

UITWERKING MET ANTWOORDEN

Opgave 1

De momentenlijn t.g.v. alle mogelijke steunpuntszakkingen kunnen worden samengesteld uit de superpositie van twee basisgevallen. Deze twee gevallen zijn:

- zakking van het buitenste steunpunt
- zakking van het op een na buitenste steunpunt

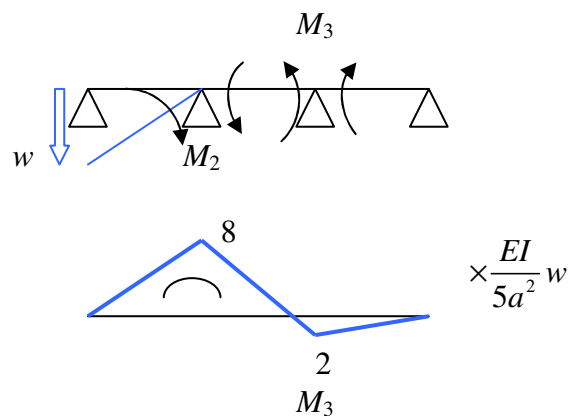
Deze basisgevallen worden eerst afgeleid.

Steunpunt 1 zakt:

$$-\frac{M_2 a}{3EI} + \frac{w}{a} = \frac{M_2 a}{3EI} - \frac{M_3 a}{6EI}$$

$$-\frac{M_2 a}{6EI} + \frac{M_3 a}{3EI} = -\frac{M_3 a}{3EI}$$

oplossen levert: $M_2 = \frac{8EI}{5a^2} w$; $M_3 = \frac{2EI}{5a^2} w$;

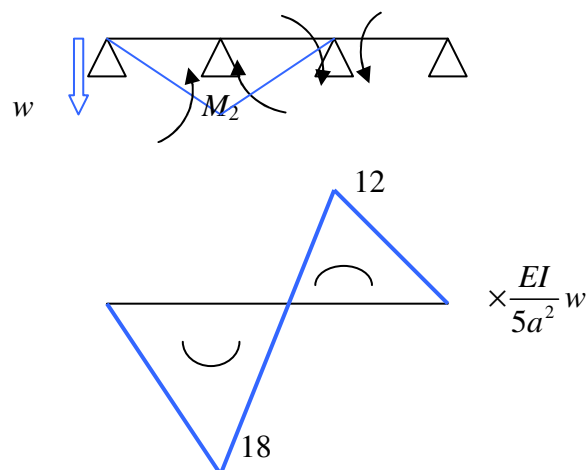


Steunpunt 2 zakt:

$$\frac{M_2 a}{3EI} - \frac{w}{a} = -\frac{M_2 a}{3EI} + \frac{M_3 a}{6EI} + \frac{w}{a}$$

$$\frac{M_2 a}{6EI} - \frac{M_3 a}{3EI} + \frac{w}{a} = +\frac{M_3 a}{3EI}$$

oplossen levert: $M_2 = \frac{18EI}{5a^2} w$; $M_3 = \frac{12EI}{5a^2} w$;



Mogelijke combinaties van steunpuntszettingen zijn:

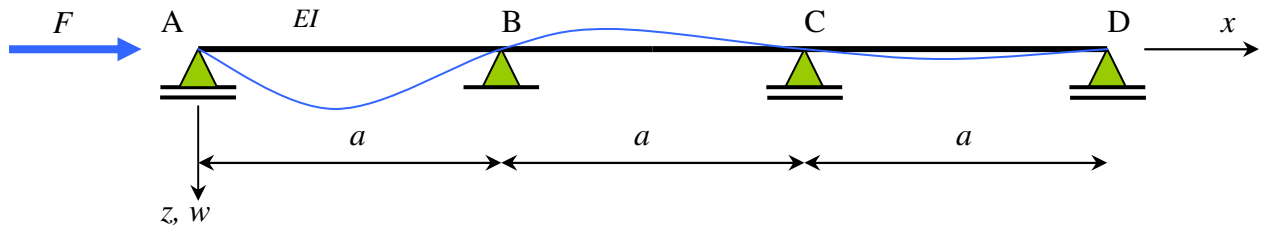
	steunpunt met zakking				momenten $\times \frac{EI}{5a^2} w$	moment t.p.v. steunpunt			
	1	2	3	4		M_1	M_2	M_3	M_4
mogelijke combinaties	0	0	0	0	geen zettingen	0	0	0	0
	w	0	0	0		0	-8	+2	0
	0	w	0	0		0	+18	-12	0
	w	w	0	0		0	+10	-10	0
	w	w	w	0		0	-2	+8	0
	0	w	0	w		0	+20	-20	0
	w	w	0	w		0	+12	-18	0
	w	w	w	w	gelijkmatige zettingen	0	0	0	0
	0	w	w	0		0	+6	+6	0
	w	0	0	w		0	-6	-6	0

Merk op : Spiegelsymmetrische gevallen zijn weggelaten.

