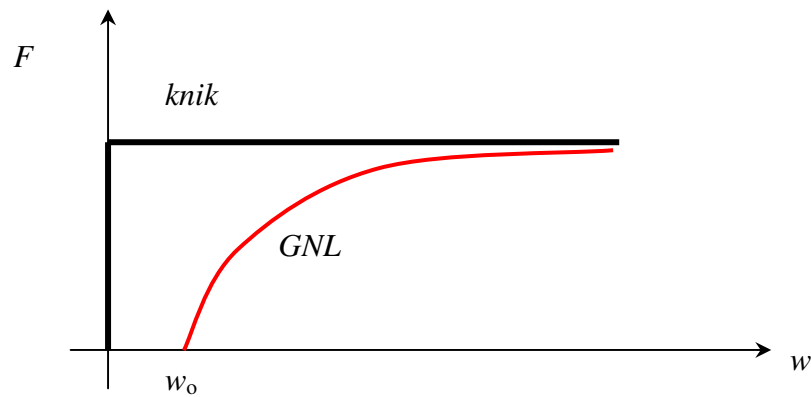


ANTWOORDEN

(uitgebreide versie)

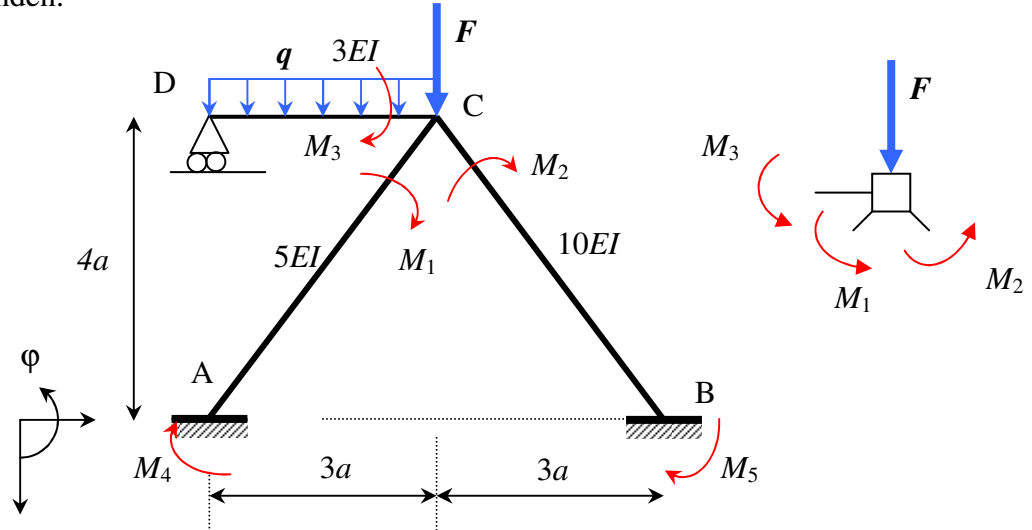
OPGAVE 1

- a) Zie dictaat, paragraaf 11.1. Niet rommelend naar het eindantwoord rekenen maar de essentie aangeven en dat is uiteraard de constitutieve vergelijking voor het moment.
- b) Het betreft hier geen knikprobleem. De DV is te allen tijde op te lossen en alle integratieconstanten zijn te bepalen. Het betreft hier een 2^e orde probleem ook wel een GNL-probleem (Geometrisch Niet-Linear) genoemd.



OPGAVE 2

- a) De constructie is vier-voudig statisch onbepaald. Een statisch bepaald hoofdsysteem telt daarom 4 statisch onbepaalden. Doordat dit probleem een constructie met niet-verplaatsbare knopen betreft zijn op voorhand de momenten in A en B snel uit te drukken in de momenten in de staafaansluiting in C. Uiteindelijk resteert zo een stelsel met twee onbekenden.



