

UITWERKING MET ANTWOORDEN

Opgave 1

- a) Drie rekstrookjes
- b) Onder hoeken van 45 graden
- c) Tussen $0,5l$ en $0,7l$ (basisgevallen van Euler)
- d) (1) : Nee de vergrotingsfactor is niet exact voor buigzame staven, wel een goede benadering
 (2) : De transcendente vergelijking waarmee de kniklast kan worden bepaald is geen gesloten uitdrukking. Een goede benadering levert wel een bruikbare gesloten formule op, de zogenaamde rho-formule van Newmark.
- e) Teken de vervormde ligger, let op de temperatuur wordt aan de onderzijde verhoogd. De liggerdelen moeten boven de steunpunten zonder knikken aansluiten. Hiervoor zijn de getekende overgangsmomenten noodzakelijk. De richting van deze momenten kunnen worden gebruikt om de M-lijn te schetsen.



- f) De momentenlijn t.g.v. alleen de temperatuurbelasting bestaat uit louter rechte stukken.



- g) Bepaal eerst het steunpuntmoment in B:

$$\frac{ql_1^3}{24EI} - \frac{M_B l_1}{3EI} = \frac{M_B l_2}{3EI} - \frac{\frac{1}{2} M_B l_2}{6EI} \Leftrightarrow M_B = \frac{25l_1^3}{2(4l_1 + 3l_2)} = 128 \text{ kNm}$$

Bepaal de oplegreactie in A:

$$A_v = \frac{1}{2} ql_1 - \frac{M_B}{l} = 84 \text{ kN} \uparrow$$

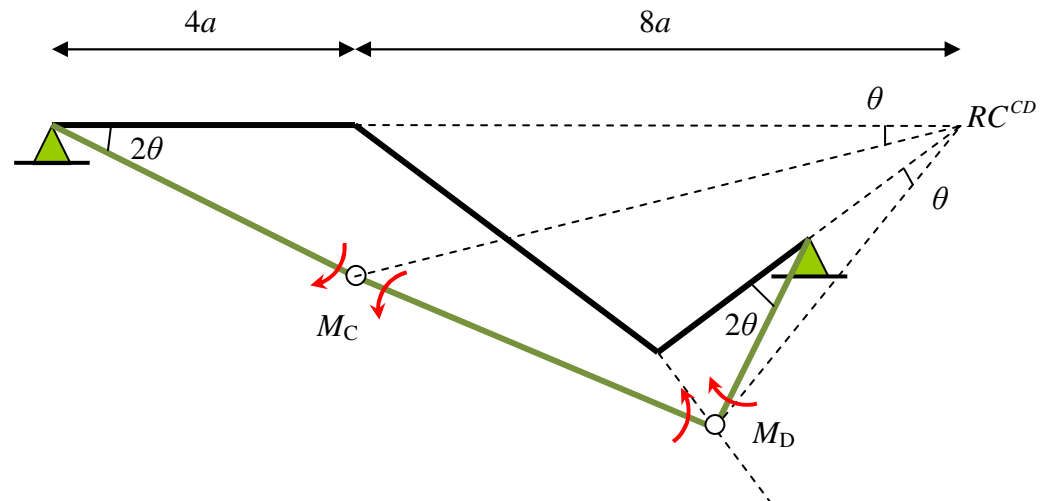
Hieruit volgt (gebruik oppervlak V-lijn) :

$$M_{\text{max - veld AB}} = \frac{1}{2} A_v \left(\frac{A_v}{q} \right) = 141,12 \text{ kNm}$$

Opgave 2

- a) Dit is een constructie met verplaatsbare knopen. Door alle starre verbindingen te vervangen door scharnieren ontstaat een mechanisme met een vrijheidsgraad. Alle staven zullen roteren en deze starre rotatie wordt met de hybride methode meegenomen in de vormveranderingsvoorwaarden t.p.v. de staafaansluitingen. Met een extra evenwichtsvoorwaarde in de vorm van een virtuele arbeidsvergelijking kunnen de twee overgangsmomenten en de vrijheidsgraad van het mechanisme (rotatie) worden opgelost.

Het mechanisme is hieronder getekend samen met de gekozen richtingen voor de overgangsmomenten.



