

UITWERKING MET ANTWOORDEN

Opgave 1

Situatie 1 : Antwoord **d)**

Situatie 2 : Antwoord **c)**

Situatie 3 : Antwoord **b)**

Opgave 2

- a) Zie voorbeeld 3 van hoofdstuk in het dictaat.
- b) Idem.
- c) Het rekenmodel is de starre staaf, horizontaal gesteund door de translatieveer, en belast met de belasting op de staaf EN de aanpendelende belasting. Essentieel is dat bij de bepaling van de aanpendelende belasting rekening wordt gehouden met de lengte van de pendels waarop de belasting staat. De totale belasting op het rekenmodel wordt hiermee:

$$F_{tot} = F + \frac{F}{1,5a} 3a + \frac{F}{3a} 3a + \frac{F}{1,5a} 3a = 6F$$

De kniklast van dit model kan eenvoudig worden bepaald met:

$$F_k = k \times 3a = k = \frac{16}{125} \frac{EA}{a} \times 3a$$

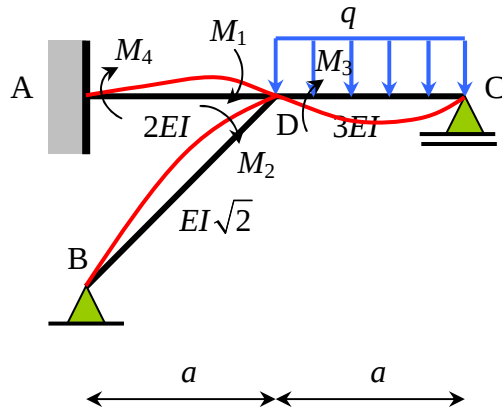
$$F_k = 6F = k = \frac{16}{125} \frac{EA}{a} \times 3a$$

$$F = \frac{8}{125} EA = \frac{8 \times 20000}{125} = 1280 \text{ kN}$$

- d) De horizontale veer kan nooit een schuine staaf vervangen. Door het verlengen van de schuine staaf ontstaat niet alleen een horizontale kracht die de constructie overeind wil houden maar er ontstaat ook een extra verticale kracht die de constructie in de verplaatste stand wil drukken (versterkend effect). Dit effect wordt in dit model niet meegenomen. Voor de fijn slijpers; de veer is een tweede orde tensor en deze kan niet als een vector worden behandeld.

Opgave 3

- a) De constructie in situatie 1 is drievoudig statisch onbepaald en heeft **niet-verplaatsbare** knopen. De richting van de aansluitende momenten zijn getekend zoals ze in werkelijkheid zullen werken op de uiteinde van de staven.



$$M_1 + M_2 + M_3 = 0 \Leftrightarrow M_3 = -(M_1 + M_2)$$

De aansluitende momenten op knoop D moeten in evenwicht zijn. Zodoende kan een van de onbekende momenten op knoop D worden uitgedrukt in de overige momenten. Vanwege het feit dat de knopen niet verplaatsen is ook duidelijk dat het moment bij de inklemming in A de helft is in grootte van het moment in D in staaf AD ($\varphi_A = 0$).

Uiteindelijk resteren zo twee vergelijkingen met twee onbekenden. Het statisch bepaalde hoofdsysteem bestaat louter en alleen uit liggertjes op twee steunpunten met de aangegeven onbekende momenten op de uiteinden van de staven.

- b) Er zijn drie vormveranderingsvergelijkingen nodig. Echter één vergelijking is al gebruikt. In de resterende twee vergelijkingen wordt direct het knoopenevenwicht van D verwerkt:

$$\varphi_D^{AD} = \varphi_D^{DC} : \frac{\frac{1}{2} M_1 a}{6 \times 2EI} - \frac{M_1 a}{3 \times 2EI} = -\frac{(M_1 + M_2) a}{3 \times 3EI} - \frac{qa^3}{24 \times 3EI}$$

$$\varphi_D^{AD} = \varphi_D^{DB} : \frac{\frac{1}{2} M_1 a}{6 \times 2EI} - \frac{M_1 a}{3 \times 2EI} = -\frac{M_2 a \sqrt{2}}{3 \times EI \sqrt{2}}$$

Opschonen levert:

$$17M_1 + 8M_2 = qa^2$$

$$3M_1 - 8M_2 = 0$$

Elimineren van M_2 levert: $M_1 = \frac{1}{20} qa^2$; $M_2 = \frac{3}{160} qa^2$; $M_3 = -\frac{11}{160} qa^2$; $M_4 = \frac{1}{40} qa^2$;

