

Tentamen CT2031

ConstructieMechanica 3

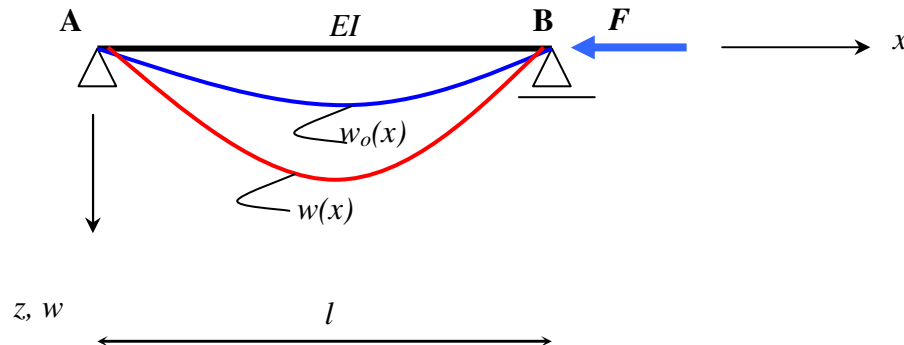
14 april 2010 van 14:00 – 17:00 uur

Als de kandidaat niet voldoet aan de voorwaarden tot deelname wordt het tentamenwerk niet beoordeeld.

- Dit tentamen bestaat uit **5 vraagstukken**.
- Werk elk vraagstuk uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- GSM toestellen en of PDA's al dan niet met UMTS verbinding mogen niet aan staan tijdens het tentamen
- Maak gebruik van de bijgeleverde formulebladen
- Gebruik geen rode pen of rood potlood
- Het gebruik van woordenboeken en (grafische) rekenmachines is toegestaan

VRAAGSTUK 1 : Theorie stabiliteit**(ca 20 min)**

Hieronder is een op druk belaste prismatische staaf weergegeven met buigstijfheid EI die in de onbelaste toestand al een initiële vooruitbuiging $w_o(x)$ heeft. De aangebrachte belasting F is kleiner dan de kniklast.

**GOED EN ZORGVULDIG LEZEN, LET OP DE AANGEGEVEN TIJD !**

- a) Toon aan dat voor deze staaf met lengte l en buigstijfheid EI voor de uitgebogen, belaste staaf geldt:

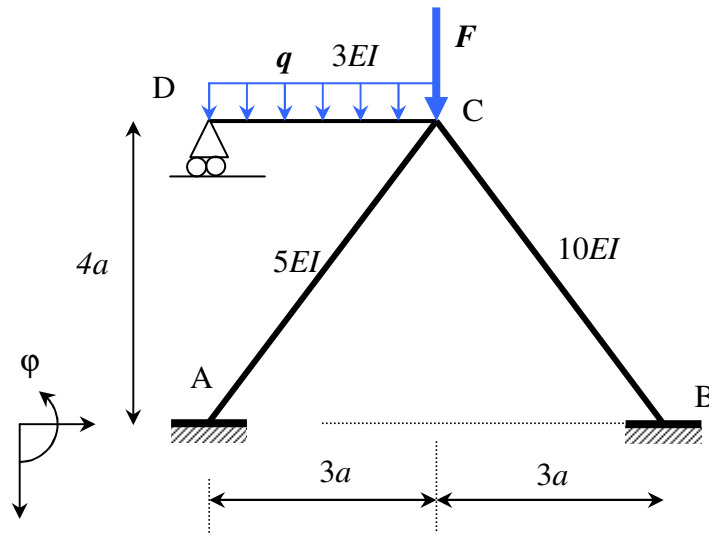
$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + F \frac{d^2 w}{dx^2} = EI \frac{d^4 w_o}{dx^4}$$

Noot : U mag daarbij uitgaan van het bekende gereedschap op het formuleblad, m.a.w. de differentiaalvergelijking voor buigingsknik hoeft niet te worden afgeleid!

- b) Leg uit of het hier een knikprobleem betreft of niet ?

