

BEKNOPTE ANTWOORDEN

(geen modeluitwerking !)

VRAAGSTUK 1 : Theorie

Deel 1

- a) zie theorie
- b) bepaal de ligging van de halveringslijn, deze blijkt op 50 mm evenwijdig vanaf de bovenrand te lopen. Hieruit volgt voor het volplastisch moment:

$$M_p = f_y \times (80 \times 50 \times 25 + 80 \times 70 \times 35 - 40 \times 40 \times 30) \times 10^{-6} = 89,28 \text{ kNm}$$

Deel 2

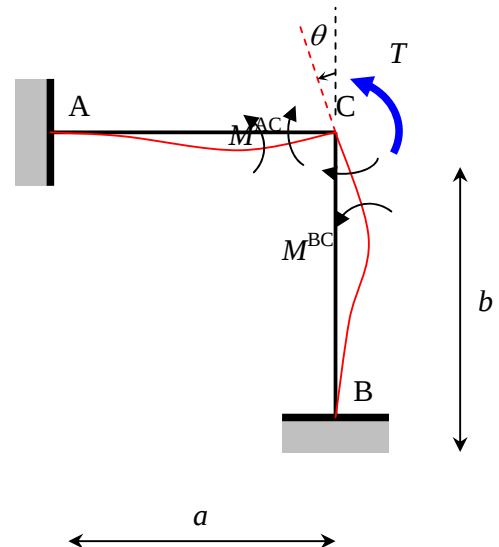
- c) De enige vrijheidsgraad is de rotatie θ in C
- d) Zie figuur
- e) Er geldt:

$$M^{AC} = \frac{4EI}{a} \times \theta \quad \text{zie vergeet-mij-nietjes}$$

$$M^{BC} = \frac{4EI}{b} \times \theta$$

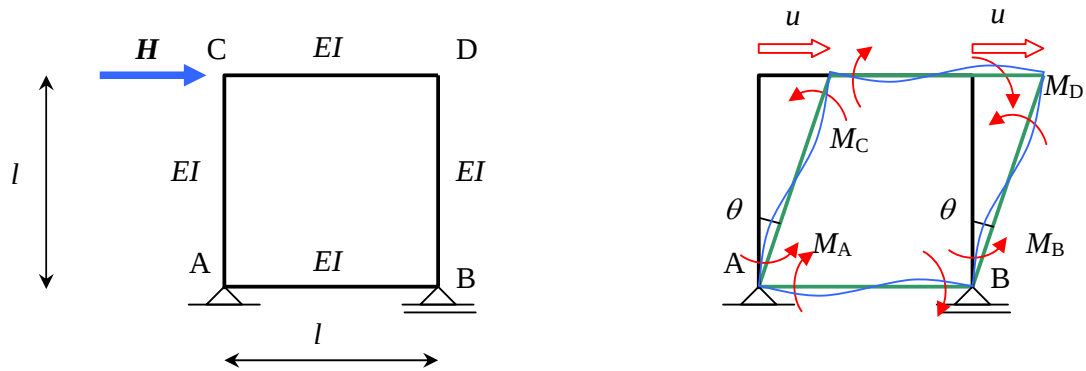
$$T - M^{AC} - M^{BC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{evenwicht}$$

$$\theta = \frac{T}{\frac{4EI}{a} + \frac{4EI}{b}}$$



VRAAGSTUK 2 : Statisch onbepaalde constructies

De constructie betreft een 3-voudig statisch onbepaalde constructie met verplaatsbare knopen. Als de constructie wordt opgedeeld in liggers op twee steunpunten ontstaat een mechanisme. De kinematica van het mechanisme kan met één vrijheidsgraad θ worden beschreven. Hieronder is het mechanisme en de vervormde constructie weergegeven. (let op de relatie tussen de vervorming en de richting van de momenten, dit komt terug in de M -lijn!)



Met de hybride aanpak ontstaan er 5 onbekenden, 4 onbekende momenten in de staven in A, B, C en D en de verplaatsingsvrijheidsgraad u uit het mechanisme. Om de onbekenden op te lossen zijn vier v.v.v.'s nodig en één extra evenwichtsvoorwaarde voor het evenwicht van het mechanisme in de vorm van een virtuele arbeidsvergelijking. Gelukkig is vanwege de symmetrie van het probleem eenvoudig in te zien dat de vier momenten gelijk zijn. In plaats van 5 vergelijkingen kunnen we dus volstaan met slechts twee vergelijkingen, één vormveranderingsvergelijking en de virtuele arbeidsvergelijking:

De v.v.v. is b.v.:

$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{CD} - \frac{M_A \times l}{6EI} + \frac{M_C \times l}{3EI} - \theta = -\frac{M_C \times l}{3EI} + \frac{M_D \times l}{6EI} \quad \text{met: } M_A = M_C = M_D$$

Voor de virtuele arbeidsvergelijking geldt:

$$\delta A = H \times l \delta \theta - M_A \delta \theta - M_B \times \delta \theta - M_C \times \delta \theta - M_D \times \delta \theta = 0$$

met: $M_A = M_B = M_C = M_D$

De vergelijkingen zijn te herschrijven tot en op te lossen:

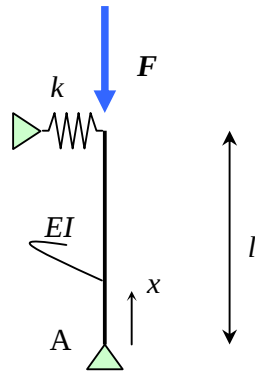
$$\frac{Ml}{3EI} = \theta \qquad \theta = \frac{Hl^2}{12EI} = 0,0133 \quad \Rightarrow \quad u = \theta \times l = \frac{Hl^3}{12EI} = 0,053 \text{ m}$$

$$Hl = 4M \quad \Rightarrow \quad M = \frac{Hl}{4} = 10 \text{ kNm} \quad V = \frac{2M}{4} = 5 \text{ kN}$$

Hiermee is feitelijk de krachtsverdeling bepaald. De momentenlijn kan worden getekend op basis waarvan ook de dwarskrachtenlijn kan worden getekend. De horizontale verplaatsing van de bovenregel is met de gevonden waarde van u nu ook bekend. Let op de relatie M -lijn en vervormde constructie!

VRAAGSTUK 3 : Stabiliteit

- a) De op druk belaste pendel CG kan als een verend gesteunde op druk belaste buigzame staaf worden gemodelleerd.



- b) Dit probleem kan worden gemodelleerd met de 4^e orde DV voor buigingsknik:

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\text{en } S_z(x) = M' - Fw'$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x \quad (\text{gegeven op formuleblad})$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3 \alpha \sin \alpha x - C_4 \alpha \cos \alpha x$$

$$M(x) = EI \times [C_3 \alpha^2 \cos \alpha x + C_4 \alpha^2 \sin \alpha x]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

De randvoorwaarden zijn:

$$x = 0; \quad w(0) = 0; \quad M(0) = 0;$$

$$x = l; \quad M(l) = 0; \quad kw(l) + S_z = 0;$$

Verwerken van deze randvoorwaarden leidt tot de volgende vier vergelijkingen:

$$(1) \quad C_1 + C_3 = 0$$

$$(2) \quad C_3 \alpha^2 = 0$$

$$(3) \quad C_4 \alpha^2 \sin(\alpha l) = 0$$

$$(4) \quad (C_2 l + C_4 \sin(\alpha l)) \times k - F C_2 = 0$$

Uit (1) en (2) volgt: $C_1 = C_3 = 0$. Uit (3) en (4) volgt:

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha^2 \sin(\alpha l) \\ kl - F & k \sin(\alpha l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0$$

Een niet-triviale oplossing kan alleen worden gevonden indien geldt:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \alpha^2 \sin(\alpha l) \\ kl - F & k \sin(\alpha l) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(kl - F) \times \alpha^2 \sin(\alpha l) = 0 \Leftrightarrow$$

$$F = kl \quad \vee \quad \sin(\alpha l) = 0$$

$$F = \frac{\pi^2 EI}{(l)^2}$$

De constructie heeft dus twee kniklasten. Dit zijn ook wel redelijk bekenden, de eerste is de kniklast behorende bij de starre pendel, de tweede is de Eulerse kniklast.

c) De veerstijfheid is gevonden in de vorige opgave. Hiervoor geldt:

$$k = \frac{12 \times 0,8EI}{l^3} = \frac{9,6EI}{l^3}$$

d) De maatgevende kniklast is de laagste van de eerder gevonden kniklasten:

$$F_{k-1} = \frac{9,6EI}{l^2} = 600 \text{ kN}$$

$$F_{k-1} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 616 \text{ kN}$$

Het starre model levert de maatgevende kniklast voor dit geval.

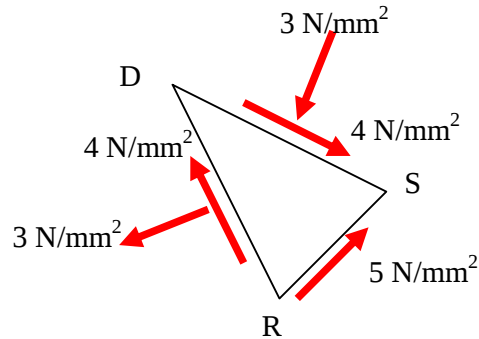
e) De kniklast is ca 600 kN. De werkelijke belasting is 200 kN. Een goede schatting voor de vergrotingsfactor is:

$$n = \frac{F_k}{F} = 3 \Rightarrow \frac{n}{n-1} = 1,5$$

De constructie is met de aangegeven belasting dus zeer gevoelig voor 2^e orde effecten.

VRAAGSTUK 4 : Cirkel van Mohr

- a) Homogene vlakspanningstoestand
- b) Zie opgave dictaat., let op: de assen, spanningspunten, cirkel en RC moeten kloppen alsmede de hoofdrichtingen.
- c)



- d) Aan het momentenevenwicht is impliciet voldaan als de spanningstensor wordt gebruikt, immers schuifspanningen op onderling loodrechte vlakken zijn even groot en dat is bewezen m.b.v. het momentenevenwicht. Dus alleen krachterevenwicht voldoet.

Overigens kan ook heel praktisch worden ingezien dat het momentenevenwicht niet hoeft te worden gecontroleerd aangezien alle krachten t.g.v. de spanningen op de vlakken van deel RSD door één punt gaan (halverwege RS). Ga dat zelf maar eens na. Studenten die dit opmerkten hebben een bonus gekregen voor hun opmerkzaamheid, erg leuk!

- e) $5\sqrt{3} \text{ N/mm}^2$.