Invullen van de gegevens levert voor de momenten:

$$M_1 = 912 \text{ kNm}$$

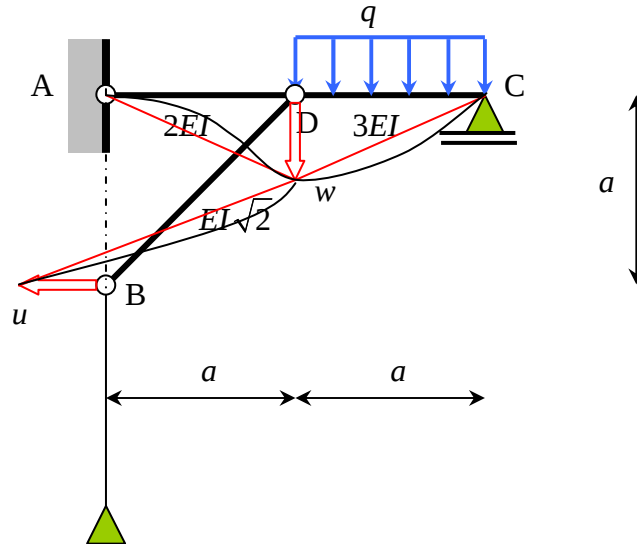
$$M_2 = 342 \text{ kNm}$$

$$M_3 = -1254 \text{ kNm}$$

$$M_4 = 456 \text{ kNm}$$

- c) Teken een nette momentenlijn inclusief vervormingstekens en de waarden voor een aantal karakteristieke punten.

- d) In situatie 2 kan de constructie in steunpunt B horizontaal verplaatsen. Er ontstaat nu een constructie met verplaatsbare knopen. Het statisch bepaald hoofdsysteem levert nu liggers op twee steunpunten op waarvan de knopen kunnen verplaatsen. Oplossen kan met de hybride oplossingsmethode waarbij de starre rotatie van het mechanisme dat ontstaat als alle starre verbindingen worden vervangen door scharnieren, een extra onbekende oplevert. Deze kan worden bepaald met de extra eis dat het mechanisme in evenwicht moet zijn onder de gegeven belasting en de statisch onbepaalden.
- e) Het mechanisme is hieronder getekend. Essentieel is dat voor iedere staaf de grootte van de rotatie wordt vastgesteld en om welk punt de staaf roteert.



- ☐ Staaf AD roteert om A met een hoek θ (rechtsom)
- ☐ Staaf DC roteert om C met een hoek θ (linksom)
- ☐ Staaf BD roteert om A met een hoek θ (rechtsom)

De vervormde constructie is weergegeven t.o.v. de verplaatsing van het starre mechanisme. Er zijn drie vormveranderingsvergelijkingen noodzakelijk en een virtuele arbeidsvergelijking om de vier onbekenden op te lossen.

- f) Als dezelfde richtingen worden aangehouden van de vier onbekende momenten als in situatie 1 dan kunnen de vormveranderingsvergelijkingen eenvoudig worden overgenomen. Let er wel op dat het moment bij de inklemming nu niet gelijk is aan de helft van het moment aan de andere kant van staaf AD. Immers het betreft nu een probleem met verplaatsbare knopen! (zie de theorie).

$$\begin{aligned}
 \varphi_A^{AD} = 0 & : -\frac{M_4 a}{3 \times 2EI} + \frac{M_1 a}{6 \times 2EI} - \theta = 0 \\
 \varphi_D^{AD} = \varphi_D^{DC} & : \frac{M_4 a}{6 \times 2EI} - \frac{M_1 a}{3 \times 2EI} - \theta = -\frac{(M_1 + M_2)a}{3 \times 3EI} - \frac{qa^3}{24 \times 3EI} + \theta \\
 \varphi_D^{AD} = \varphi_D^{DB} & : \frac{M_4 a}{6 \times 2EI} - \frac{M_1 a}{3 \times 2EI} - \theta = -\frac{M_2 a \sqrt{2}}{3 \times EI \sqrt{2}} - \theta \\
 \delta A = 0 & : M_4 \times \delta\theta + M_1 \times \delta\theta - (-M_1 - M_2) \times \delta\theta + M_2 \times \delta\theta + (qa) \times \frac{1}{2} a \times \delta\theta = 0
 \end{aligned}$$

