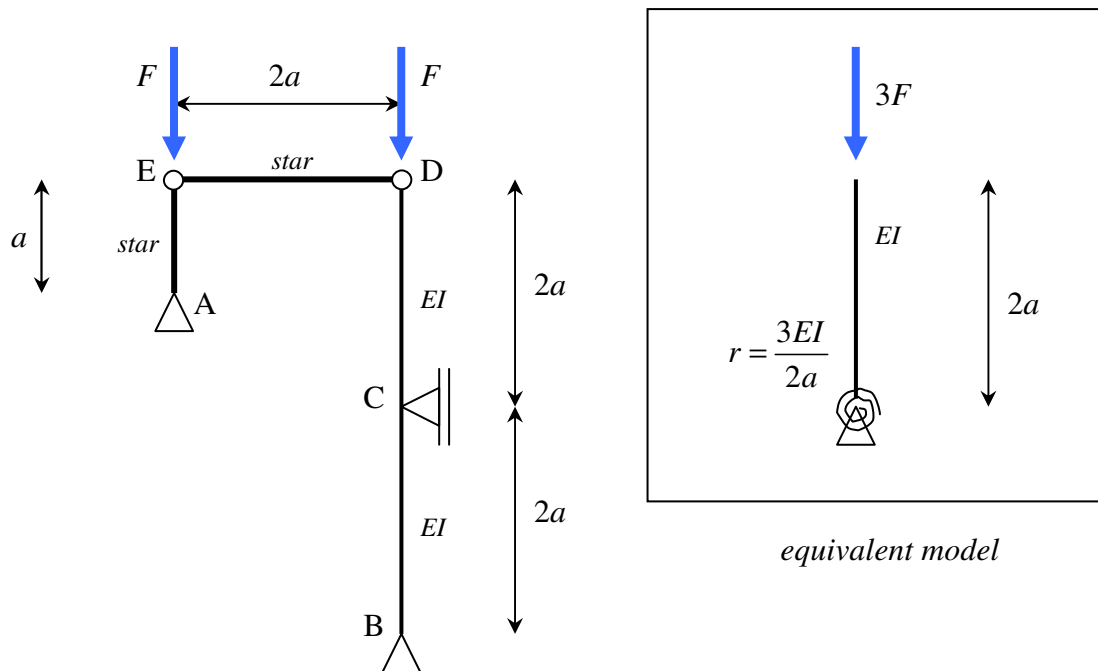


BEKNOPTE ANTWOORDEN

(geen modeluitwerking !)

OPGAVE 1

- a) Het model dat kan worden gebruikt is de verend ingeklemde buigzame staaf met een lengte $2a$ en rotatieveerstijfheid r . De equivalente last is $3F$ (*uitleg hieronder*):



De belasting op dit model bestaat uit de puntlast F op de buigzame staaf plus de bijdrage van de *aanpendelende belasting*. Hiervoor geldt de in de theorie afgeleide rekenregel (die niet exact is):

$$F_{tot} = F + \frac{F}{a} \times 2a = 3F$$

- b) De kniklast voor dit basis (verende) ongeschoorde knikgeval kan worden bepaald met:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{\frac{r}{2a}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{(2 \times 2a)^2}} \Leftrightarrow$$

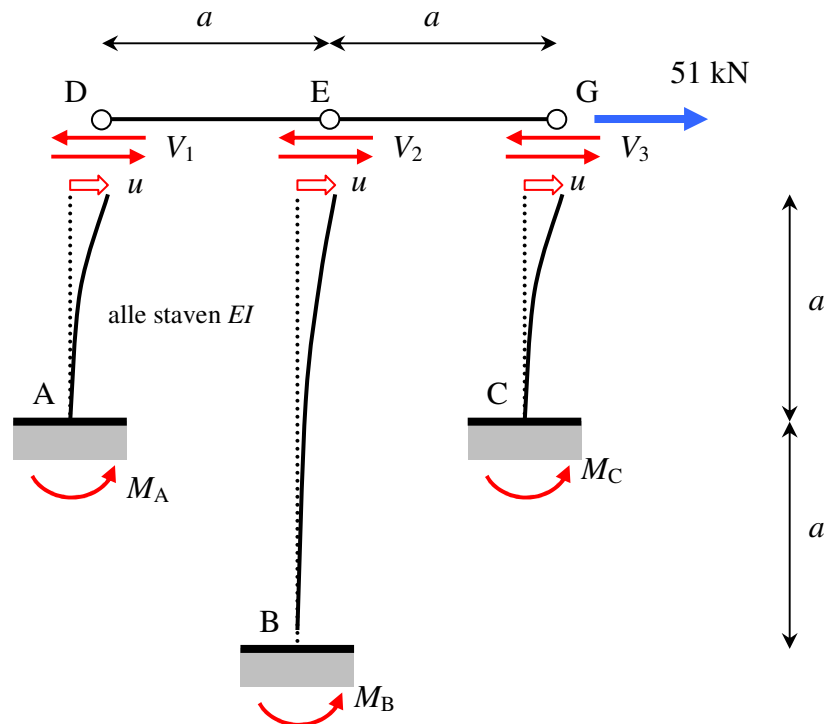
$$F_k = \frac{3\pi^2 EI}{4a^2 (\pi^2 + 12)} = 846 \text{ kN}$$

