} \varphi_E^{AE} = \varphi_E^{EB} \quad & \frac{M_1 a}{3EI} + \frac{q a^3}{24EI} - 2\theta = \frac{-M_3 a \sqrt{2}}{3EI \sqrt{2}} + 2\theta \\ \varphi_E^{AE} = \varphi_E^{ED} \quad & \frac{M_1 a}{3EI} + \frac{q a^3}{24EI} - 2\theta = \frac{-M_2 2a}{3EI} - \frac{F(2a)^2}{16EI} + \theta \\ \Sigma T^E = 0 \quad & M_1 - M_2 - M_3 = 0 \\ \delta A = 0 \quad & -M_1 \cdot 2\delta\theta + q a \cdot 2\delta\theta \cdot \frac{1}{2} a - M_2 \cdot \delta\theta + F \cdot \delta\theta \cdot a - M_3 \cdot 2\delta\theta = 0 \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen kunnen worden opgeschoond en als stelsel in de GR worden ingevoerd. Reductie zoals met de hand gebruikelijk is, is dan niet nodig.

- d) De vormveranderingsvergelijkingen kunnen worden vermenigvuldigd met $\frac{24EI}{a}$:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & -\frac{96EI}{a} \\ 8 & 16 & 0 & -\frac{72EI}{a} \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qa^2 \\ -qa^2 - 6Fa \\ qa^2 + Fa \\ 0 \end{bmatrix}$$

Invullen levert:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & -240 \times 10^3 \\ 8 & 16 & 0 & -180 \times 10^3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -816 \\ -816 - 2448 \\ 816 + 408 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oplossen met de GR levert (zie website voor handleidingen):

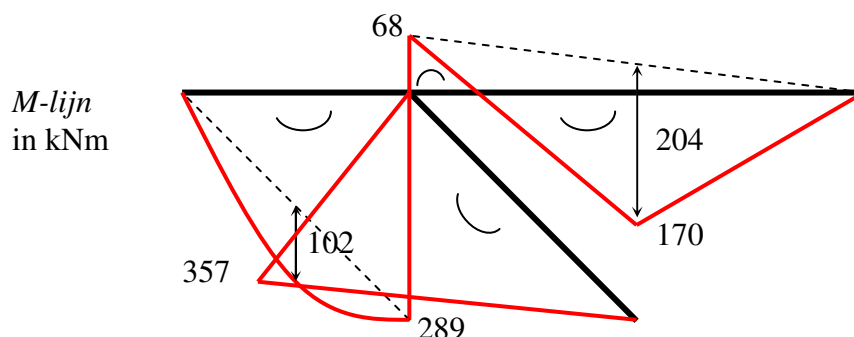
$$M_1 = 289 \text{ kNm}; \quad M_2 = -68 \text{ kNm}; \quad M_3 = 357 \text{ kNm}; \quad \theta = \frac{187}{7500} = 0,024933;$$

De aangenomen richting van het moment M_2 blijkt onjuist te zijn geweest.

Opmerking:

De route die in het boek wordt uitgelegd is om eerst het knoopenevenwicht te verwerken waardoor er twee onbekende momenten resteren en een rotatie. Vervolgens wordt de rotatie geëlimineerd uit de twee vormveranderingsvergelijkingen en het resultaat wordt gecombineerd met de uitkomst van de virtuele arbeidsvergelijking. Op deze manier resteert een systeem van twee vergelijkingen met twee onbekenden waaruit de momenten kunnen worden opgelost. Zonder reductie maar met gebruik van de GR lijkt het alsof er vier vergelijkingen met vier onbekenden moeten worden opgelost en dat zou kunnen suggereren dat dit een hele ingewikkelde som is maar het tegendeel is het geval!

- e) Momentenlijn mag geen probleem opleveren. Let op het parabolische deel, de knik onder de puntlast en de juiste vervormingstekens.



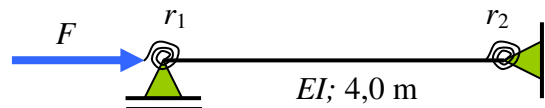
- f) De verplaatsing van de knopen kan worden gevonden m.b.v. de opgeloste vrijheidsgraad θ . Knoop E zal naar links en naar beneden verplaatsen over een afstand van a . $\theta = 0,19467$ m.

OPGAVE 4

- a) De constructie bestaat uit een ongeschoorde drukstaaf met rotatieveren aan boven en onderzijde. De kniklengte zal meer dan 4,0 meter bedragen. (ongeschoord volledig ingeklemd basisgeval 4,0 m, door veren minder stijf, lagere kniklast en daarmee grotere kniklengte)

Schets is noodzakelijk, hier niet gegeven.

- b) De rotatieveren zijn te bepalen met de standaard *vergeet-mij-nietjes*. Dit levert het volgende model op.



De veerstijfheden zijn:

$$r_1 = \frac{3 \cdot 2EI}{4} \Rightarrow \rho_1 = \frac{r_1 \cdot 4}{EI} = 6 \Rightarrow \eta_1 = 4 + \frac{10}{6} = \frac{17}{3}$$

$$r_2 = \frac{3 \cdot 3EI}{3} + \frac{4 \cdot 4EI}{3} \Rightarrow \rho_2 = \frac{r_2 \cdot 4}{EI} = \frac{100}{3} \Rightarrow \eta_2 = 4 + \frac{10}{33,33} = \frac{43}{10}$$

De kniklast wordt hiermee:

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{4^2} = 421,5 \text{ kN}$$

- c) De kniklengte kan m.b.v. de formule van Euler worden bepaald:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \Leftrightarrow l_k = 4,84 \text{ m}$$