De vijf aangegeven momenten zoals deze werken op de staafuiteinden levert één onbekende teveel op. Uiteraard moeten deze momenten op de knoop momentenevenwicht leveren dus in C zijn slechts twee momenten echt onbekend (zie ook collegevoorbeeld):

$$M_3 = -M_1 - M_2$$

De vier vormveranderingsvoorwaarden zijn:

$$\varphi_A = 0 \Rightarrow M_4 = \frac{1}{2} M_1$$

$$\varphi_B = 0 \Rightarrow M_5 = \frac{1}{2} M_2$$

$$\varphi_C^{DC} = \varphi_C^{AC}$$

$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{BC}$$

(een snelle aanpak op basis van de opgedane kennis bij de MatixFrame opdracht)

- b) Alleen de laatste twee vormveranderingsvoorwaarden hoeven verder uitgewerkt te worden waarbij de bovenstaande drie uitdrukkingen voor M_3 , M_4 en M_5 direct worden verwerkt:

$$\varphi_C^{DC} = \varphi_C^{AC} \quad -\frac{(-M_1 - M_2)3a}{3 \cdot 3EI} + \frac{q(3a)^3}{24 \cdot 3EI} = \frac{\frac{1}{2} M_1 5a}{6 \cdot 5EI} - \frac{M_1 5a}{3 \cdot 5EI} \quad (1)$$

$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{BC} \quad \frac{\frac{1}{2} M_1 5a}{6 \cdot 5EI} - \frac{M_1 5a}{3 \cdot 5EI} = \frac{\frac{1}{2} M_2 5a}{6 \cdot 10EI} - \frac{M_2 5a}{3 \cdot 10EI} \quad (2)$$

Opschonen van de vergelijkingen levert: (mag ook met de grafische rekenmachine!)

$$\begin{aligned} 7M_1 + 4M_2 &= -\frac{9qa^2}{2} \\ 2M_1 - M_2 &= 0 \Rightarrow M_2 = 2M_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} M_1 &= \frac{-3qa^2}{10} = -12 \text{ kNm} \\ M_2 &= \frac{-3qa^2}{5} = -24 \text{ kNm} \end{aligned}$$

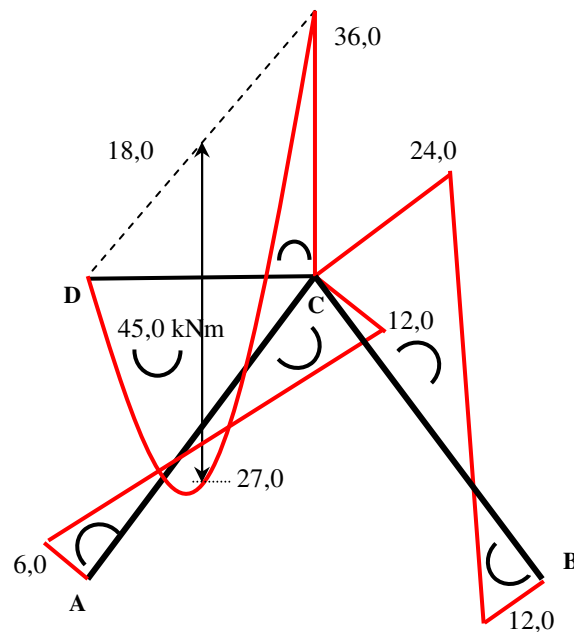
Tot slot kunnen de overige drie momenten worden gevonden met de eerder opgestelde betrekkingen:

$$M_3 = -M_1 - M_2 = 36 \text{ kNm}$$

$$M_4 = \frac{1}{2} M_1 = -12 \text{ kNm}$$

$$M_5 = \frac{1}{2} M_2 = -6 \text{ kNm}$$

- c) Met deze uitkomsten kan de M -lijn worden geconstrueerd. Let goed op bij het interpreteren van de tekens van de koppels op de staafuiteinden bij het tekenen van de momentenlijn. Hier gaat het uiteraard om bij deze vraag !