- g) Oplossen van dit stelsel gaat eenvoudig met de Grafische Rekenmachine (GR). Om het stelsel er vlot in te zetten worden de vergelijkingen eerst opgeschoond:

$$M_1 - 2M_4 - \frac{12EI}{a} \theta = 0$$

$$-20M_1 - 8M_2 + 6M_4 - \frac{144EI}{a} \theta = -qa^2$$

$$-2M_1 + 4M_2 + M_4 = 0$$

$$2M_1 + 2M_2 + M_4 = -\frac{1}{2} qa^2$$

Oplossen met de GR levert :

$$M_1 = -2480 \text{ kNm}$$

$$M_2 = -400 \text{ kNm}$$

$$M_3 = 2880 \text{ kNm}$$

$$M_4 = -3360 \text{ kNm}$$

$$\theta = 0,009422 \text{ rad}$$

Teken vervolgens een nette momentenlijn met de juiste vervormingstekens en zet de gevonden waarden in de M -lijn er bij.

- h) De horizontale verplaatsing is gelijk aan:

$$u = \theta \times a = 0,0377 \text{ m} \quad (\leftarrow)$$

Opgave 4

- a) De constructie is tweevoudig statisch onbepaald en het betreft een constructie met niet-verplaatsbare knopen (geschoord). Een eerste orde berekening houdt geen rekening met de invloed van de vervormde stand op het evenwicht. De verticale puntlast kan daarom achterwege worden gelaten. Oplossen kan m.b.v. twee vormveranderingsvergelijkingen maar er kan ook gekozen worden om gebruik te maken van een *vergeet-mij-nietje* voor een statisch onbepaalde ligger zoals weergegeven op het laatste formuleblad. De rotatieveren zijn eenvoudig te vinden uit de verende werking van de delen BC en AD.

$$r_1 = \frac{3EI}{l}; \quad \rho_1 = \frac{r_2 h}{EI}; \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = 3;$$

$$r_2 = \frac{3EI}{2l}; \quad \rho_2 = \frac{r_1 h}{EI}; \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \frac{3}{2};$$

$$M_A = \frac{\rho_1(\rho_2 + 6)}{8\rho_1(\rho_2 + 4) + 32(\rho_2 + 3)} \times Hh = \frac{3 \times 7,5}{8 \times 3 \times 5,5 + 32 \times 4,5} \times 92 \times 4 = 30 \text{ kNm}$$

$$M_B = \frac{\rho_2(\rho_1 + 6)}{8\rho_2(\rho_1 + 4) + 32(\rho_1 + 3)} \times Hh = \frac{1,5 \times 9}{8 \times 1,5 \times 7 + 32 \times 6} \times 92 \times 4 = 18 \text{ kNm}$$

Het moment t.p.v. de horizontale puntlast van 92 kN wordt hiermee:

$$M_E = \left| \frac{18 + 30}{2} - \frac{1}{4} \times 92 \times 4 \right| = 68 \text{ kNm} \quad (\text{los dit grafisch op m.b.v. de } M\text{-lijn})$$

- b) De 1^e orde horizontale oplegreactie in C volgt uit het evenwicht:

$$C_H = \frac{1}{2} \times 92 - \frac{30}{4} + \frac{18}{4} = 43 \text{ kN}$$

- c) De eerste orde verplaatsing in E levert alleen een horizontale verplaatsing op. Met behulp van de gegeven *vergeet-mij-nietjes* volgt hiervoor:

$$u = \frac{92 \times 4^3}{48EI} - \frac{18 \times 4^2}{16EI} - \frac{30 \times 4^2}{16EI} = 0,075 \text{ m} \quad (\rightarrow)$$

- d) Controle van de drukstaaf AB, dit is een geschoorde staaf met aan twee zijden een verende inklemming. Gebruik hiervoor de eerder bepaalde rotatieveerstijfheden. De knikcontrole van BC zal eigenlijk ook moeten worden uitgevoerd. In de vraagstelling staat echter dat we ons met name richten op staaf AB. Staaf AB is overigens niet maatgevend maar dat mag zelf worden gecontroleerd.