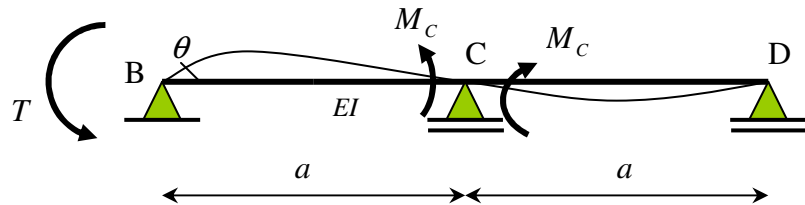
Maatgevend is dus de zakking van of paal 2 en paal 4. Dit geval is identiek aan 1 en 3 waarbij echter de momenten van teken wisselen.

Opgave 2

- a) De constructie is een buigzame op druk belaste staaf die rechts verend is ingeklemd in een ligger over drie steunpunten.



Model is een verend ingeklemde, geschoorde buigzame op druk belaste staaf met links een veerstijfheid gelijk aan nul en rechts een veerstijfheid die bepaald wordt door de verende werking van de ligger BCD zoals hieronder is weergegeven.



- b) De verende werking volgt uit een kleine vingeroefening met statisch onbepaalde constructies (zie ook een eerder tentamen) :

$$\varphi_C^{BC} = \varphi_C^{CD}; \quad \frac{-Tl}{6EI} + \frac{M_C l}{3EI} = \frac{-M_C l}{3EI} \Rightarrow M_C = \frac{1}{4}T$$

$$\theta = \frac{Ta}{3EI} - \frac{\frac{1}{4}Ta}{6EI} = \frac{7Ta}{24EI} \Rightarrow T = \frac{24EI}{7a} \theta \rightarrow r = \frac{24EI}{7a}$$

Het model voor de knikstaaf ziet er als volgt uit:



- c) De kniklast kan met de rho-formule worden bepaald waarbij één van de twee veren gelijk is aan nul.

$$r = \frac{24EI}{7a} \rightarrow \rho = \frac{r \cdot a}{EI} = 3\frac{3}{7} \quad (\text{standaard COZ-sommetje})$$

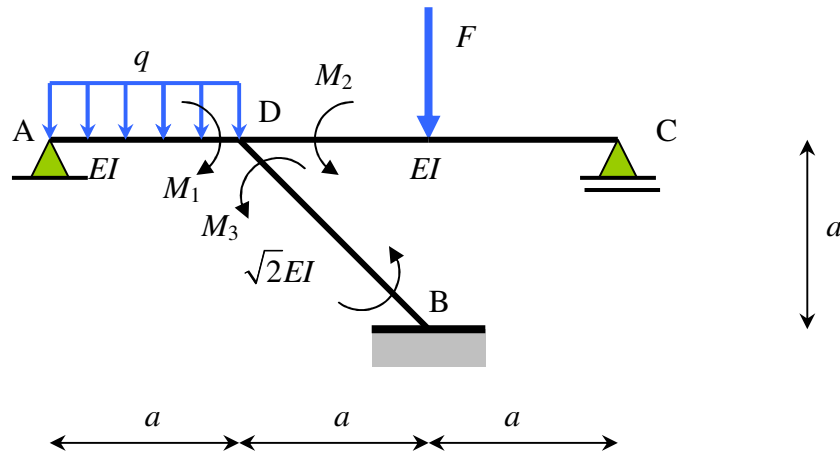
Voor deze **geschoorde staaf** geldt:

$$F_k = \frac{(5)(5 + 2 \cdot 3\frac{3}{7})}{(5)(5 + 3\frac{3}{7})} \times \frac{\pi^2 EI}{a^2}$$

$$F_k = \frac{83\pi^2 EI}{59a^2} = 1,41 \times \frac{\pi^2 EI}{a^2}$$

Opgave 3

- a) Het betreft een probleem met niet-verplaatsbare knopen. De vakwerkkolom kan worden beschouwd als een verticale pendel waarmee deze kan worden vervangen door een horizontale rol.