De maximale belasting op de constructie wordt hiermee:

$$F < 282 \text{ kN}$$

OPGAVE 2

- a) De enige vrijheidsgraad in dit systeem is de horizontale verplaatsing van de bovenregel. Als we dit probleem met de verplaatsingenmethode oplossen hebben we daarom één vergelijking nodig. Hiervoor nemen we de evenwichtsvergelijking van de krachts grootte in de richting van de vrijheidsgraad. Dat is in dit probleem het horizontale krachtenevenwicht van de bovenregel.



- b) De evenwichtsvergelijking voor de gehele bovenregel luidt:

$$-V_1 - V_2 - V_3 + 51,0 = 0$$

De dwarskrachten in de kolommen kunnen worden uitgedrukt in de vrijheidsgraad u :

$$V_1 = \frac{3EI}{a^3} \times u; \quad V_2 = \frac{3EI}{8a^3} \times u; \quad V_3 = \frac{3EI}{a^3} \times u;$$

De onbekende verplaatsing u kan nu worden opgelost:

$$u = \frac{8 \times 51,0 \times a^3}{51EI} = 0,0064 \text{ m}$$

$$V_1 = 24 \text{ kN}; \quad V_2 = 3 \text{ kN}; \quad V_3 = 24 \text{ kN}$$

- c) De krachten in de staven DE en EG volgen uit het knoopenevenwicht:

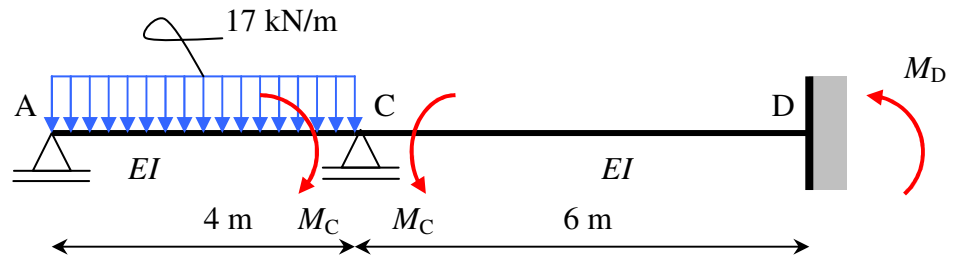
$$N^{DE} = 24 \text{ kN}; \quad N^{EG} = 27 \text{ kN} \quad (\text{trek})$$

- d) De inklemmingsmomenten kunnen worden bepaald met de bekende dwarskrachten:

$$M_A = 48 \text{ kNm}; \quad M_B = 12 \text{ kNm}; \quad M_C = 48 \text{ kNm}; \quad (\text{zie figuur})$$

OPGAVE 3

- a) De kolom is opgelegd op een horizontale rol. Cruciaal in dit model is dat hierdoor in deze kolom geen dwarskracht kan optreden en daardoor ook geen moment optreedt. Het moment in de ligger zal daarom links en rechts van de aansluiting met de kolom gelijk moeten zijn. Als er in de kolom geen moment kan komen dan kan deze ook niet krommen en blijft recht! Dit is een essentieel onderdeel van de schets!
- b) De kolom kan voor dit eerste deel van de vraag worden vervangen door een eenvoudige roloplegging. Hierdoor ontstaat een twee-voudig statisch onbepaalde constructie met niet-verplaatsbare knopen.