VRAAGSTUK 2 : Statisch onbepaalde constructies**(ca 45 min)**

De hieronder weergegeven constructie wordt belast met een puntlast en een gelijkmatig verdeelde belasting. Van de onderstaande constructie wordt gevraagd de krachtsverdeling te bepalen m.b.v. hoekveranderingsvergelijkingen.



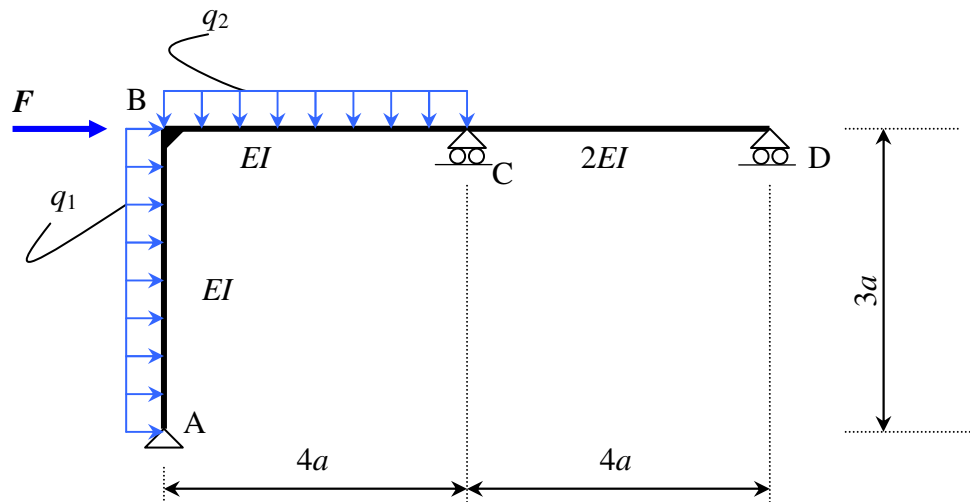
Gegeven : $EI = 10000 \text{ kNm}^2$ $a = 2,0 \text{ m}$ $F = 40 \text{ kN}$, $q = 10 \text{ kN/m}$

Vragen:

- Schets de vervormde constructie en geef aan hoeveel voudig statisch onbepaald deze constructie is. Bepaal een statisch bepaald hoofdsysteem en geef uw statisch onbepaalden aan in een schets waardoor duidelijk wordt wat de door U gekozen positieve richtingen zijn van de statisch onbepaalden.
- Stel de vormveranderingsvoorwaarde(n) op en bepaal de statisch onbepaalde(n).
- Teken de M -lijn voor de gehele constructie, zet de waarden er bij en geef de vervormingstekens aan.

VRAAGSTUK 3 : Statisch onbepaalde constructies**(ca 30 min)**

De onderstaande geknikte constructie wordt zowel horizontaal als verticaal belast. De vervorming door normaalkracht wordt verwaarloosd. De afmetingen en de belastingen zijn in de figuur aangegeven.



Gegevens : $a=1,5$ m; $F=50$ kN; $q_1=64,0$ kN/m; $q_2=45,0$ kN/m; $EI=100000$ kNm²

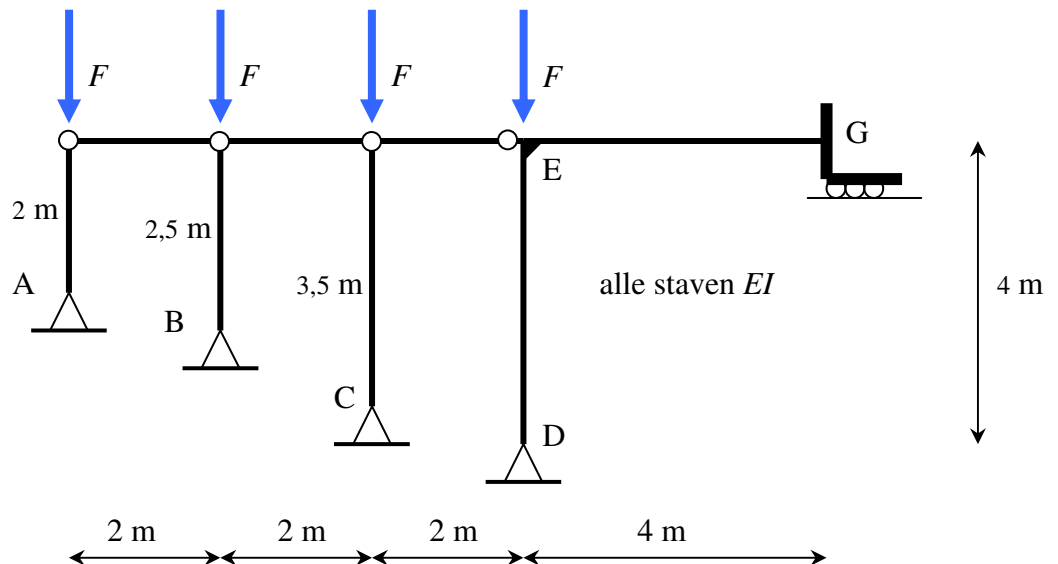
Vragen :