De constructie heeft 6 opleggingen en is daarmee 3 voudig statisch onbepaald. Vanwege de niet-verplaatsbare knopen zal het moment in B de helft zijn van het moment in staaf D ter plaatse van punt D. Van deze handigheid mag gebruik worden gemaakt. De momenten op de staafuiteinden in D moeten op de knoop evenwicht maken. Dat levert daarmee twee onbekende momenten in D. Deze zijn op te lossen met slechts twee vormvernaderingsvoorwaarden. De positieve richtingen van de statisch onbepaalden zijn in de figuur aangegeven.

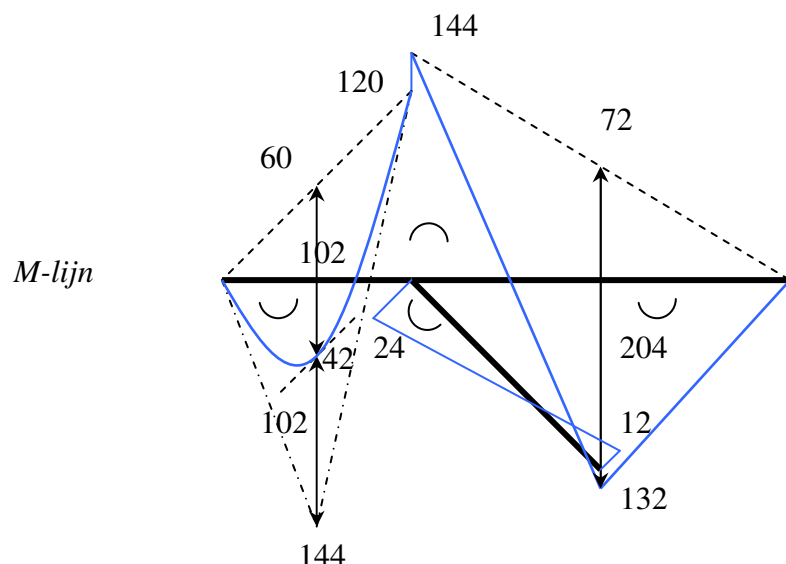
- b) Als vormveranderingsvoorwaarde geldt:

$$\begin{aligned}\varphi_D^{AD} &= \varphi_D^{DC}; \quad \frac{-M_1 \cdot 4}{3EI} + \frac{q \cdot 4^3}{24EI} = \frac{M_2 \cdot 8}{3EI} - \frac{F \cdot 8^2}{16EI} \\ \varphi_D^{AD} &= \varphi_D^{DB}; \quad \frac{-M_1 \cdot 4}{3EI} + \frac{q \cdot 4^3}{24EI} = \frac{M_3 \cdot 4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}EI} - \frac{\frac{1}{2}M_3 \cdot 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}EI} \\ \Sigma T|_D &= 0; \quad M_1 - M_2 - M_3 = 0\end{aligned}$$

Oplossen levert:

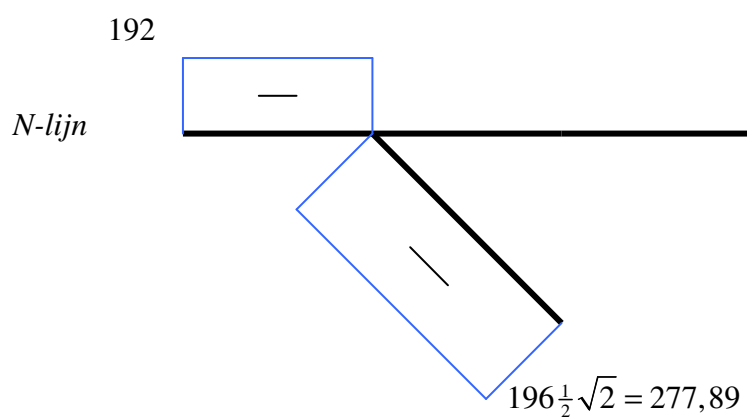
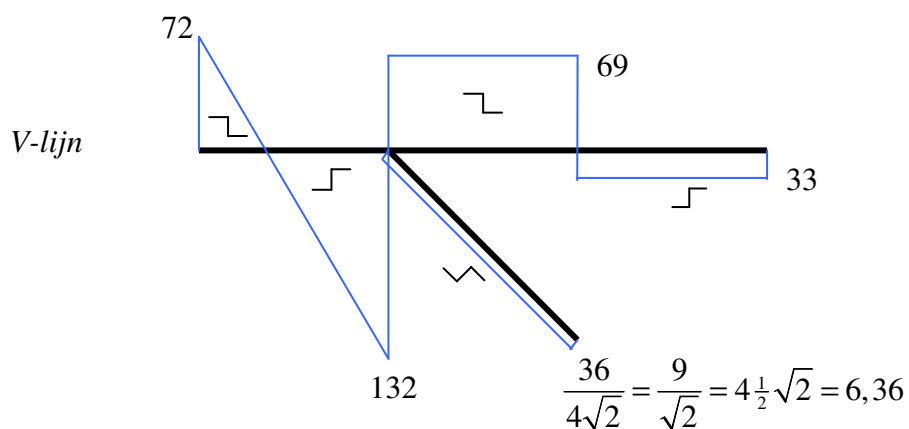
$$\begin{aligned}M_1 &= \frac{22q}{17} + \frac{9F}{17} = 120 \text{ kNm} \\ M_2 &= \frac{6q}{17} + \frac{21F}{17} = 144 \text{ kNm} \\ M_3 &= \frac{16q}{17} - \frac{12F}{17} = -24 \text{ kNm}\end{aligned}$$

- c) De M - en V -lijnen zijn hieronder afgebeeld. Let op de regels voor een nette M -lijn, de vervormingstekens en de correcte en consistente weergaven van de V -lijn op basis van de hellingen van de M -lijn.



$$\frac{1}{4} Fl = \frac{1}{4} 102 \cdot 8 = 204 \text{ kNm}$$

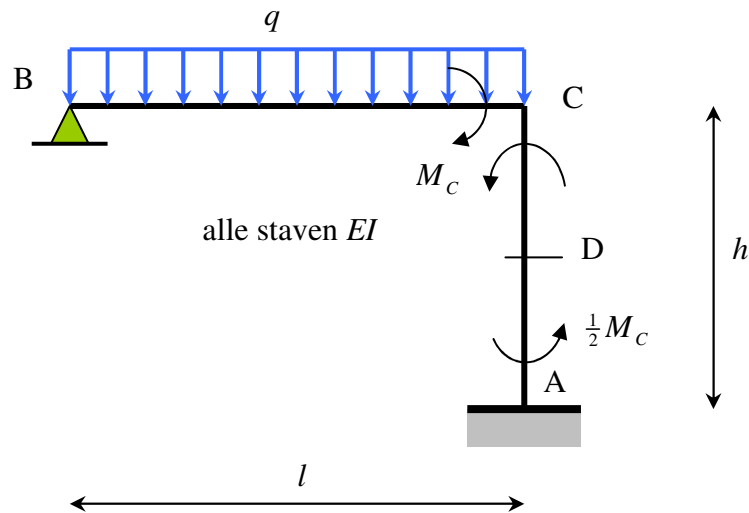
$$\frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{8} 17 \cdot 4^2 = 102 \text{ kNm}$$

**NOOT:**

Verticale oplegreactie in A is bekend uit de V-lijn, neem het momentenevenwicht om de inklemming B voor het bepalen van de horizontale oplegreactie in A. Bepaal hiermee de horizontale reactie in B. De verticale reactie in C is ook bekend uit de V-lijn. Daarmee is bekend dat in B de verticale oplegreactie 201 kN omhoog is. Knoopevenwicht van B levert de normaalkracht in DB.

