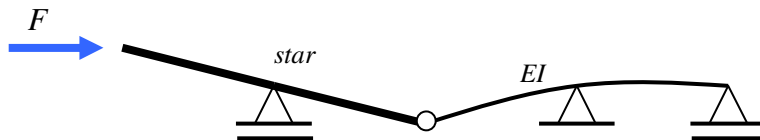


BEKNOPTE ANTWOORDEN

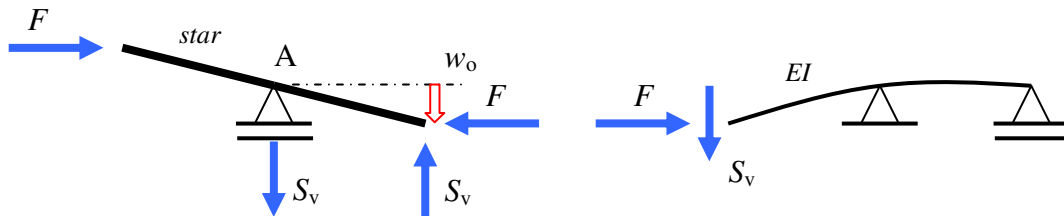
(geen modeluitwerking !)

OPGAVE 1

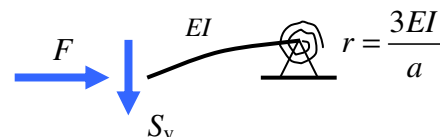
- a) De uitbuigingsvorm (knikvorm) is hieronder weergegeven.



- b) Het probleem is op te splitsen in een star deel en een buigzaam deel. Ter plaatse van het scharnier zal er een horizontale en verticale verbindingskracht kunnen optreden. Vrijmaken van de delen in de vervormde stand levert de volgende schets op.



De buigzame ligger kan nog vereenvoudigd worden tot een verend ingeklemde ligger waarbij de rotatieveerstijfheid een bekend basisbeval is:



Voor het starre deel geldt voor het momentenevenwicht om A:

$$F \times 2w_0 - S_v \times a = 0 \Rightarrow S_v = \frac{2F}{a} \times w_0$$

Voor het rechter, buigzame deel geldt de DV voor buigingsknik:

$$EIw'''' + Fw'' = 0 \Rightarrow w(x) = C_1 + C_2x + C_3 \sin(\alpha x) + C_4 \cos(\alpha x) \wedge \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

randvoorwaarden:

$$x = 0;$$

$$x = a;$$

$$1) M = 0$$

$$3) w = 0$$

$$2) S_z = -S_v = -\frac{2F}{a} \times w_0$$

$$4) M + r \times \varphi = 0$$

- c) De kniklast kan worden gevonden door voor het buigzame deel de randvoorwaarden op te stellen. Met vier randvoorwaarden ontstaat dan een stelsel homogene vergelijkingen waarvoor een niet-triviale oplossing wordt gevonden indien de determinant van het stelsel gelijk is aan nul. Hieruit kan vervolgens de kniklast worden bepaald.

De bepaling van de kniklast werd niet gevraagd. Voor de compleetheit wordt de afleiding hieronder wel gegeven. Uitwerken van deze vergelijkingen levert:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & C_4 EI \alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0 \\
 2) \quad & -FC_2 = -\frac{2F(C_1 + C_4)}{a} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{2C_1}{a} \\
 3) \quad & C_1 + C_2 a + C_3 \sin(\alpha a) + C_4 \cos(\alpha a) = 0 \\
 4) \quad & EI(\alpha^2 C_3 \sin(\alpha a) + \alpha^2 C_4 \cos(\alpha a)) + \frac{3EI(-C_2 - C_3 \alpha \cos(\alpha a) + C_4 \alpha \sin(\alpha a))}{a} = 0
 \end{aligned}$$

Met (1) en (2) kan het stelsel worden gereduceerd tot:

$$\begin{aligned}
 3) \quad & 3C_1 + C_3 \sin(\alpha a) = 0 \\
 4) \quad & -\frac{6EI}{a^2} C_1 + C_3 \left(EI \alpha^2 \sin(\alpha a) - \frac{3EI}{a} \alpha \cos(\alpha a) \right) = 0
 \end{aligned}$$