- e) De kniklast volgt uit:

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \frac{\pi^2 EI}{h^2} = 1044 \text{ kN} \quad (\pi^2 = 10 \Rightarrow 1058 \text{ kN})$$

- f) De 2^e orde uitbuiging mag worden afgeschat met de vergrotingsfaktor:

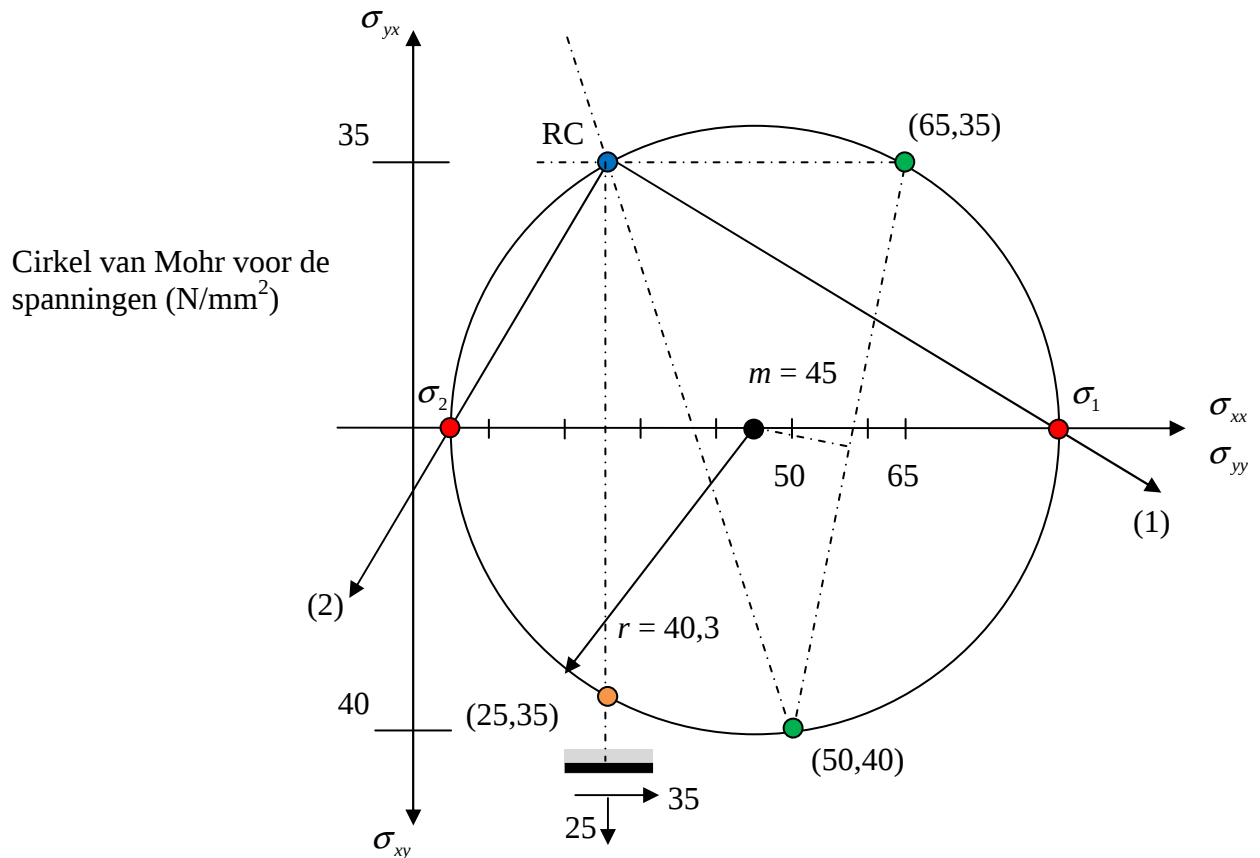
$$u_2 = \frac{n}{n-1} u_1 = 1,40 \times 0,075 = 0,105 \text{ m} \quad \text{met: } n = \frac{F_k}{300} = 3,48$$

- g) Een bovengrens voor het 2^e orde moment kan worden afgeschat met:

$$M_{E-2} = M_E + 0,105 \times 300 = 117,5 \text{ kNm}$$

Opgave 5

- a) De cirkel kan worden getekend met de gegeven spanningen.