Opgave 4

- a) Statisch onbepaalde constructie, neem het moment in C als statisch onbepaalde aan. Het inklemmingsmoment is de helft hiervan (bekend handigheidje mag worden gebruikt want het betreft een probleem met *niet-verplaatsbare* knopen)



$$\varphi_C^{BC} = \varphi_C^{CA}; \quad \frac{-M_C \cdot l}{3EI} + \frac{q \cdot l^3}{24EI} = \frac{M_C \cdot h}{3EI} - \frac{\frac{1}{2} M_C \cdot h}{6EI}$$

Hieruit volgt:

$$M_C = \frac{ql^3}{2(4l+3h)} = 16 \text{ kNm}$$

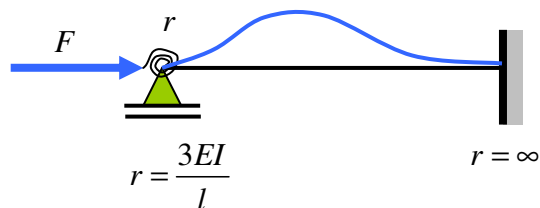
- b) De drukkracht in de kolom is:

$$N = 3 \cdot 5\frac{1}{3} + \frac{16}{6} = 18\frac{2}{3} \quad (\text{druk})$$

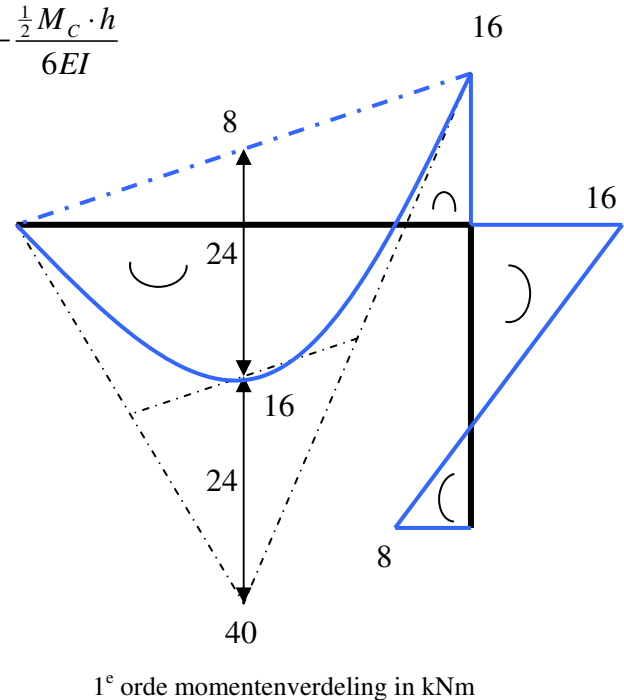
- c) M.b.v. *vergeet-mij-nietjes*:

$$u_D = \frac{M_C \cdot h^2}{32EI} = \frac{16 \cdot 16}{3200} = 0,08 \text{ m}$$

- d) Model voor de knikstaaf:



Dit model is geschoord en er moet gekozen worden voor de rho-formule.



e) Door het oneindig zijn van één van de veren moet de formule worden aangepast:

$$F_k = \frac{2(5+2 \cdot \rho)}{(5+\rho)} \times \frac{\pi^2 EI}{h^2} \quad \text{met:} \quad \rho = \frac{rh}{EI} = \frac{3h}{l} = \frac{3 \cdot 4}{6} = 2$$

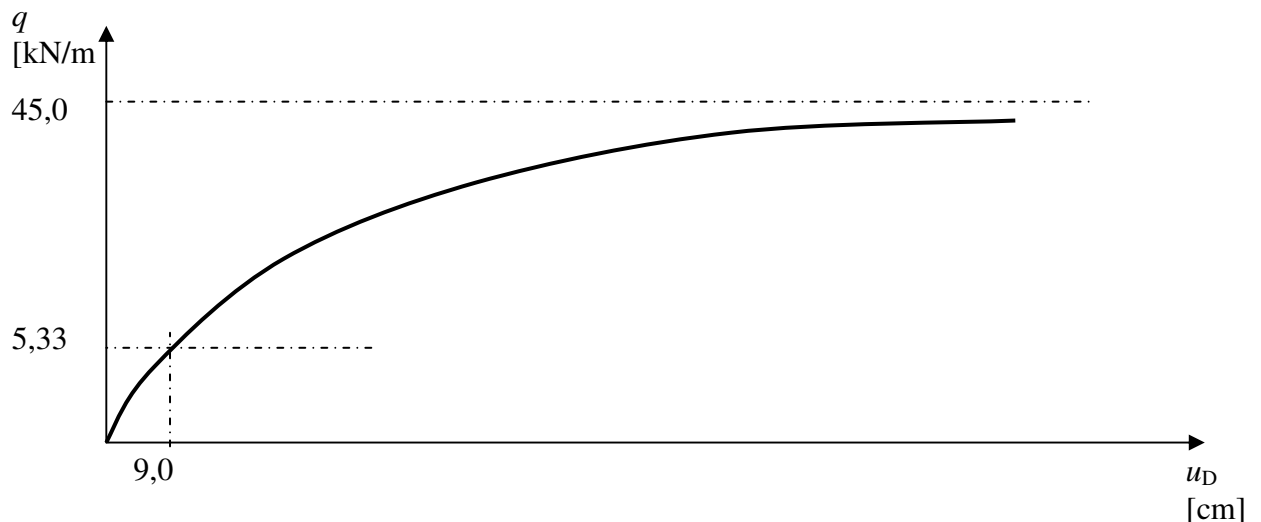
$$F_k = \frac{18\pi^2 EI}{7 \cdot 16} = \frac{9 \cdot \pi^2 \cdot 100}{56} = 158,6 \text{ kN} \quad (\pi^2 = 10 \Rightarrow 160,7 \text{ kN})$$