De determinant van dit stelsel moet nul zijn om een niet-triviale oplossing te kunnen vinden:

$$\begin{bmatrix} 3 & \sin(\alpha a) \\ -\frac{6EI}{a^2} & EI \alpha^2 \sin(\alpha a) - \frac{3EI}{a} \alpha \cos(\alpha a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De determinant van dit stelsel is:

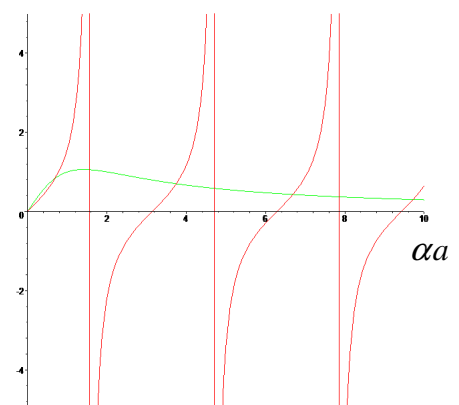
$$\det = 3 \times \left(EI \alpha^2 \sin(\alpha a) - \frac{3EI}{a} \alpha \cos(\alpha a) \right) + \sin(\alpha a) \times \frac{6EI}{a^2}$$

De determinant is nul voor:

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha a) \times \left[EI \alpha^2 + \frac{2EI}{a^2} \right] &= \frac{3EI}{a} \times \alpha \Leftrightarrow \\
 \tan(\alpha a) &= \frac{\frac{3EI}{a^2} \times \alpha a}{EI \alpha^2 + \frac{2EI}{a^2}} = \frac{3\alpha a}{2 + (\alpha a)^2}
 \end{aligned}$$

d) De transcendente vergelijking volgt uit het nul stellen van de determinant.

e) Uit deze transcendente vergelijking is de factor αa te bepalen. (GRAFISCHE REKENMACHINE).



De kniklast zit verstopt in de factor αa :

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow (\alpha a)^2 = \frac{Fa^2}{EI} \Rightarrow F = \frac{(\alpha a)^2 EI}{a^2}$$

Uit de grafiek is te herleiden dat de laagste kniklast gevonden wordt voor:

$$\alpha a = 0,7015 \quad F_k = \frac{0,7015^2 EI}{a^2} = 0,05 \times \frac{\pi^2 EI}{a^2} \cong \frac{\pi^2 EI}{20a^2}$$

f) Zonder het starre deel zou de kniklast van de buigzame staaf gelijk zijn aan:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4a^2}} \quad \text{met: } r = \frac{3EI}{a}$$

$$F_k = \frac{3}{\pi^2 + 12} \times \frac{\pi^2 EI}{a^2} = 0,14 \times \frac{\pi^2 EI}{a^2} \cong \frac{\pi^2 EI}{7,3 a^2}$$

Dit betekent dat door de koppeling de kniklast nog maar ca 1/3 is van de oorspronkelijke kniklast van het buigzame deel. Het starre deel heeft dus een zeer grote en nadelige invloed op de grootte van de kniklast.

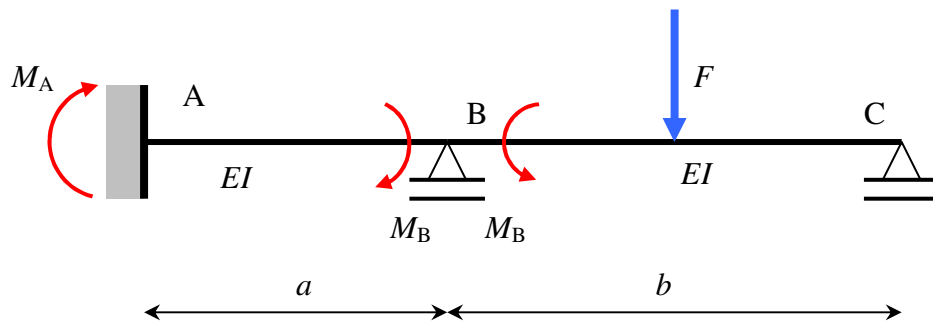
Opmerkingen:

Essentieel bij buigingsknik is dat de integratieconstanten van de algemene oplossing NIET allemaal kunnen worden bepaald. De kniklast kan wel worden bepaald m.b.v. de determinant van het stelsel (eigenwaarden). Daarmee is de knikvorm (eigenvector) te bepalen maar niet de exacte uitbuiging (de grootte). Als ergens in de beantwoording werd gesteld dat de integratieconstanten kunnen worden opgelost bij knik dan wordt dat als een ernstige BLUNDER aangerekend. Zorg dat je de theorie beheerst want een TU-ingenieur mag niet dit soort “domme” uitspraken doen t.a.v. knik!