M -lijn in kNm (niet op schaal)

Opmerking:

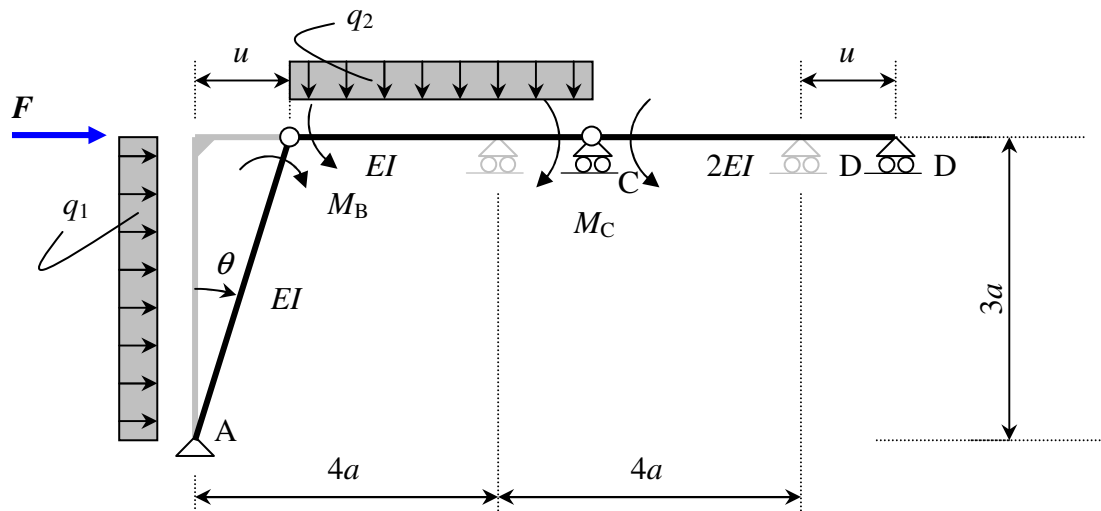
Uiteraard was het niet de bedoeling om een stelsel van vijf vergelijkingen met vijf onbekenden op te lossen. Belangrijk leerdoel was om in te zien dat met alle opgedane kennis uit de MatrixFrame opdracht en de COZ, dit probleem heel snel was te reduceren tot twee vergelijkingen met twee onbekenden.

OPGAVE 3

- a) Vanwege de rol-opleggingen in C en D zal de constructie horizontaal kunnen gaan verplaatsen. Dit houdt in dat de knopen niet op hun plaats blijven en dat we spreken van een constructie met verplaatsbare knopen. De oplossingsstrategie voor dit probleem luidt:

Breng in alle knopen waar nog geen scharnieren zitten scharnieren aan en neem de staafmomenten als onbekenden. Er ontstaat in dit geval een mechanisme (verplaatsbare knopen). De verplaatsing van dit mechanisme kan worden beschreven met één parameter, de hoekverdraaiing θ . De onbekenden zijn nu : M_B , M_C en θ .

Het mechanisme en de onbekende momenten zijn in de onderstaande figuur weergegeven.



- b) In de hoekveranderingsvergelijkingen dient naast de buigvervorming uit de vergeet-mij-nietjes ook de rotatie van het mechanisme (beschreven met θ) worden meegenomen.

$$\begin{aligned}\varphi_B^{AB} &= \varphi_B^{BC} \\ \frac{q_1 (3a)^3}{24EI} - \frac{M_B 3a}{3EI} - \theta &= \frac{M_B 4a}{3EI} + \frac{M_C 4a}{6EI} - \frac{q_2 (4a)^3}{24EI} \\ \varphi_C^{BC} &= \varphi_C^{CD} \\ -\frac{M_B 4a}{6EI} - \frac{M_C 4a}{3EI} + \frac{q_2 (4a)^3}{24EI} &= \frac{M_C 4a}{3 \times 2EI}\end{aligned}$$

Naast de beide hoekveranderingsvergelijkingen is er een derde vergelijking nodig. Hiervoor kan gebruik gemaakt worden van de virtuele arbeidsvergelijking. De eis dat het mechanisme juist in evenwicht moet zijn komt overeen met de eis dat de som van de virtuele arbeid nul moet zijn:

$$\begin{aligned}\delta A &= 0 \quad M_B \times \delta\theta + q_1 \times 3a \times \frac{3}{2}a \times \delta\theta + F \times 3a \times \delta\theta = 0 \\ M_B &= -873 \text{ kNm}\end{aligned}$$

De puntlast F levert hier wel een duidelijke bijdrage terwijl q_2 geen bijdrage levert aan de virtuele arbeidsvergelijking. Doordat de andere staven niet verdraaien levert ook M_C geen bijdrage aan de virtuele arbeid en is het moment M_B direct te bepalen.