f) De 2^e orde verplaatsing in D kan gevonden worden m.b.v. de vergrotingsfactor:

$$n = \frac{F_k}{N} = \frac{158,6}{18,66} = 8,5$$

$$u_2 = \frac{n}{n-1} u_1 = 1,13 \cdot u_1 = 0,09 \text{ m}$$

g) Het verband tussen q en u is hieronder geschetst.



De knikbelasting volgt uit:

$$q_k = n \cdot q = 8,5 \cdot 5,333 = 45,3 \text{ kN/m}$$

of:

, zie noot ¹

$$F_k = 158,6 = 3q + \frac{M_C}{l} = 3q + \frac{ql^2}{2(4l+3h)} \Rightarrow q_k = 45,3 \text{ kN/m}$$

BONUSVRAAG

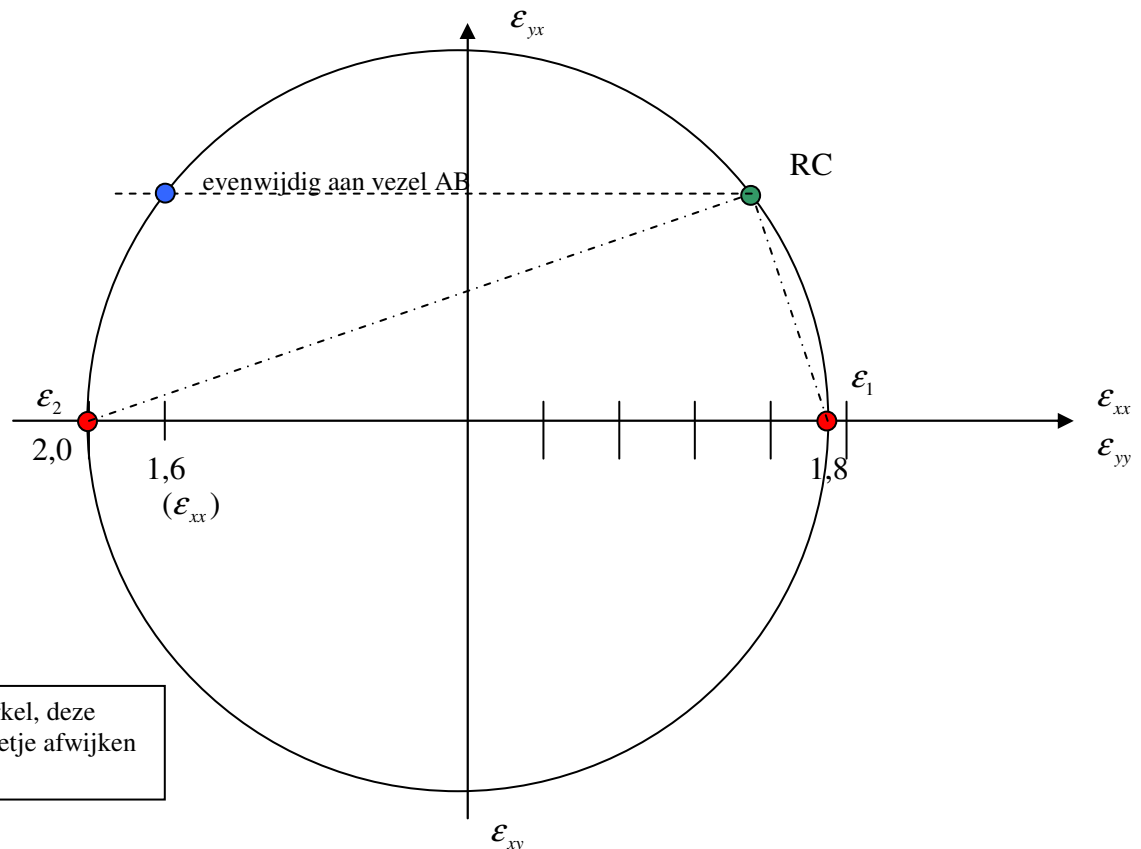
h) De 2^e orde momentenverdeling zal bij B een kleiner moment laten zien. Door de invloed van de afnemende schijnbare stijfheid van de kolom t.g.v. de drukkracht zal er een