Lees ook goed wat er wordt gevraagd, de uitwerking van de vergelijkingen t.a.v. de randvoorwaarden werd helemaal niet gevraagd. Dus doe dat dan ook niet tijdens het tentamen.

OPGAVE 2

- a) De constructie is tweevoudig statisch onbepaald, het betreft een constructie met niet-verplaatsbare knopen.



- b) De twee vormveranderingsvergelijkingen zijn:

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B^{AB} = \varphi_B^{BC}$$

Uitwerken met de vergeet-mij-nietjes levert:

$$\frac{-M_A a}{3EI} + \frac{M_B a}{6EI} = 0 \Rightarrow M_A = \frac{1}{2} M_B$$

$$\frac{M_A a}{6EI} - \frac{M_B a}{3EI} = \frac{M_B b}{3EI} - \frac{F b^2}{16EI} \Rightarrow \frac{M_B a}{12EI} - \frac{M_B a}{3EI} - \frac{M_B b}{3EI} = -\frac{F b^2}{16EI}$$

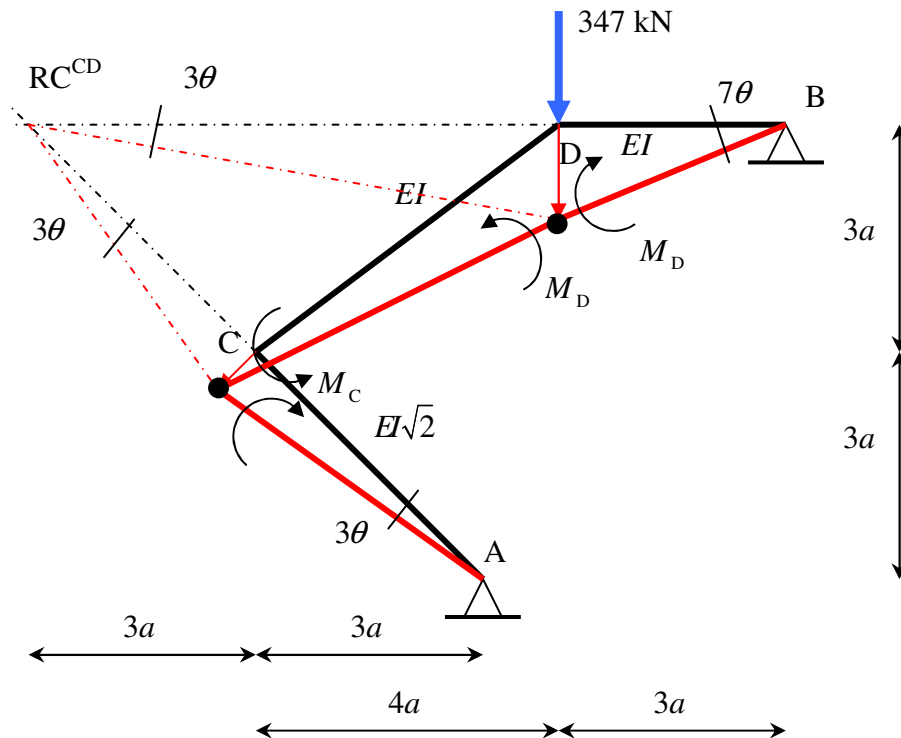
$$M_B = \frac{3Fb^2}{4(3a + 4b)} = 30 \text{ kNm}; \quad M_A = 15 \text{ kNm};$$

- c) Maximummoment treedt op onder de puntlast en is 45,0 kNm groot. Maximum dwarskracht treedt op op het deel BD en is 25,0 kNm groot. De kritieke doorsnede is hiermee de doorsnede juist links van de puntlast met een moment van 45,0 kNm en een dwarskracht van 25,0 kNm.

