

BEKNOPTE ANTWOORDEN

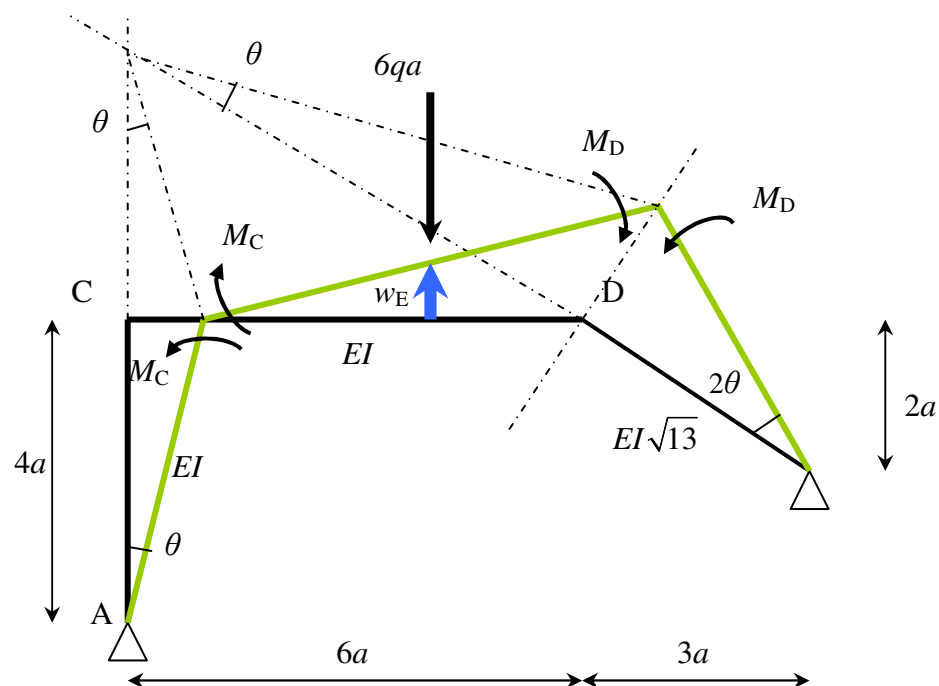
Vraagstuk 1

- a) Het betreft een statisch onbepaalde constructie met verplaatsbare knopen.

Als er een onjuist model wordt toegepast wordt de vraag niet verder beoordeeld.



- b) Breng scharnieren aan en neem een verplaatsing en overgangsmomenten aan. Er is hier bewust gekozen voor een niet-realistische starre rotatie.



- c) De overgangsmomenten in C en D in combinatie met de starre rotatie van het mechanisme zijn de drie onbekenden. Voor het oplossen kunnen drie vergelijkingen worden opgesteld (voor uitleg lees het boek blz 105) :

$$\begin{aligned} \varphi_C^{AC} &= \varphi_C^{CD} & \frac{M_C 4a}{3EI} - \theta &= \frac{-M_C 6a}{3EI} + \frac{M_D 6a}{6EI} - \frac{q(6a)^3}{24EI} + \theta \\ \varphi_D^{CD} &= \varphi_D^{BD} & \frac{M_C 6a}{6EI} - \frac{M_D 6a}{3EI} + \frac{q(6a)^3}{24EI} + \theta &= \frac{M_D \sqrt{13}a}{3\sqrt{13}EI} - 2\theta \\ \delta A &= 0 & -\delta\theta \times M_C - \delta\theta \times M_C - \delta\theta \times M_D - 2\delta\theta \times M_D - 6qa \times \underbrace{3a \times \delta\theta}_{w_E} &= 0 \end{aligned}$$

Na vereenvoudigen resteert:

$$\left. \begin{aligned} 20M_C - 6M_D &= \frac{12EI}{a} \times \theta - 54qa^2 \\ 6M_C - 14M_D &= -\frac{18EI}{a} \times \theta - 54qa^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 30M_C - 9M_D &= \frac{18EI}{a} \times \theta - 81qa^2 \\ 6M_C - 14M_D &= -\frac{18EI}{a} \times \theta - 54qa^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2M_C + 3M_D &= -18qa^2 \quad (3) \\ 36M_C - 23M_D &= -135qa^2 \quad (4) \end{aligned} \quad +$$