Met de beide hoekveranderingsvergelijkingen zijn de overige onbekenden te bepalen, verder uitwerken levert:

$$3,5M_B + M_C + \theta \times EI = 648$$

$$M_B + 3M_C = 405 \quad \text{met : } M_B = -873 \text{ kNm}$$

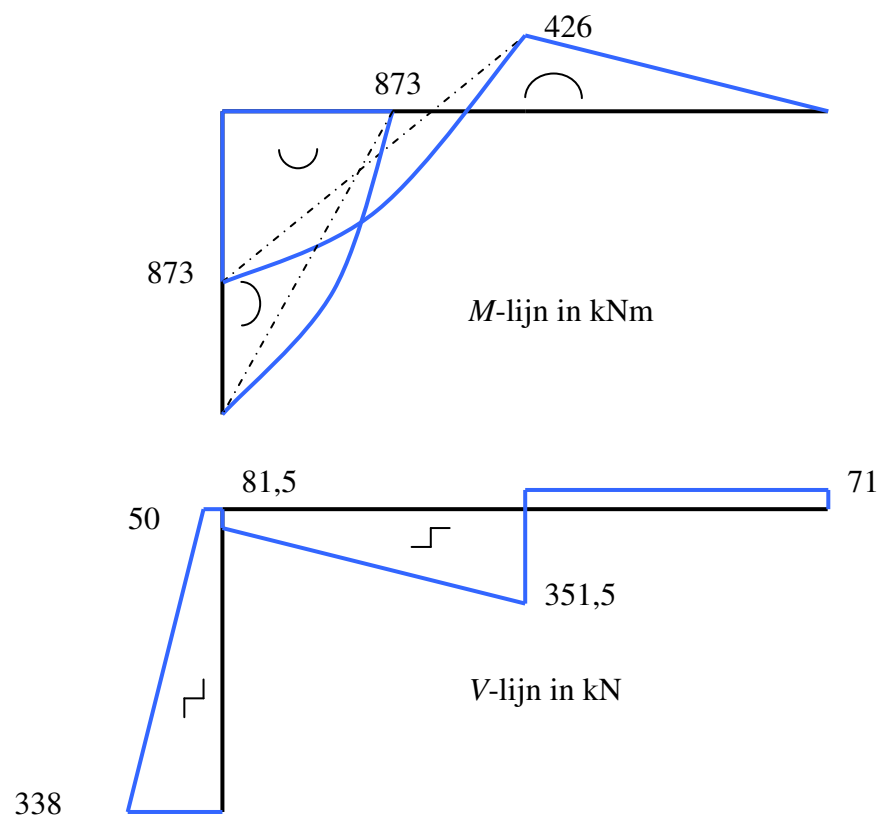
Hieruit volgt:

$$M_C = (405 + 873)/3 = 426 \text{ kNm}$$

$$\theta = \frac{648 + 3,5 \times 873 - 426}{EI} = \frac{3277,5}{EI}$$

De aangenomen richting van het moment in B was kennelijk onjuist.

c) De krachtsverdeling is nu bepaald, de M - en V -lijn zijn hieronder weergegeven.



De oplegreacties volgen uit:

$$A_V = 81,5 \text{ kN} \quad \downarrow$$

$$A_H = 338,0 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

$$C_V = 422,5 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$D_V = 71,0 \text{ kN} \quad \downarrow$$

Merk op:

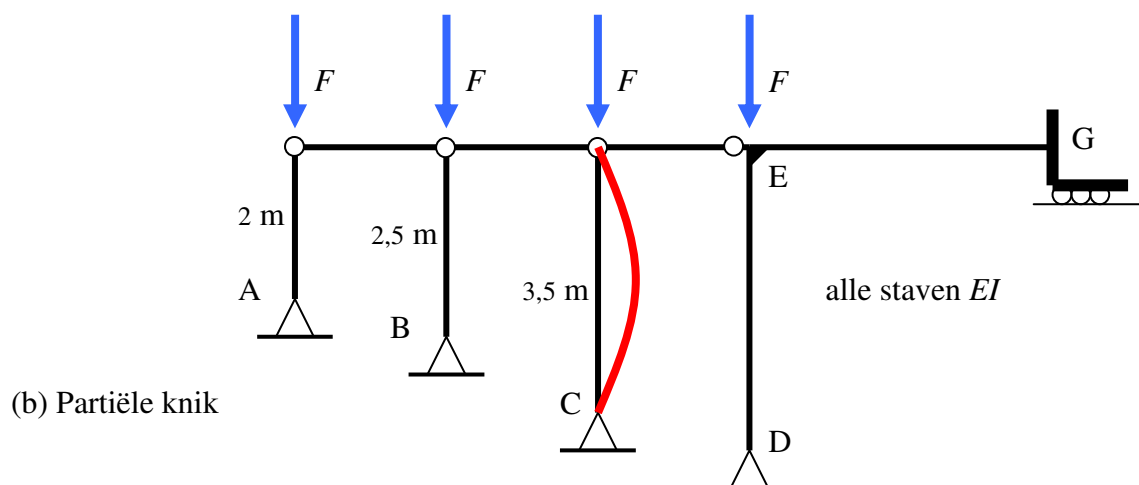
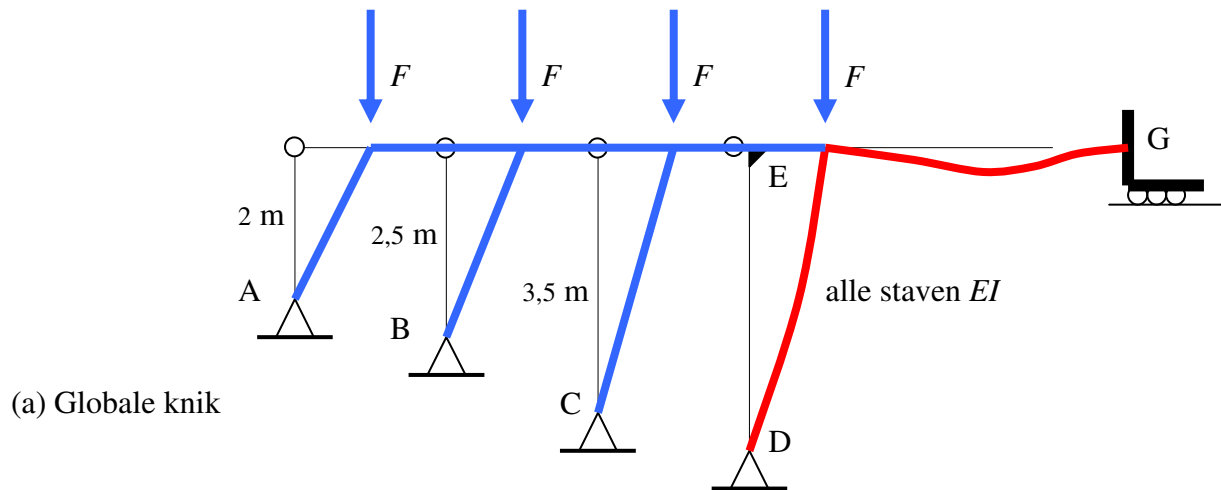
Omwille van de hoeveelheid werk werden de V -lijn en de oplegreacties niet gevraagd.

d) De horizontale verplaatsing van B wordt bepaald met:

$$u_B = \theta \times 3a = \frac{3277,5 \times 3 \times 1,5}{100000} = 0,147 \text{ m}$$

OPGAVE 4

- a) De constructie is ongeschoord. Het deel DEG is het schorende gedeelte. Op dit deel grijpt in E de belasting F_{tot} aan (inclusief de aanpendelende belasting vanuit de pendelstaven).
- b) Een schets is noodzakelijk. De “overall” knikvorm is die waarbij het schorende element DEG op knik bezwijkt. De regel is daarin het verende element, de stijl is het op knik belaste onderdeel. De totale belasting inclusief de aanpendelende belasting op dit deel leidt dan tot knik. De pendelstaven blijven allen recht.



Mogelijk kunnen ook de afzonderlijke pendelstaven nog uitknikken. Een afchatting hiervoor kan snel met Euler worden gevonden. De langste pendelstaaf is in dit geval maatgevend voor partiële knik. Het schorende element knikt dan niet uit en blijft dus op zijn plek zoals is aangegeven in figuur (b).