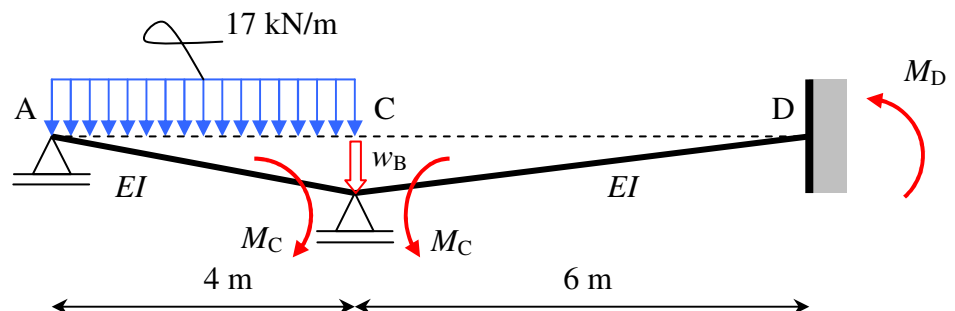
Oplossen met de krachtenmethode vereist twee vormveranderingsvoorwaarden. Voor deze basissituatie is echter bekend dat het inklemmingsmoment in D de helft is van het steunpuntmoment in C. Van deze handigheid mag gebruik worden gemaakt om de uitwerking te versnellen en daarmee is alleen de v.v.v. t.p.v. C noodzakelijk:

$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{CD} : \frac{-M_C \times 4,0}{3EI} + \frac{17,0 \times 4,0^3}{24EI} = \frac{M_C \times 6,0}{3EI} - \frac{\frac{1}{2} M_C \times 6,0}{6EI} \Leftrightarrow$$

$$M_C = 16 \text{ kNm}$$

$$M_D = 8 \text{ kNm}$$

- c) De M -lijn, compleet en zonder fouten.
- d) De V -lijn, compleet en zonder fouten.
- e) De N -lijn, compleet en zonder fouten.
- f) Als steunpunt B zakt ontstaat een systeem met verplaatsbare knopen. Alleen t.g.v. de steunpuntszetting zal een momentenverdeling ontstaan die tegengesteld is aan de hierboven aangenomen richtingen voor de buigende momenten. Er wordt hier gekozen om consequent met de richtingen uit b) te blijven werken. Het teken in de uitkomst zal laten zien of de aangenomen richtingen voor de momenten de juiste zijn.



- g) Essentieel is nu dat het inklemmingsmoment in D niet meer gelijk zal zijn aan de helft van het steunpuntsmoment in C immers het betreft hier nu een probleem met verplaatsbare knopen! De twee vormveranderingsvoorwaarden zijn:

$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{CD} : \frac{-M_C \times 4,0}{3EI} + \frac{17,0 \times 4,0^3}{24EI} - \frac{w_B}{4,0} = \frac{M_C \times 6,0}{3EI} - \frac{M_D \times 6,0}{6EI} + \frac{w_B}{6,0}$$

$$\varphi_D = 0 : \frac{-M_C \times 6,0}{6EI} + \frac{M_D \times 6,0}{3EI} + \frac{w_B}{6,0} = 0$$

- h) Oplossen levert:

$$M_C = -104,0 \text{ kN}$$

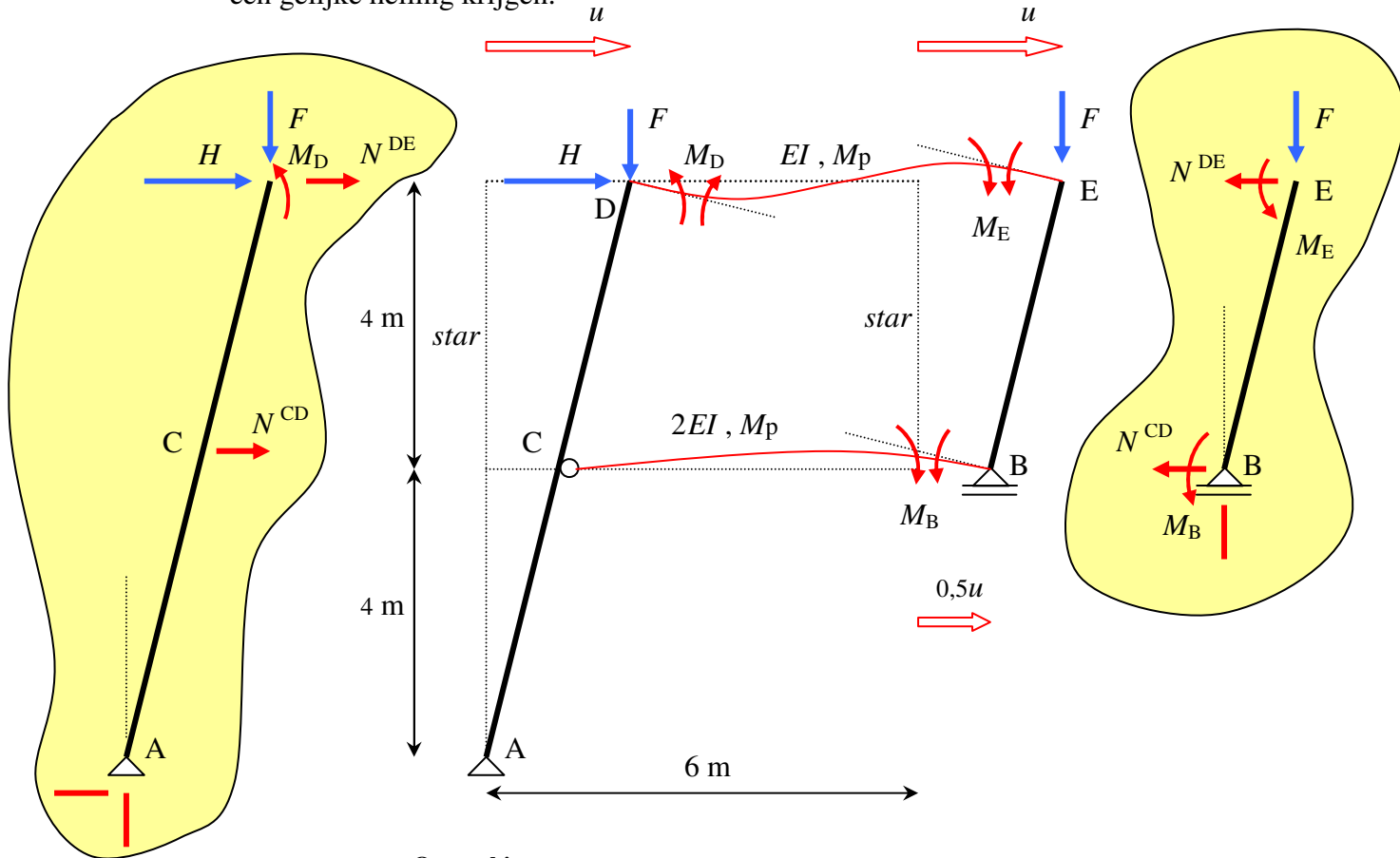
$$M_D = -108,67 \text{ kN}$$

De aangenomen richtingen voor de statisch onbepaalden waren beiden niet juist. In werkelijkheid werken M_C en M_D de andere kant op als is aangenomen.

Teken een correcte momentenlijn inclusief de vervormingstekens en zet de waarden erbij.

OPGAVE 4

- a) De constructie bestaat uit twee op druk belaste starre staven. Door de constructie in de verplaatste stand te zetten en de evenwichtsvergelijking van de vrijgemaakte onderdelen in de verplaatste stand op te stellen kunnen de vragen worden beantwoord. Essentieel is dat de oplegging in B een roloplegging is. Hierdoor zullen de starre staven ACD en BE een gelijke helling krijgen.

**Opmerking:**

Het vrijgemaakte model is hierboven weergegeven. De horizontale elementen zijn niet getekend in de vrijgemaakte stand. Deze moeten uiteraard ook in evenwicht zijn. De momenten M_D en M_E zijn gelijk en door de momenten in de regels zullen er in de aansluiting t.p.v. D, E en B ook dwarskrachten optreden. In de opgave stond echter uitdrukkelijk vermeld dat de invloed van de dwarskracht mocht worden verwaarloosd.