Middelpunt van de cirkel en de straal kunnen worden berekend en zijn aangegeven in de tekening. Hiermee kunnen de hoofdspanningen worden bepaald:

$$\sigma_1 = m + r = 45 + 40,3 = 85,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = m - r = 45 - 40,3 = 4,7 \text{ N/mm}^2$$

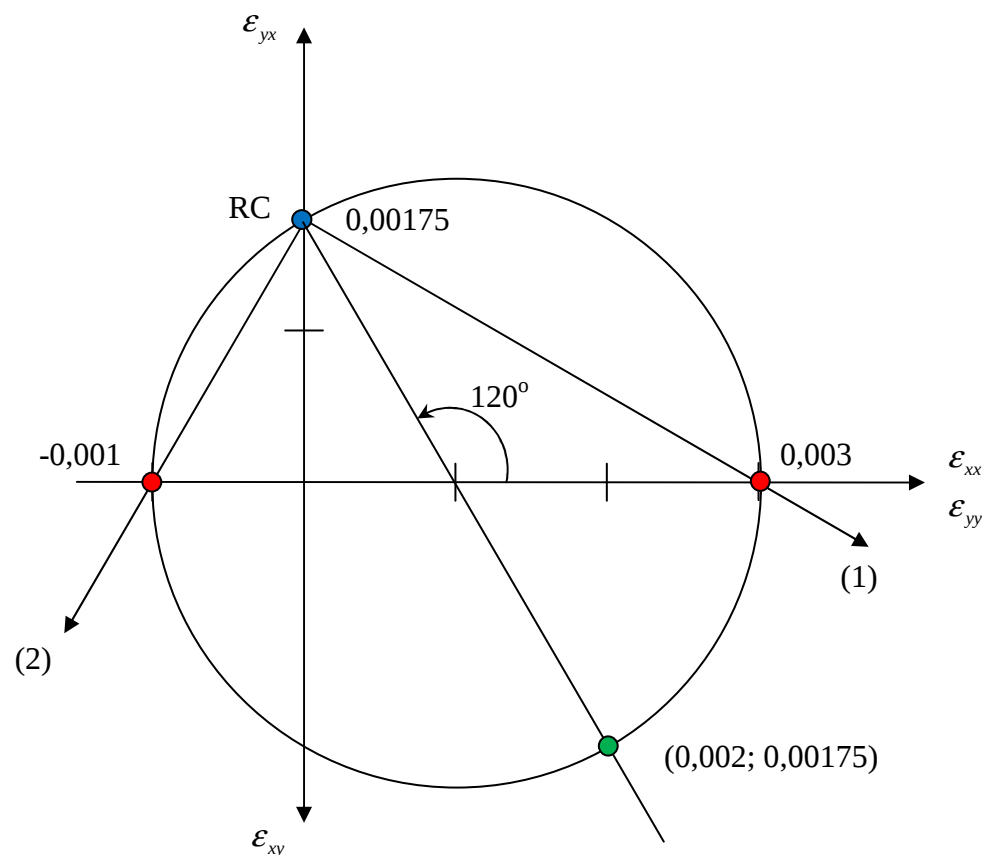
$$\sigma_3 = 0 \quad (\text{vlakspanning})$$

- b) Trek de normaal van vlak DC vanuit het RC en lees het snijpunt met de cirkel af. Een spanningspunt (25,35) wordt als voldoende nauwkeurig aangemerkt. Beide spanningen zijn positief. Teken de juiste richting van deze spanningen!
- c) De hoofdspanningen kunnen worden ingevuld in het von Mises criterium. De benodigde vloeispanning kan hiermee worden bepaald op 83 N/mm². Volgens de theorie van een vlakspanningstoestand is tenminste één van de hoofdspanningen nul!
- d) Van spanning naar rekcirkel kan eenvoudig door de hoofdspanningen om te rekenen en de relatieve positie van het RC in de spanningscirkel over te nemen in de rekcirkel. Immers de hoofdrichtingen voor de rekken zijn hetzelfde als de hoofdrichtingen voor de spanningen.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = 0,003$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = -0,001$$

Cirkel van Mohr voor de rekken



- e) Trek vanuit het RC een lijn evenwijdig aan de richting van de vezel en lees het op het snijpunt met de cirkel de rekken af. Op de horizontale as wordt de rek in de vezelrichting afgelezen. Op de verticale as wordt de helft van de afschuifvervorming afgelezen. De rek in deze vezel is gelijk aan 0,002.

Opmerking:

De gegeven spanningen komen van vlakjes die niet loodrecht op elkaar staan. Hoewel de spanningen dus wel afkomstig zijn van dezelfde spanningstoestand vormen deze samen niet een complete spanningstensor. In feite zijn er twee halve tensoren gegeven met ieder een eigen (lokaal) assenstelsel. Studenten die alle spanningen bij elkaar in een tensor hebben gepresenteerd hebben daarmee de theorie geweld aangedaan.