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{3,5^2} = \frac{\pi^2 1000}{12,25} = 805 \text{ kN}$$

- c) De schorende constructie (in figuur (a) in rood aangegeven) kan worden geschematiseerd met een rotatieveer aan de onderzijde met veerstijfheid nul en een rotatieveer aan de bovenzijde met een veerstijfheid van de deels ingeklemde regel EG:

$$r_1 = \frac{4EI}{4} = EI \Rightarrow \rho_1 = 4 \quad \eta_1 = 4 + \frac{10}{4} = 6\frac{1}{2}$$

$$r_2 = 0 \Rightarrow \rho_2 = 0 \quad \eta_2 = 4 + \frac{10}{0} = \infty$$

De totale belasting op het schorende element in E wordt nu (zie hfst 3 en 8) :

$$F_{\text{tot}} = \left(\frac{4}{2} + \frac{4}{2,5} + \frac{4}{3,5} + 1 \right) F$$

Deze totale belasting moet kleiner zijn dan de kniklast die volgt uit de eta-formule waarbij netjes moet worden omgesprongen met het feit dat één van de eta's naar oneindig gaat:

$$F_k = \frac{1}{\eta_1} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{1}{6,5} \times \frac{\pi^2 1000}{4,0^2} = 94,9 \text{ kN}$$

Uiteraard had hier ook gekozen mogen worden voor de reciproque uitdrukking:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r_1 / 4,0} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{(2 \times 4,0)^2}} \quad \text{met: } r_1 = \frac{4EI}{4,0} = EI$$

$$F_k = 95,4 \text{ kN}$$

Dit resultaat wijkt een klein beetje af maar dat heeft met de achtergrond van de formules te maken, zie de theorie uit hfst 6.

Voor de globale knikvorm geldt hiermee:

$$F_{\text{tot}} < F_k$$

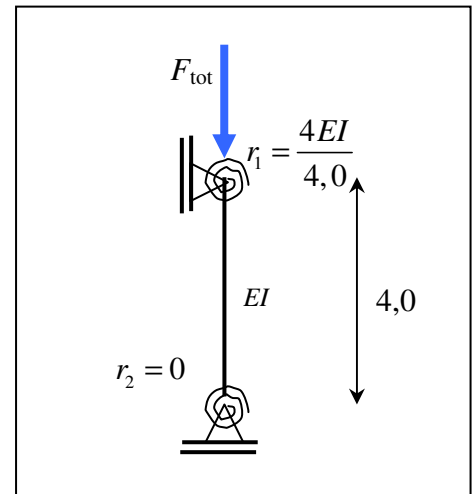
$$\left(\frac{4}{2} + \frac{4}{2,5} + \frac{4}{3,5} + 1 \right) F < 94,9$$

$$F < 16,5 \text{ kN}$$

Partiële knik is daarmee niet maatgevend.

Opmerking

De hier toegepaste verrekening van de aanpendelende belasting is voor buigzame staven niet exact, zie hfst 8. Echter de resultaten benaderen bijzonder goed de exacte oplossing. Toepassen van de verrekening, zoals exact is aangetoond voor starre staven in hfst 3, is dan ook geoorloofd.



equivalent model

Middelpunt m en straal r zijn eenvoudig te bepalen. Daarmee wordt voor de hoofdwwaarden gevonden:

$$\varepsilon_1 = m + r = 2,0 \times 10^{-4}; \quad \varepsilon_2 = m - r = -8,0 \times 10^{-4}$$

- d) De vezelrichting AB wordt vanuit het RC in de cirkel gezet en waar deze lijn de cirkel snijdt lezen we de rekwaarden af:

$$\varepsilon_{xx} = -3,0 \times 10^{-4}; \quad \varepsilon_{yy} = -5,0 \times 10^{-4}$$