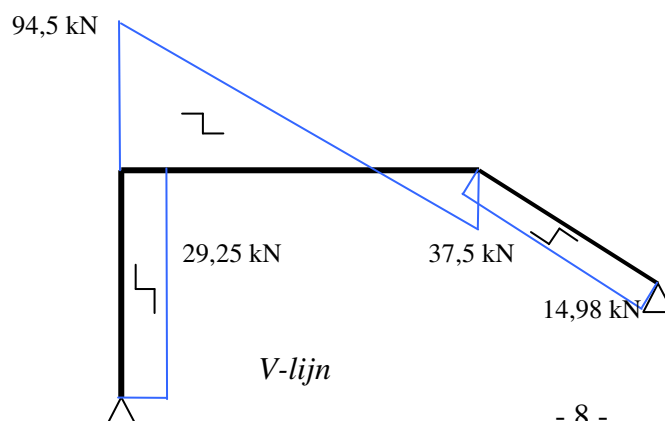
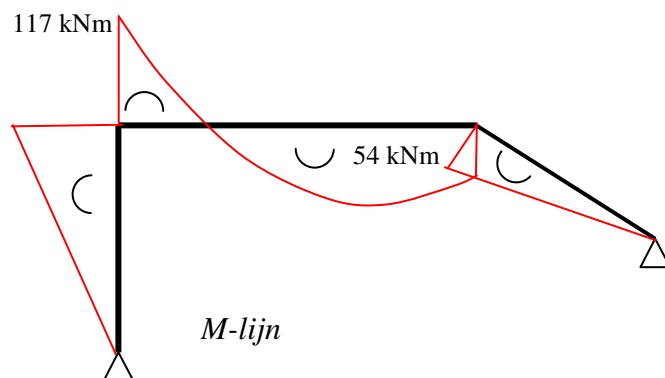
Door uit (1) en (2) de θ te elimineren ontstaat (4). Combineer (4) en (3):

$$\left. \begin{aligned} 36M_C - 23M_D &= -135qa^2 \\ 2M_C + 3M_D &= -18qa^2 \end{aligned} \right\} -77M_D = 189qa^2$$

Dit levert: $M_D = -54 \text{ kNm} \Rightarrow M_C = -117 \text{ kNm} \Rightarrow \theta = -0,069 \text{ rad}$.

Alle richtingen waren kennelijk onjuist aangenomen.

- d) M -, V - en N -lijn wordt aan de lezer overgelaten. Let op, conform de afspraken uit het 1^e jaar en inclusief de vervormingstekens.



Vraagstuk 2, deel 1Constructie (1)

Onder	: geschoord,	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} l\right)^2} = \frac{16\pi^2 EI}{l^2}$
Midden	: n.v.t.	n.v.t.
Boven	: ongeschoord,	$F_k = \frac{\pi^2 EI 4}{\left(\frac{1}{2} l\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$

Constructie (2)

Onder	: ongeschoord,	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{4} l\right)^2} = \frac{16\pi^2 EI}{l^2}$
Midden	: ongeschoord,.	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{2} l\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$
Boven	: ongeschoord,	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(2 \times \frac{1}{4} l\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$

Constructie (3)

Onder	: ongeschoord,	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{3} l\right)^2} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}$
Midden	: ongeschoord,.	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{3} l\right)^2} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}$
Boven	: ongeschoord,	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(2 \times \frac{1}{3} l\right)^2} = \frac{2\frac{1}{4}\pi^2 EI}{l^2}$

Constructie (4)

Onder	: ongeschoord,	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{5} l\right)^2} = \frac{25\pi^2 EI}{l^2}$
Midden	: ongeschoord,.	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{3}{5} l\right)^2} = \frac{2\frac{1}{9}\pi^2 EI}{l^2}$
Boven	: ongeschoord,	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(2 \times \frac{1}{5} l\right)^2} = \frac{6\frac{1}{4}\pi^2 EI}{l^2}$

a) Kleinste kniklast is constructie (3) met $F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(2 \times \frac{1}{3} l\right)^2} = \frac{2\frac{1}{4}\pi^2 EI}{l^2} \cong 2500 \text{ kN}.$

b) De grootste knikkracht is constructie (1) of (2) met $F_k = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{1}{2} l\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \cong 4000 \text{ kN}.$

Merk op : Voor π^2 is hier 10 aangehouden.