Noot : M - en V -lijn moeten volledig kloppen anders geen punten voor deze deelvraag.

OPGAVE 3

- a) De constructie is een constructie met verplaatsbare knopen. Breng in alle starre verbindingen scharnieren aan en neem hier onbekende overgangsmomenten aan. De constructie zal zonder de momenten een mechanisme vormen. Echter met de momenten moet er juist evenwicht zijn. Hierdoor kan met virtuele arbeid een eenvoudige evenwichtsvergelijking worden verkregen die samen met de vormveranderingsvoorwaarden voldoende vergelijkingen opleveren om de onbekenden te bepalen. **Let op :** De kinematica moet helemaal kloppen, dus niet gokken met de hoeken!



- b) De vormveranderingsvoorwaarden zijn:

$$\begin{aligned}\varphi_C^{\text{AC}} &= \varphi_C^{\text{CD}} - \frac{M_C 3a\sqrt{2}}{3EI\sqrt{2}} + 3\theta = +\frac{M_C 5a}{3EI} - \frac{M_D 5a}{6EI} - 3\theta \\ \varphi_D^{\text{CD}} &= \varphi_D^{\text{DB}} - \frac{M_C 5a}{6EI} + \frac{M_D 5a}{3EI} - 3\theta = -\frac{M_D 3a}{3EI} + 7\theta\end{aligned}$$

De evenwichtsvergelijking in de vorm van virtuele arbeid:

$$-M_c 3\delta\theta - M_c 3\delta\theta - M_D 3\delta\theta - M_D 7\delta\theta + F \times 7\delta\theta \times 3a = 0$$

Hieruit volgt:

$$M_c = 1533 \text{ kNm}$$

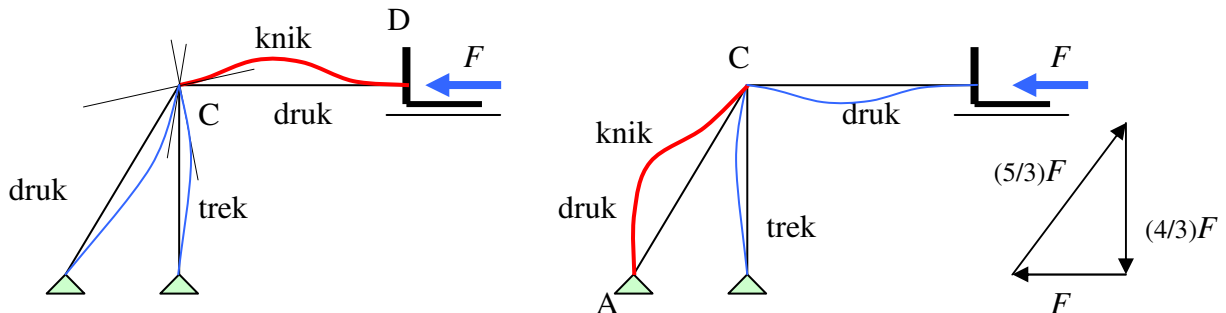
$M_D = 1995 \text{ kNm}$ M -lijn, louter rechte lijnen!

$$\theta = 0,0008085 \text{ rad}$$

Verplaatsing van punt C : $u_C = -3\theta \times 3a = -0,029 \text{ m} \leftarrow$
 $w_C = +\theta \times 3a = 0,029 \text{ m} \downarrow$

OPGAVE 4

- a) Er zijn twee op druk belaste staven, CD en AC. Beide staven kunnen uitknikken, de laagste kniklast is maatgevend. Twee duidelijke schetsjes noodzakelijk!



Merk op : De in rood aangegeven delen
Zijn knikstaven, de blauwe delen zijn de delen die zich “verzetten” ten de knikvorm en kunnen als “veren” worden gemodelleerd.