- Betreft het hier een geschoorde of een ongeschoorde constructie?
- Geef de onbekenden aan en bereken de krachtsverdeling in de constructie. Geef duidelijk aan wat de door U gekozen positieve richtingen zijn van de onbekenden, een duidelijke schets is noodzakelijk!
- Teken voor de gehele constructie de M -lijn inclusief vervormingstekens en relevante waarden.
- Bepaal de horizontale verplaatsing van B.

VRAAGSTUK 4 : Stabiliteit**(ca 40 min)**

Van de onderstaande constructie wordt gevraagd een stabiliteitsonderzoek te verrichten. De lengten van de pendelkolommen zijn in de figuur aangegeven. Alle staven hebben dezelfde buigstijfheid EI . De invloed van de normaalkrachtvervorming en de invloed van de dwarskrachten op het evenwicht in de vervormde stand, mogen worden verwaarloosd.

Let goed op de aangegeven locaties van de scharnieren!



Gegevens : $EI = 1000 \text{ kNm}^2$;

Vragen:

- Is de constructie geschoord of ongeschoord ?
- Teken de mogelijke knikvorm(en)
- Bepaal van de gegeven constructie de maatgevende belasting F op basis van een stabiliteitsonderzoek.

VRAAGSTUK 5 : Elasticiteitstheorie**(ca 45 min)**

Van een plaat ABCD met constante dikte t is gegeven dat deze is onderworpen aan een homogene vlakspanningstoestand. De afmetingen zijn in de onderstaande figuur gegeven. Het materiaal is homogeen en isotroop:

$$E = 150 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$$

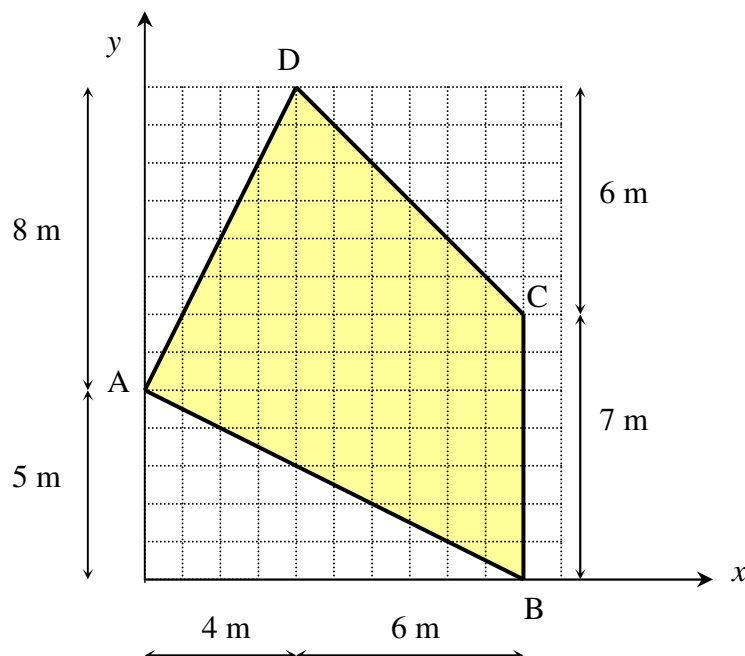
$$\nu = 0,5$$

$$f_y = 235 \text{ N/mm}^2$$

Van de plaat zijn de verplaatsingen in x - en y -richting voor ieder punt beschreven met de onderstaande functies:

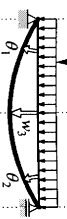
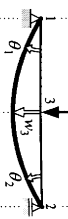
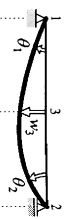
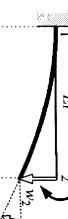
$$u_x = 2 \times 10^{-4} - 7 \times 10^{-4} x - 4 \times 10^{-4} y$$

$$u_y = -2 \times 10^{-4} x + 1 \times 10^{-4} y$$

**Vragen:**

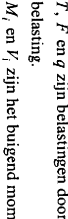
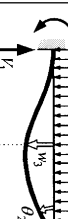
- Wat is een homogene vlakspanningstoestand?
- Bepaal de rektensor in het x - y -assenstelsel.
- Teken de cirkel van Mohr voor de rekken en zet daarin de relevante waarden en geef duidelijk het richtingencentrum aan. Geef tevens de hoofdrekken en hoofdrichtingen weer. Kies als schaal $1\text{cm} \hat{=} 1,0 \times 10^{-4}$
- Bepaal voor vezels evenwijdig aan AB de rek.
- Teken de spanningscirkel van Mohr en laat goed zien hoe u aan de karakteristieke punten van de cirkel komt! Kies als schaal $1\text{cm} \hat{=} 10 \text{ N/mm}^2$.
- Bepaal voor het vlakje AD en AB de normaal- en schuifspanning en teken in een figuur deze spanningen op het vlakje zoals ze in werkelijkheid werken.
- Bepaal de veiligheid m.b.t. bezwijken volgens het criterium van von Mises.

FORMULEBLAD

 $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T \ell^2}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T \ell^2}{EI}; \quad w_3 = 0$	 $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q \ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q \ell^4}{EI}$	 $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F \ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{F \ell^3}{EI}$	 $\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T \ell^2}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T \ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{T \ell^3}{EI}$	 $\theta_2 = \frac{q \ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q \ell^4}{8EI}$	 $\theta_2 = \frac{F \ell^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{F \ell^3}{3EI}$	 $\theta_2 = \frac{T \ell^2}{EI}; \quad w_2 = \frac{T \ell^3}{2EI}$
--	---	--	--	---	---	--

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

vergeet-mij-nietjes

 $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T \ell^2}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T \ell^2}{EI}; \quad w_3 = 0$	 $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q \ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q \ell^4}{EI}$	 $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F \ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{F \ell^3}{EI}$	 $\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T \ell^2}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T \ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{T \ell^3}{EI}$	 $\theta_2 = \frac{q \ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q \ell^4}{8EI}$	 $\theta_2 = \frac{F \ell^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{F \ell^3}{3EI}$	 $\theta_2 = \frac{T \ell^2}{EI}; \quad w_2 = \frac{T \ell^3}{2EI}$
--	---	--	--	---	---	--

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Spanningen en rekken :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{array} \right\} \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} \end{array} \right. \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \text{ voor } i, j = x, y$$

von Mises : $\frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \leq \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_k = l \sqrt{4 + \frac{10}{\rho}}$$

met: $\rho = \frac{rl}{EI}$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

Of:

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\text{en } S_z(x) = M' - Fw'$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3 \alpha \sin \alpha x - C_4 \alpha \cos \alpha x$$

$$M(x) = EI \times [C_3 \alpha^2 \cos \alpha x + C_4 \alpha^2 \sin \alpha x]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

Ongeschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 \eta_2 (\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met: } \begin{aligned} \eta_1 &= 4 + \frac{10}{\rho_1}; \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 &= 4 + \frac{10}{\rho_2}; \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{aligned}$$

Geschoorde aan twee zijden verend ingeklemde knikstaaf:

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met: } \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

“Vrije” kromming t.g.v lineair temperatuursverloop over de hoogte h van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$