- b) De twee vormveranderingsvoorwaarden zijn en de virtuele arbeidsvergelijking zijn:

$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{CD} : \frac{q(4a)^3}{24EI} - \frac{M_C 4a}{3EI} - 2\theta = \frac{M_C 5a}{3EI} - \frac{M_D 5a}{6EI} + \theta$$

$$\varphi_D^{CD} = \varphi_D^{DB} : -\frac{M_C 5a}{6EI} + \frac{M_D 5a}{3EI} + \theta = -\frac{M_D 2\frac{1}{2}a}{3EI} + 2\theta$$

$$\delta A = 0 : M_C \times 2\delta\theta + M_C \times \delta\theta + M_D \times \delta\theta - M_D \times 2\delta\theta + 4aq \times 2a \times 2\delta\theta = 0$$

Na vereenvoudigen levert dit stelsel als oplossing:

$$M_C = -208 \text{ kNm}; M_D = 32 \text{ kNm}; \theta = \frac{19}{375} = 0,05067 \text{ rad}$$

- c) De momentenlijn heeft een parabolisch verloop over AC en voor de rest een lineair verloop. De dwarskrachtenlijn volgt uit de helling van de momentenlijn. Hier mogen geen blunders in voorkomen. Let op de vervormingstekens en schrijf de waarden erbij.
- d) Een mogelijke oplossingsroute:
- Bepaal de verticale oplegreactie in A m.b.v. de momentensom om C voor het vrijgemaakte deel AC.
 - Door vervolgens de momentensom om B te bepalen van de gehele constructie wordt de horizontale oplegreactie in A gevonden.
 - Uit het horizontale en verticale evenwicht volgen de oplegreacties in B.

$$B_V = 30 \text{ kN } (\uparrow); B_H = 18\frac{2}{3} \text{ kN } (\rightarrow)$$

Merk op: In staaf DB treedt zowel N als V op (geen pendel). De N is te bepalen met de B_V en de V , deze N werd echter niet gevraagd.

- e) De horizontale verplaatsing van D is $2\theta \times 1,5a = 0,076 \text{ m } (\rightarrow)$

Opgave 3

- a) De constructie is tweevoudig statisch onbepaald en het betreft een constructie met niet-verplaatsbare knopen (geschoord). Een eerste orde berekening houdt geen rekening met de invloed van de vervormde stand op het evenwicht. De verticale puntlasten kunnen daarom achterwege worden gelaten. Staaf AB is in feite verend ingeklemd in de staven AD en BD. Oplossen kan m.b.v. twee vormveranderingsvergelijkingen maar er kan ook gekozen worden om gebruik te maken van een *vergeet-mij-nietje* voor een statisch onbepaalde ligger zoals weergegeven op het laatste formuleblad. De rotatieveren zijn te vinden uit de verende werking van de delen BD en AD.

$$r_1 = \frac{3EI}{l}; \quad \rho_1 = \frac{r_1 h}{EI}; \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = 3;$$

$$r_2 = \frac{3(2EI\sqrt{2})}{l\sqrt{2}}; \quad \rho_2 = \frac{r_2 h}{EI}; \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = 6;$$

$$M_A = \frac{\rho_1(\rho_2 + 6)}{8\rho_1(\rho_2 + 4) + 32(\rho_2 + 3)} \times Hh = \frac{3 \times 12}{8 \times 3 \times 10 + 32 \times 9} \times 88 \times 4 = 36 \text{ kNm}$$

$$M_B = \frac{\rho_2(\rho_1 + 6)}{8\rho_2(\rho_1 + 4) + 32(\rho_1 + 3)} \times Hh = \frac{6 \times 9}{8 \times 6 \times 7 + 32 \times 6} \times 88 \times 4 = 24 \text{ kNm}$$

Het moment t.p.v. de horizontale puntlast van 88 kN wordt hiermee:

$$M_E = \left| \frac{36 + 24}{2} - \frac{1}{4} \times 88 \times 4 \right| = 58 \text{ kNm} \quad (\text{los dit grafisch op m.b.v. de } M\text{-lijn})$$

- b) De eerste orde verplaatsing in E levert alleen een horizontale verplaatsing op. Met behulp van de gegeven *vergeet-mij-nietjes* volgt hiervoor:

$$u = \frac{88 \times 4^3}{48EI} - \frac{36 \times 4^2}{16EI} - \frac{24 \times 4^2}{16EI} = 0,0573 \text{ m} \quad (\rightarrow)$$

- c) De 1^e orde dwarskracht van staaf BD volgt uit de helling van de M-lijn, deze is:

$$V = \frac{24}{4\sqrt{2}} = 4,24 \text{ kN} \quad (\text{de } V \text{ van de andere steunende staaf werd ook goedgekeurd})$$