- b) Staaf CD :

drukkracht = F geschoord, links verend, rechts volledig ingeklemd
lengte = 4,0 m

$$r_1 = \frac{3EI}{5} + \frac{3EI}{4} = \frac{27}{20}EI \rightarrow \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} = \frac{27}{5}$$

$$r_2 = \infty \rightarrow \rho_1 = \infty$$

$$F = F_k = \frac{(5 + 2 \times \frac{27}{5})}{(5 + \frac{27}{5})} \times 2 \times \frac{\pi^2 EI}{4^2} = \frac{79\pi^2 EI}{26} = 1874 \Rightarrow F = 1874 \text{ kN}$$

Let op:

Zoek uit waar die twee
vandaan komt en maak hier
geen domme wiskunde
fouten mee op het
tentamen! (zie vb dictaat)

Staaf AC :

drukkracht = $\frac{5}{3}F$ geschoord, links scharnierend, rechts verend ingeklemd
lengte = 5,0 m

$$r_2 = 0 \rightarrow \rho_1 = 0$$

$$r_2 = \frac{3EI}{4} + \frac{4EI}{4} = \frac{7}{4}EI \rightarrow \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} = \frac{35}{4}$$

$$\frac{5}{3}F = F_k = \frac{(5 + 2 \times 0)(5 + 2 \times \frac{35}{4})}{(5 + 0)(5 + \frac{35}{4})} \times \frac{\pi^2 EI}{5^2} = \frac{18\pi^2 EI}{11} = 646 \Rightarrow F = 387 \text{ kN}$$

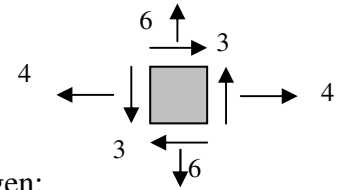
De kniklast is hiermee bepaald op 387 kN.

Studenten die aangaven dat staaf BC (trek) uitknikte hebben een slechte beoordeling gekregen voor dit vraagstuk en hebben een bijzonder slechte indruk achtergelaten.

OPGAVE 5

- a) De gegeven spanningen vormen een complete spanningstensor. Essentieel is uiteraard dat schuifspanningen op onderling loodrechte oppervlakken even groot zijn (kennis CT1041):