¹ Onder de aanname dat de stijfheidsverhouding tussen de regel en de stijl gelijk blijft bij het opvoeren van de belasting. Een nauwkeurige berekening laat zien dat de maximale belasting op ca 39 kN/m uit komt. Dit komt doordat de drukkracht en het moment in C lineair afhankelijk zijn van de q -last. De vergrotingsfactor voor dit systeem zal dan ook niet gelijk zijn aan $n/(n-1)$. De kniklast van 158 kN voor de kolom is wel zeer accuraat.

herverdeling optreden van de krachtsverdeling waardoor de kolom een kleiner moment naar zich toetrekt. De weergegeven figuur is daarom ook niet helemaal exact.

Opgave 5

- De dwarscontractie coëfficiënt ν ligt tussen -1,0 en 0,5.
- De rekken in de hoofdrichtingen zijn gegeven. De punten in de rekcirkel die bij deze rekken horen liggen per definitie op de horizontale as aangezien de afschuifvervorming gelijk is aan nul voor vezels in de hoofdrichting!



- De rek van vezels evenwijdig aan AB kan gevonden worden door vanuit het RC een lijn te trekken evenwijdig aan AB. Daar waar de cirkel wordt gesneden (in het andere punt dan het RC) wordt de rek afgelezen. De rek in de richting van de vezel staat op de horizontale as! Aflezen levert:

$$\varepsilon_{xx} = -1,6 \times 10^{-3}$$

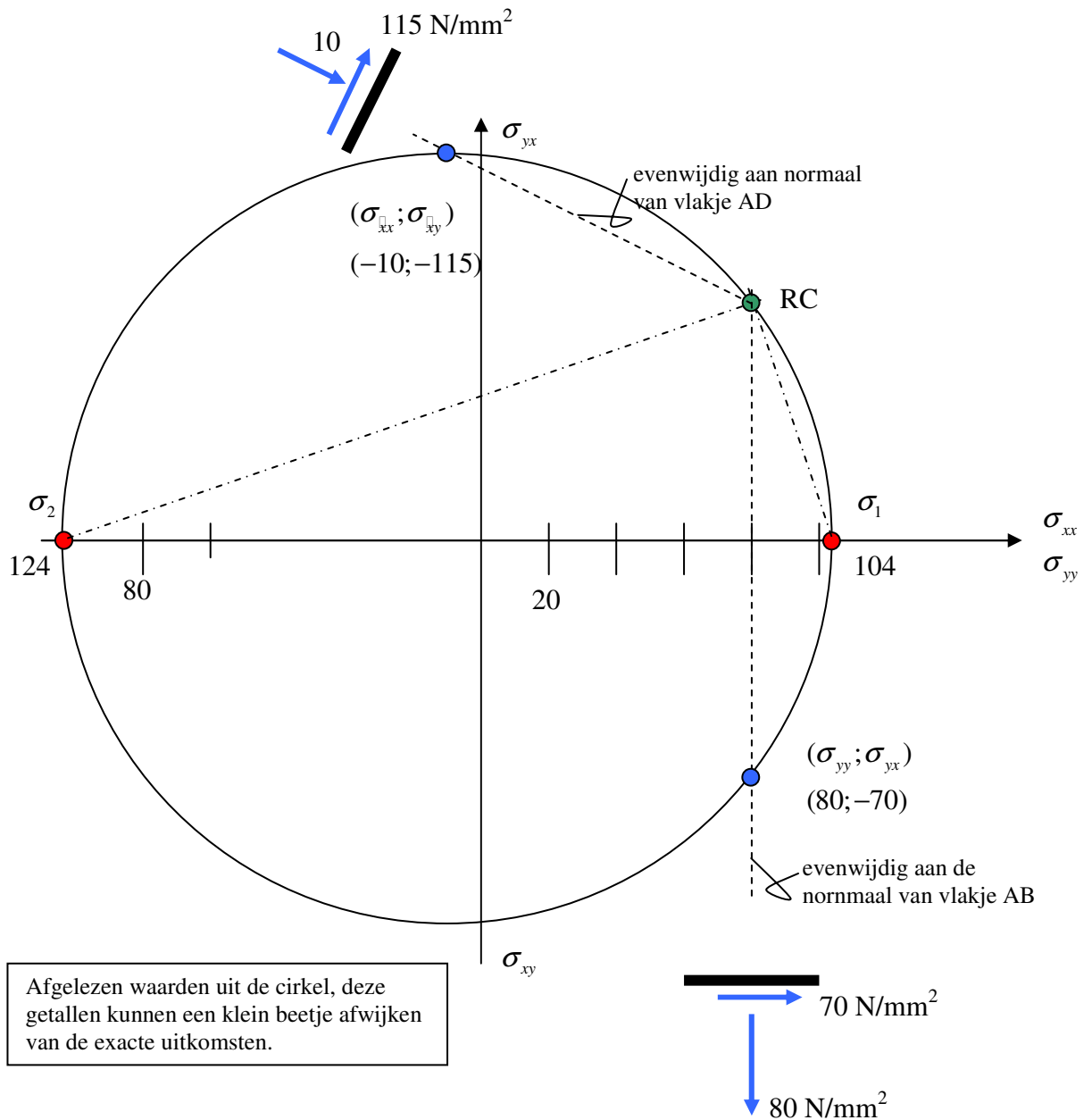
$$\Delta l^{AB} = \varepsilon_{xx} l^{AB} = -1,6 \times 10^{-3} \times 5000 = -8 \text{ mm} \quad (\text{verkort})$$

- De hoofdspanningen kunnen worden bepaald uit de hoofdrekken met:

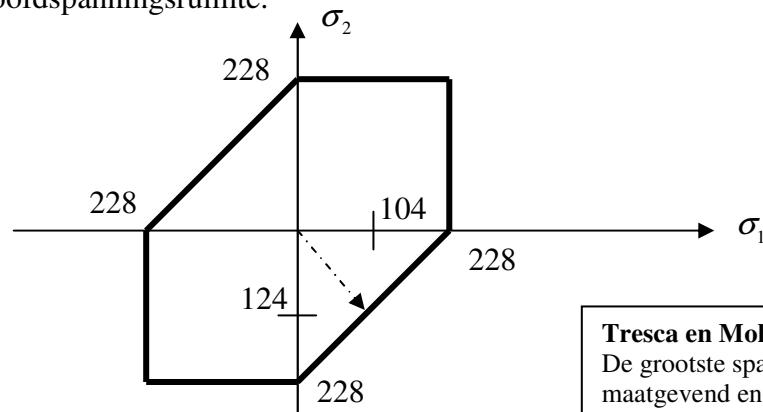
$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{75000}{1-\frac{1}{16}} (1,8 \times 10^{-3} - \frac{1}{4} \times 2,0 \times 10^{-3}) = 104 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) = \frac{75000}{1-\frac{1}{16}} (-2,0 \times 10^{-3} + \frac{1}{4} \times 1,8 \times 10^{-3}) = -124 \text{ N/mm}^2$$

- e) De spanningscirkel is met de hoofdspansingen direct te tekenen. Het RC ligt relatief gezien op dezelfde plek in de cirkel als bij de rekcirkel, immers de hoofdrekrichting is gelijk aan de hoofdspansingsrichting!



- f) Vanuit het RC zijn lijnen getrokken evenwijdig aan de normaal van het oppervlak waarvan de spanningen worden gevraagd. In de snijpunten met de cirkel worden de spanningen afgelezen. Let op de tekens en kies een lokaal assenstelsel als steun!
- g) Tresca in de 2D hoofdspanningsruimte:

**Tresca en Mohr**

De grootste spanningscirkel is maatgevend en de straal daarvan is gelijk aan de vloeispanning van het materiaal (228 N/mm²).