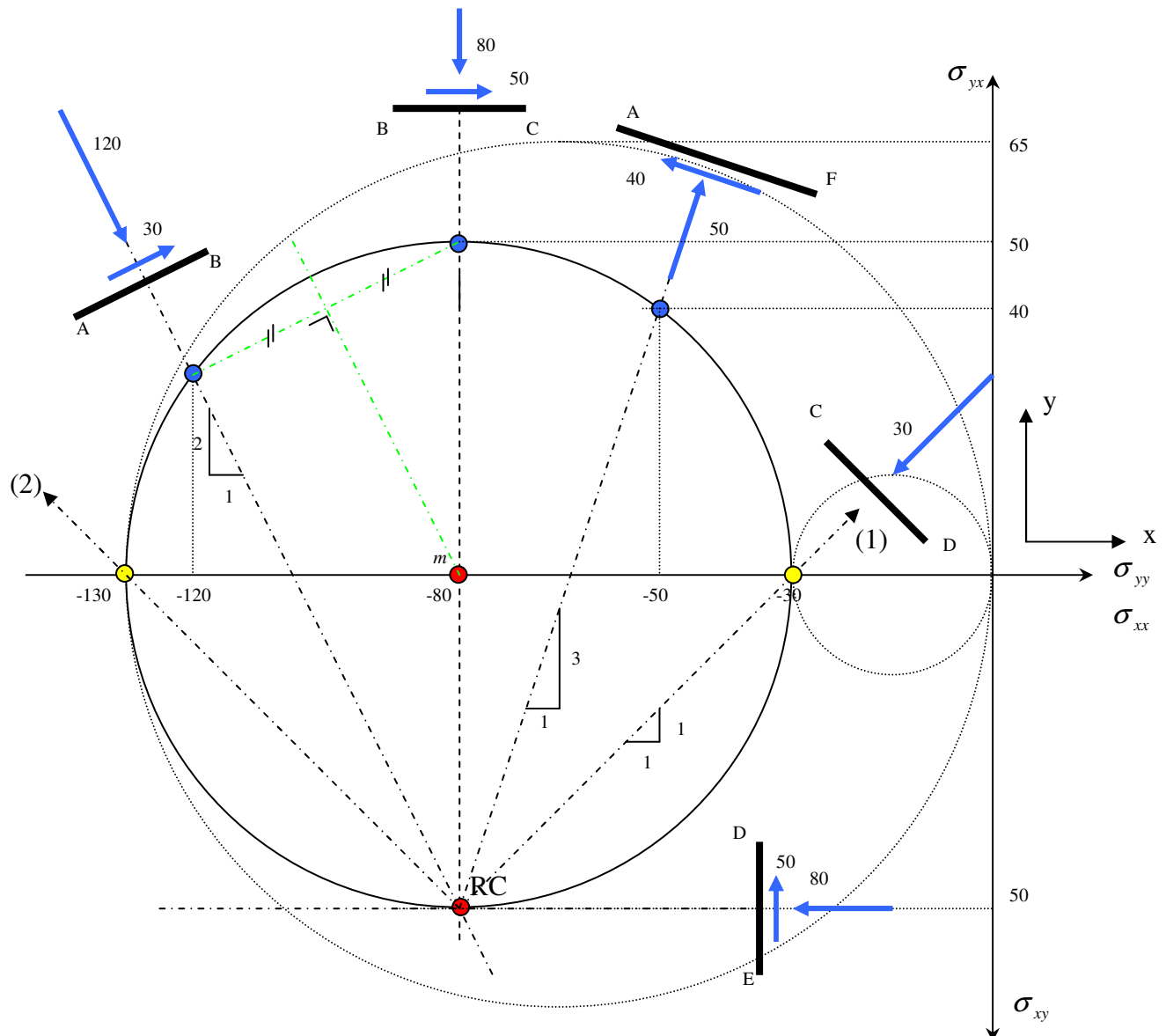
- d) Bij de gegeven belasting van 100 kN kan de vergrotingsfactor worden bepaald:

$$\frac{n}{n-1} = \frac{\frac{F_k}{F}}{\frac{F_k}{F} - 1} = \frac{4,2}{4,2 - 1} = 1,31$$

Deze constructie is erg gevoelig voor 2^e orde effecten. Een initiële scheefstand zal met 31% aangroeien hetgeen in de praktijk niet acceptabel is.

OPGAVE 5

De cirkel van Mohr met daarop de spanningen op de diverse vlakken is hieronder weergegeven.



- a) De spanningen op alle gevraagde vlakjes zijn in de cirkel weergegeven. De hoofdrichtingen (1) en (2) zijn tevens aangegeven. De hoofdspanningen zijn -30 en -130 N/mm².

- b) Vezels evenwijdig aan CD zijn vezels die evenwijdig zijn aan de hoofdrichting (2). De hoofdreken kunnen direct met de spannings-rek formules worden berekend :

$$\varepsilon^{\text{CD}} = \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} = \frac{-130 - (0,50 \times -30)}{115000} = -10,0 \times 10^{-4}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} = 3,0 \times 10^{-4}$$

Teken de rekcirkel en lees de rek voor vezels evenwijdig aan ED af :

$$\mathcal{E}^{\text{ED}} = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = -3,5 \times 10^{-4} \quad (\text{R.C. zelfde locatie als in spanningscirkel})$$

- c) Theorie zie dictaat. Hoofdspanningen zijn (0; -30; -130). De veiligheidsmarge volgt uit:

$$\frac{\gamma^2}{6} \left[(0+30)^2 + (-30+130)^2 + (-130-0)^2 \right] \leq \frac{1}{3} \times 125^2 \Rightarrow \gamma = 1,06$$