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

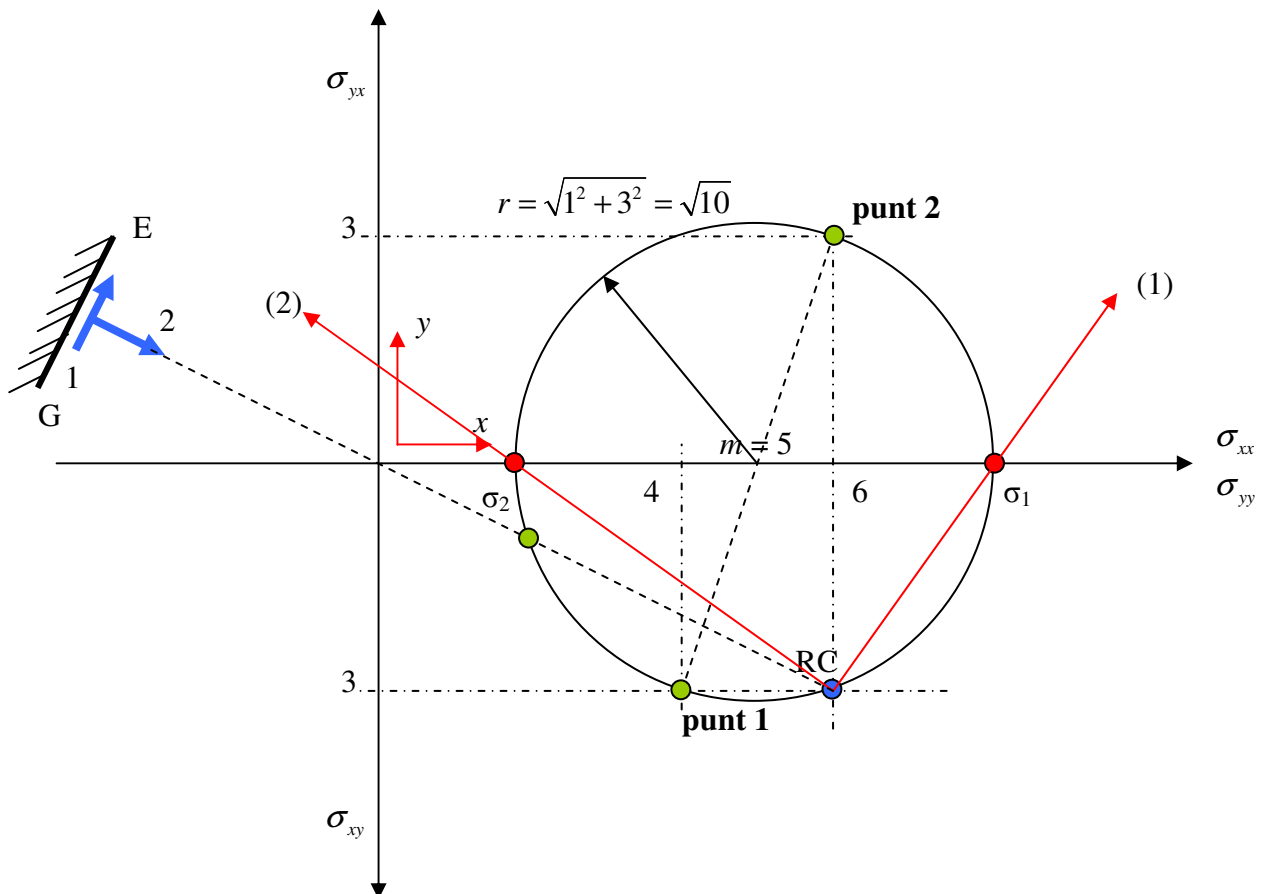


Dit levert twee punten op die op de cirkel van Mohr moeten liggen:

Punt 1 : $(\sigma_{xx}; \sigma_{xy}) = (4; 3)$

Punt 2 : $(\sigma_{yy}; \sigma_{yx}) = (6; 3)$

- b) De dwarscontractie coëfficiënt ν ligt tussen -1,0 en +0,5.



- c) Middelpunt m en straal r zijn eenvoudig te bepalen. Daarmee wordt voor de hoofdrichtingen gevonden:

$$\sigma_1 = m + r = 5 + \sqrt{10}$$

$$\sigma_2 = m - r = 5 - \sqrt{10}$$

- d) Neem de normaal van het vlak EG en trek een lijn evenwijdig aan deze normaal door het RC. Daar waar deze lijn de cirkel snijdt wordt het spanningspunt afgelezen (2; 1).

e) De hoofdspansingen zijn:

$$\sigma_1 = m + r = 5 + \sqrt{10}$$

$$\sigma_2 = m - r = 5 - \sqrt{10}$$

$$\sigma_3 = 0$$

Invullen in het von Mises criterium levert een veiligheid (let op het kwadraat van γ) :

$$\frac{\gamma^2}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{1}{3} f_y^2$$