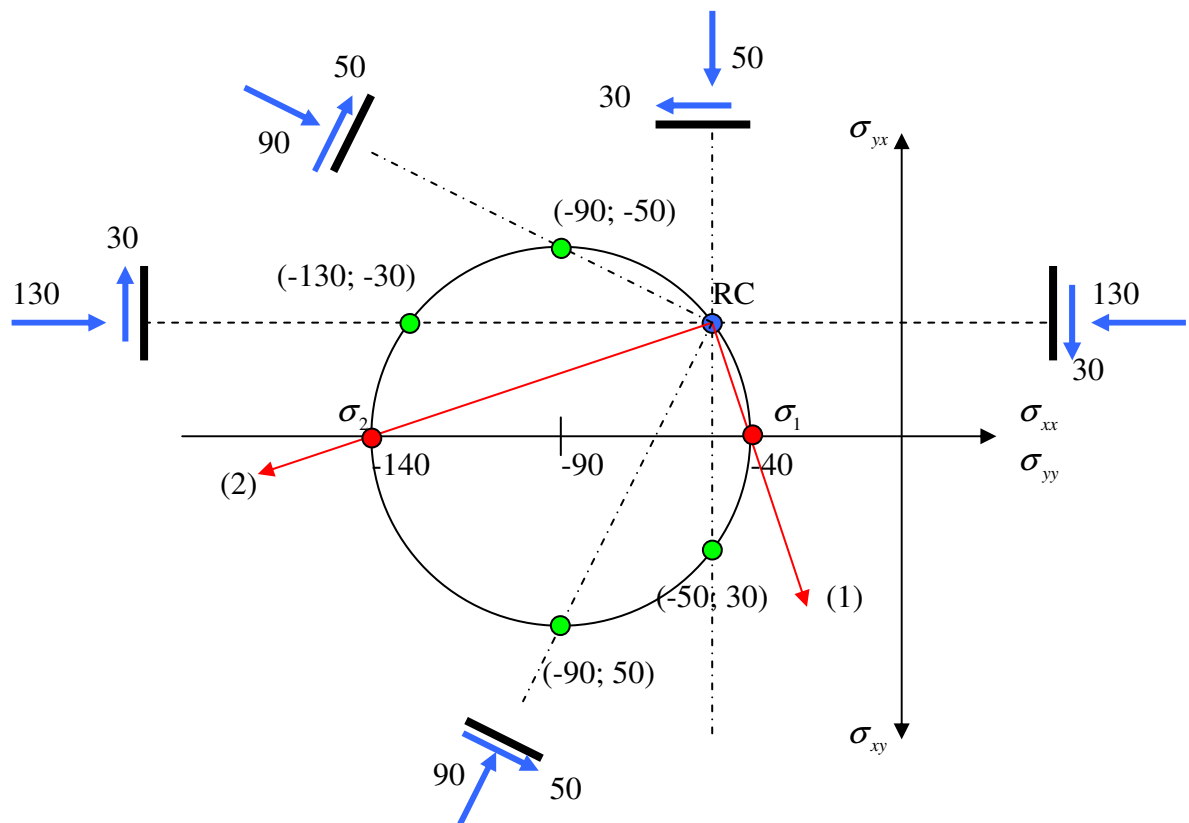
De rek in de richting van de vezel is $-3,0 \times 10^{-4}$. (aflezen op de horizontale as)

- e) De spanningscirkel is snel te vinden door de hoofddrekken te transformeren naar hoofdspanningen en de hoofdrichtingen uit de rekcirkel over te nemen in de spanningscirkel (hoofd-rekrichting is immers hoofd-spanningsrichting). Dit levert:

$$\sigma_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{150 \times 10^3}{0,75} (2,0 + 0,5 \times -8,0) \times 10^{-4} = 200 \times 10^3 \times -2 \times 10^{-4} = -40 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) = \frac{150 \times 10^3}{0,75} (-8,0 + 0,5 \times 2,0) \times 10^{-4} = 200 \times 10^3 \times -7 \times 10^{-4} = -140 \text{ N/mm}^2$$

Hiermee is de rekcirkel te tekenen. De tussen haakjes aangegeven getallenparen zijn allen in een lokaal assenstelsel waarbij de lokale x -as samenvalt met de uitwendige normaal van het oppervlak.



- f) Het von Mises criterium levert een veiligheid (let op het kwadraat van γ) :

$$\frac{\gamma^2}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{1}{3} f_y^2$$

$$\gamma = 1,88$$