- d) De bokconstructie is geschoord aangezien de invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd. Staaf AB is daarom een geschoorde, aan twee zijden, verend ingeklemde staaf. De rho-formule is het model voor het bepalen van de kniklast.
- e) De kniklast volgt uit:

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \frac{\pi^2 EI}{h^2} = \frac{17}{8} \frac{\pi^2 EI}{h^2} = 1310 \text{ kN} \quad (\pi^2 = 10 \Rightarrow 1328 \text{ kN})$$

- f) De 2^e orde uitbuiging mag worden afgeschat met de vergrotingsfactor. Hiervoor is de verticale belasting van belang die op de kolom AB werkt. Als punt B horizontaal zou kunnen verplaatsen moet de aanpendelende belasting in rekening worden gebracht. Echter er is gesteld dat de invloed van de normaalkrachtvervorming niet in beschouwing hoeft te worden genomen. De bokconstructie is vormvast en alle hoekpunten blijven daarom op een plaats. Dat betekent dat de starre kolom niet scheef kan gaan staan en waardoor de puntlast op deze starre kolom niet een horizontale kracht kan genereren die moet worden

opgenomen in de vorm van extra verticale belasting op AB (de zgn aanpendelende belasting) . De vergrotingsfactor is daarom:

$$n = \frac{F_k}{F} = \frac{1300}{100} = 13 \Rightarrow \frac{n}{n-1} = \frac{13}{12} = 1,083$$

$$u_2 = \frac{n}{n-1} u_1 = 1,083 \times 0,057 = 0,062 \text{ m}$$

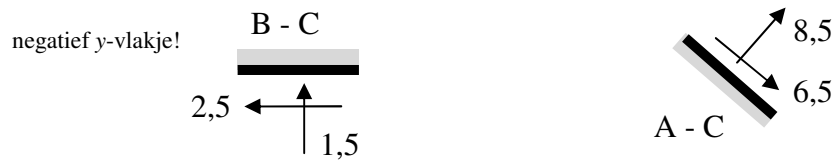
Fouten met de aanpendelende belasting werden door de vingers gezien aangezien dit aspect in deze toepassing redelijk verstopt was.

g) Hoewel niet exact, kan hier worden volstaan met:

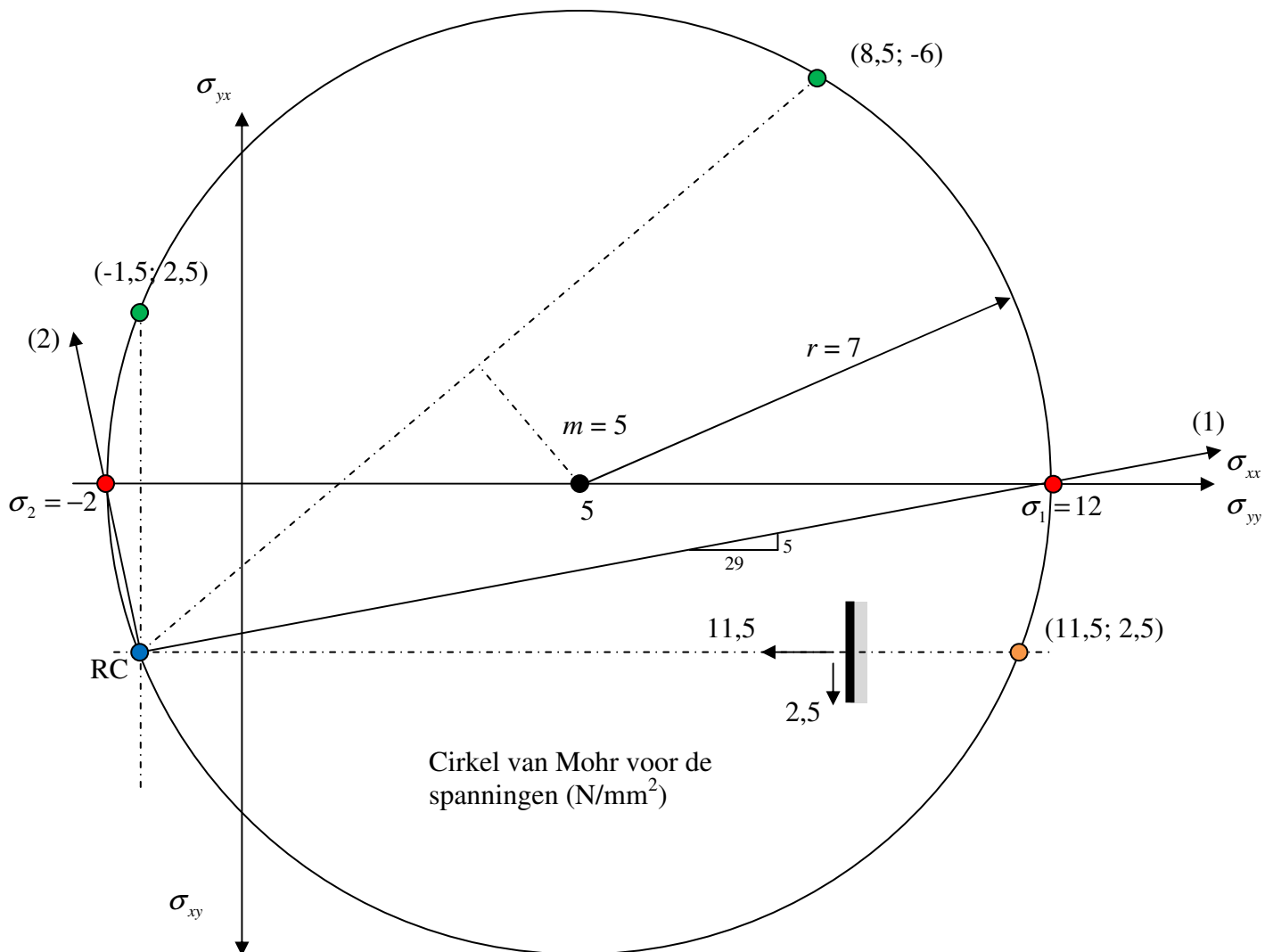
$$V_{\text{BD-2}} = V_{\text{BD-1}} \times \frac{n}{n-1} = 4,59 \text{ kN}$$