$$\gamma = 1,35$$

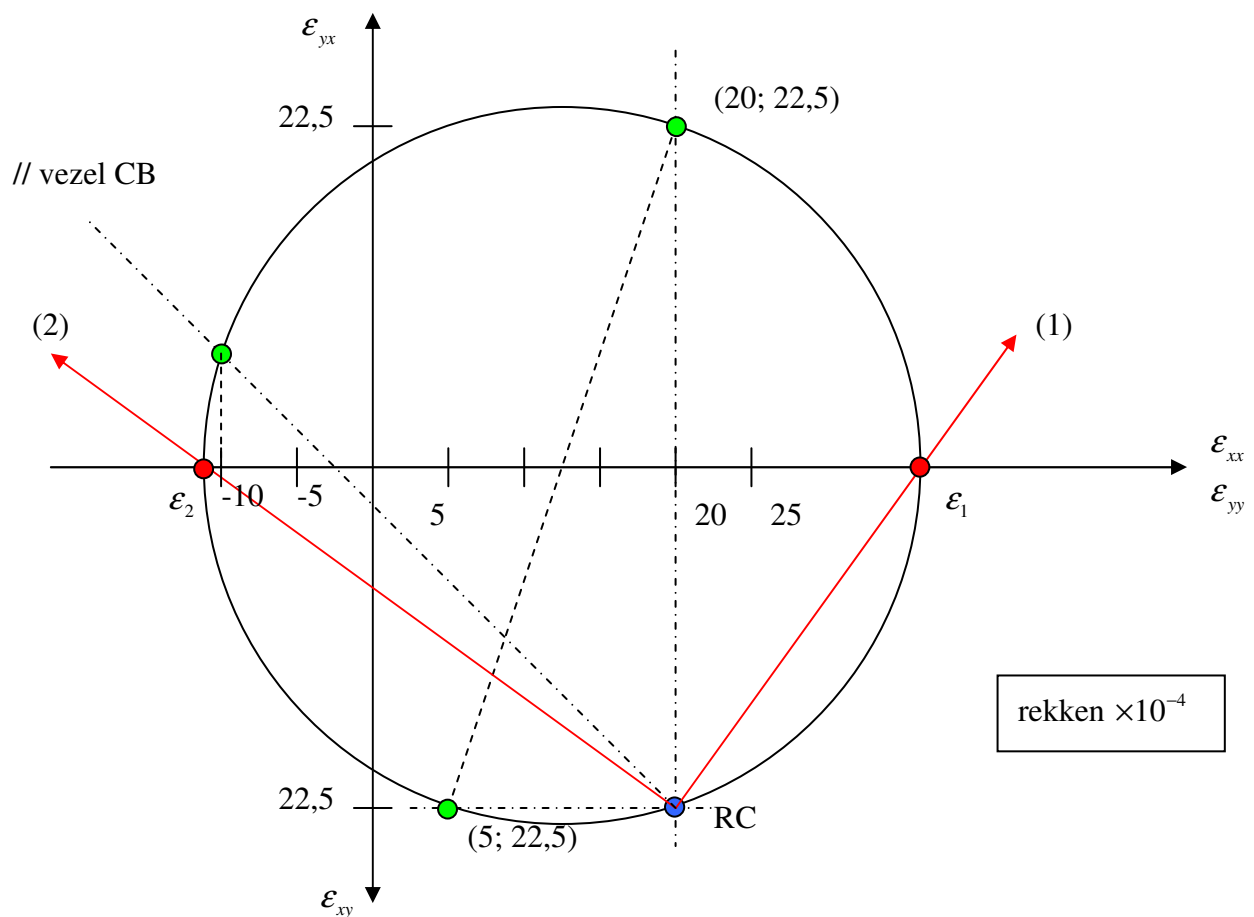
f) De rekcirkel kan worden gevonden door de punten 1 en 2 te transformeren van spanningen naar rekken of door de hoofdspansingen te transformeren naar hoofdrekken. De eerste optie levert voor de rekken:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2000} \left(4 - \frac{1}{2} \times 6 \right) = 0,0005 = 5,0 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2000} \left(6 - \frac{1}{2} \times 4 \right) = 0,002 = 20,0 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{3}{2000} = 0,00225 = 22,5 \times 10^{-4}$$

Hiermee is de rekcirkel te tekenen.



Voor vezels evenwijdig aan AB kan op de horizontale as de rek in de vezelrichting worden afgelezen:

$$\varepsilon^{AB} = -10 \times 10^{-4}$$

De lengteverandering van AB wordt hiermee:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l}{10\sqrt{2}} = -10 \times 10^{-4}$$
$$\Delta l = -10\sqrt{2} \times 10 \times 10^{-4} = -14,4 \text{ mm}$$

Het gaat hier dus om een verkorting.

Opmerkingen:

Bestudeer de theorie, alleen zo kun je blunders voorkomen zoals:

- een spanningstensor is symmetrisch dus schrijf niet iets doms op
- een 2^e orde tensor is geen vector dus ga geen onzinnige handelingen volgens Pythagoras uitvoeren met rekken
- de richting voor spanningen in de cirkel van Mohr is de normaal van het vlak waarop de spanningen werken
- de richting voor rekken in de cirkel van Mohr is de vezelrichting
- von Mises criterium is kwadratisch in de spanning
- Richtingen-Centrum RC ligt altijd op de cirkel
- De hoofdrichtingen voor spanningen zijn gelijk aan de hoofdrichtingen voor rekken voor een homogeen isotroop materiaal. Dat betekent dat het RC in beide cirkels op dezelfde plek (relatief) op de cirkel moet liggen.

BLUNDERS t.a.v. de theorie worden zwaar aangerekend, je hoort de theorie te kennen en daar wordt je op afgerekend!