Vraagstuk 2, deel 2

- c) De verticale staven van 6 m en 2 m zijn de op druk belaste elementen en moeten op knik worden gecontroleerd.
- d) De verticale staaf van 2 m lengte is een geschoorde op druk belaste buigzame staaf, onderin volledig ingeklemd en aan de bovenzijde met een rotatieveer ingeklemd. Teken de uitbuigingsvorm en laat zien waar de verende werking in de constructie zit. De veerstijfheid van deze rotatieveer is:

$$r = 2 \times \frac{4EI}{2} = 4EI \text{ kNm/rad} \quad (\text{standaard COZ-sommetje})$$

Voor deze **geschoorde staaf** geldt:

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \times \frac{\pi^2 EI}{2^2} \quad \text{met: } \rho_1 = \infty; \quad \rho_2 = \frac{r \times 2}{EI} = 8$$

Uitwerken levert:

$$F_k = \frac{2(5 + 2 \times 8)}{(5 + 8)} \times \frac{\pi^2 EI}{2^2} = \frac{42}{52} \times \pi^2 EI = 122762 \text{ kN} \quad (\text{vrij groot})$$

De verticale staaf van 6 m lengte is a.h.w. verend ingeklemd in de constructie bestaande uit de drie staven van elk 2 m lengte. Deze drie staven vormen samen de rotatieveer voor de **ongeschoorde staaf** van 6 m lengte. Teken de uitbuigingsvorm en laat zien waar de verende werking in de constructie zit. De rotatieveerstijfheid is:

$$r = 3 \times \frac{4EI}{2} = 6EI \text{ kNm/rad} \quad (\text{standaard COZ-sommetje})$$

Het betreft hier een basisgeval waarvoor de kniklast eenvoudig kan worden gevonden met:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}} = \frac{1}{6EI} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{144}} = \frac{1}{988 \text{ kN}}$$

De laagste kniklast is maatgevend en dat is 988 kN.

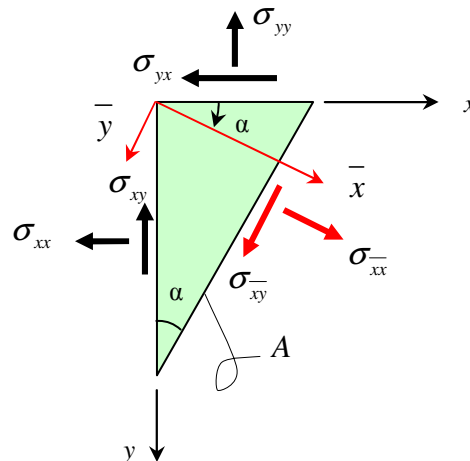
- e) De kniklengte kan worden bepaald m.b.v. de Eulerse formule:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \Leftrightarrow l_k = \pi \sqrt{\frac{EI}{F_k}} = 12,4 \text{ m}$$

Vraagstuk 3

Zie theorie dictaat op pagina 18 van de Engelse Reader en pagina 20-21 van het Nederlandse dictaat.

- a) De spanningen op het proefstuk zijn hieronder allen positief getekend. Neem aan dat de oppervlakte van de schuine zijde gelijk is aan A .



- b) Het proefstuk is alleen in evenwicht als de resultante krachten evenwicht maken en als de som van de momenten in het vlak gelijk is aan nul. Aan deze laatste eis is reeds voldaan aangezien met het momentenevenwicht aangetoond kan worden dat voor de schuifspanningen op onderling loodrechte oppervlakken moet gelden: $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. Er reesteren dus twee evenwichtsvergelijkingen:

$$\text{horizontaal evenwicht:} \quad A\sigma_{xx} \cos \alpha - A\sigma_{xy} \sin \alpha = \sigma_{xx} A \cos \alpha + \sigma_{yx} A \sin \alpha$$

$$\text{verticaal evenwicht:} \quad A\sigma_{xx} \sin \alpha + A\sigma_{xy} \cos \alpha = \sigma_{xx} A \cos \alpha + \sigma_{yy} A \sin \alpha$$

Deze vergelijkingen kunnen worden herschreven als:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{yx} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sigma_{xy} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{yx} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

Deze laatste vergelijking is de gevraagde uitdrukking voor de schuifspanning op het schuine vlakje in het geroteerde (overtrepte) assenstelsel uitgedrukt in de spanningen van het oorspronkelijke x - y -assenstelsel.

- c) Deze uitdrukking is een onderdeel van de tensortransformatieregel voor een 2^e orde tensor.
- d) Een vector, zoals b.v. een verplaatsing of een snelheid is een 1^e orde tensor. Hiervoor gelden de transformatieregels voor 1^e orde tensoren. De hierboven weergegeven transformatieregel geldt dus niet voor vectoren.