Opgave 4

- a) Op de vlakken AC en BC werken de gegeven spanningen zoals hieronder is weergegeven.



- b) De cirkel kan worden getekend met de gegeven spanningen.



Middelpunt van de cirkel en de straal kunnen worden berekend en zijn aangegeven in de tekening. Hiermee kunnen de hoofdspanningen worden bepaald:

$$\sigma_1 = m + r = 5 + 7 = 12,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = m - r = 5 - 7 = -2,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (\text{vlakspanning})$$

- c) De spanningstensor in het x-y-assenstelsel wordt weergegeven met:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,5 & 2,5 \\ 2,5 & -1,5 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

- d) De spanningen omzetten naar rekken levert:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(11,5 - \nu \times (-1,5)) = \frac{3}{2000}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(-1,5 - \nu \times 11,5) = \frac{-1}{1500}$$

Hieruit volgt: $\nu = 0,33$; $E = 8000 \text{ N/mm}^2$

Let op: Hier mogen **niet** de hoofdspansingen worden gebruikt, dat is een essentiële fout die streng wordt aangerekend.

- e) De gevraagde vezelrichting valt samen met hoofdrichting 1. De gevraagde rek is dus de hoofdrekk 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(12 - \nu \times (-2)) = 15,8 \times 10^{-4}$$

Let op: Hier **moeten** de hoofdspansingen worden gebruikt aangezien de gevraagde vezelrichting samenvalt met de hoofdrichting (1). Alternatief is om de tensortransformatieformules te gebruiken maar daar was (met reden) niet in voorzien op het formuleblad. Opmerken dat het hier om de hoofdrichting handelt was een cruciaal onderdeel van de toetsing.

- f) Von Mises toepassen met de bepaalde hoofdspansingen en opletten dat het hier om een *kwadratisch* spanningscriterium handelt. Het betreft een vlakspanningstoestand waarbij per definitie één van de hoofdspansingen gelijk is aan nul. Opnieuw sorteren van de hoofdspansingen levert (niet essentieel voor de berekening):

$$\sigma_1 = 12; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -2;$$

$$\frac{\gamma^2}{6} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right) \leq \frac{1}{3} f_y^2$$

$$\frac{\gamma^2}{6} (144 + 4 + 196) \leq \frac{1}{3} \times 100$$

$$\frac{172\gamma^2}{3} \leq \frac{100}{3} \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{\frac{100}{172}} = 0,76 \quad (\text{onveilig})$$

De veiligheid is 0,76 hetgeen onvoldoende is.