Momentenevenwicht van de beide op druk belaste elementen om resp. A en B levert:

$$\begin{aligned} F \times u + 8 \times H + N^{DE} \times 8 + N^{CD} \times 4 - M_D &= 0 \\ F \times \frac{1}{2}u - N^{DE} \times 4 - M_E - M_B &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Het horizontale evenwicht van de rechter starre staaf vereist:

$$N^{DE} + N^{CD} = 0$$

Door dit te verwerken in (1) en na eliminatie van de normaalkracht ontstaat:

$$\begin{aligned} F \times u + 8 \times H + N^{DE} \times 4 - M_D &= 0 \\ F \times \frac{1}{2}u - N^{DE} \times 4 - M_E - M_B &= 0 \\ \hline \frac{3}{2}Fu + 8H - M_B - M_D - M_E &= 0 \end{aligned} \quad +$$

Dit is de gezochte evenwichtsvergelijking. De momenten in B, D en E kunnen uitgedrukt worden in de verplaatsing u van de bovenregel. In de *elastische fase* geldt:

$$M_D = M_E = \frac{6EI}{6,0} \times \frac{u}{8,0} = EI \times \frac{u}{8,0}$$

$$M_B = \frac{3 \times 2EI}{6,0} \times \frac{u}{8,0} = EI \times \frac{u}{8,0}$$

De veerstijfheden in E en B zijn hiermee gelijk. Dit houdt in dat in B en E de horizontale regels bij dezelfde verplaatsing u volplastisch worden. In de *plastische fase* geldt voor deze momenten:

$$M_D = M_E = M_B = M_p$$

Elastische fase:

$$\frac{3}{2}Fu + 8H - \frac{3EI}{8}u = 0$$

Plastische fase:

$$\frac{3}{2}Fu + 8H - 3M_p = 0$$

De volgende vragen kunnen allen worden beantwoord m.b.v. deze twee vergelijkingen.

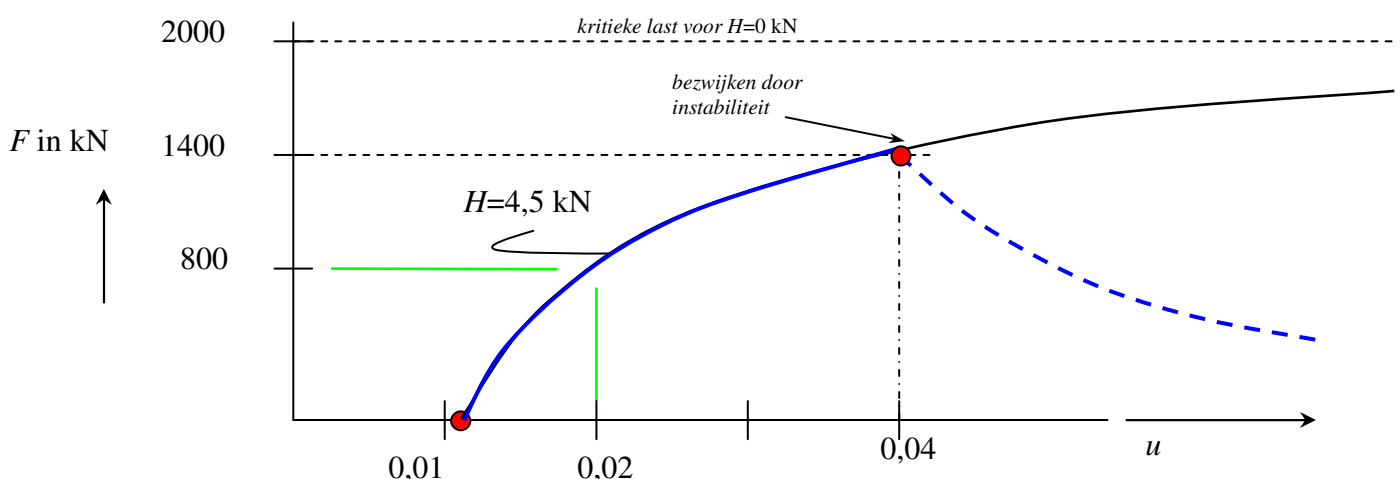
- b) Kniklast: $F_k = 2000$ kN
- c) 1^e orde uitwijking voor $H = 4,5$ kN : $u_1 = 0,012$ m
- d) Maximale horizontale belasting volgens een 1^e orde berekening : $H_p = 15$ kN
- e) 2^e orde uitwijking voor $H = 4,5$ kN en $F = 800$ kN : $u_2 = 0,020$ m (controleer met $\frac{n}{n-1}$)
- f) Bezwijken voor $u = u_p$ (plastisch) :

$$\frac{3}{2}F_c \times u_p + 8H - 3M_p = 0 \quad \text{met: } u_p = \frac{8 \times 40}{8000} = 0,04 \text{ m}$$

$$F_c = 1400 \text{ kN}$$

$$\text{Controle met Merchant : } \frac{1400}{2000} + \frac{4,5}{15} = 1,0$$

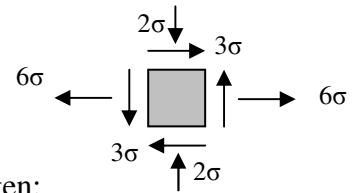
g) Last-zakkingsdiagram:



OPGAVE 5

- a) De gegeven spanningen vormen een complete spanningstensor. Essentieel is uiteraard dat schuifspanningen op onderling loodrechte oppervlakken even groot zijn (kennis CT1041):

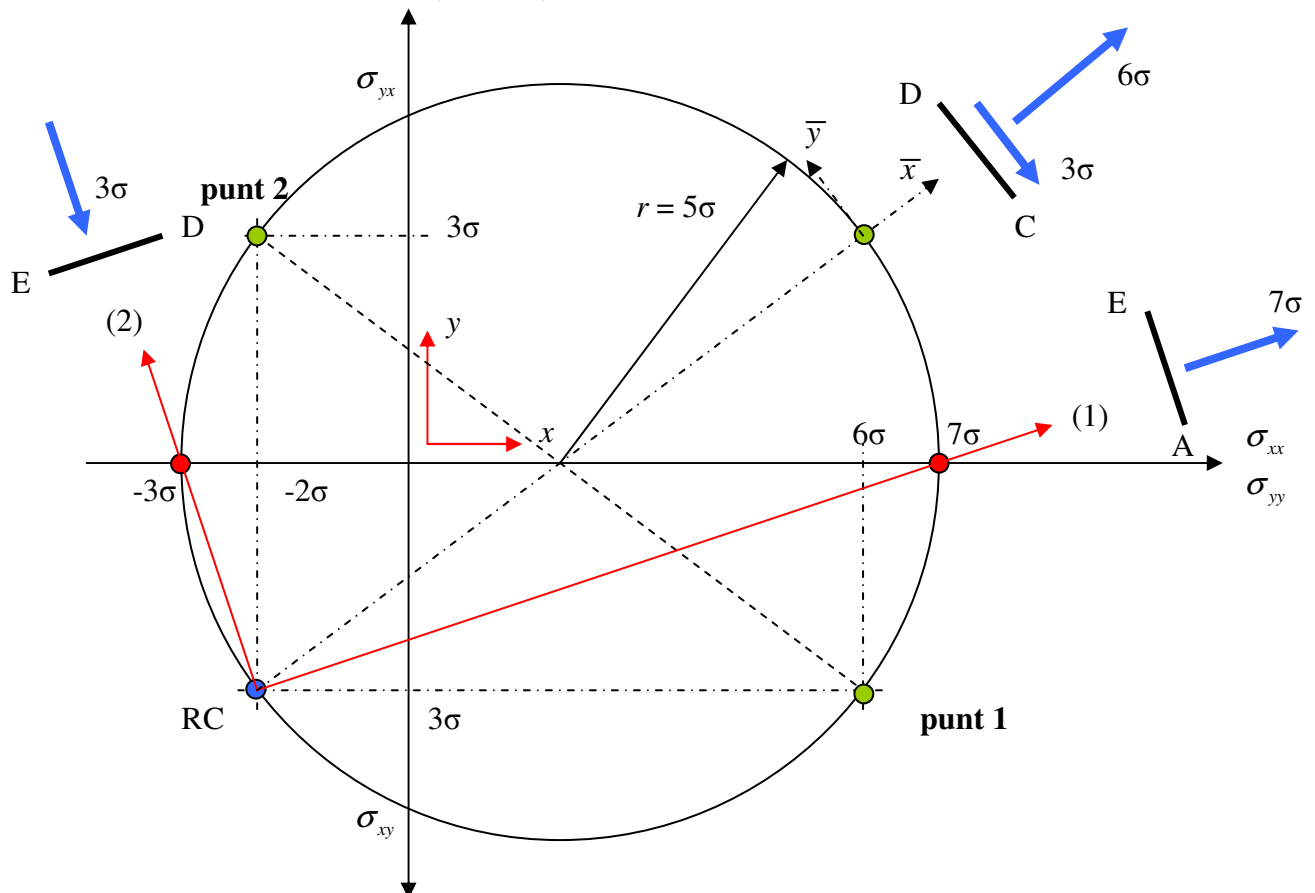
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\sigma & 3\sigma \\ 3\sigma & -2\sigma \end{bmatrix}$$



Dit levert twee punten op die op de cirkel van Mohr moeten liggen:

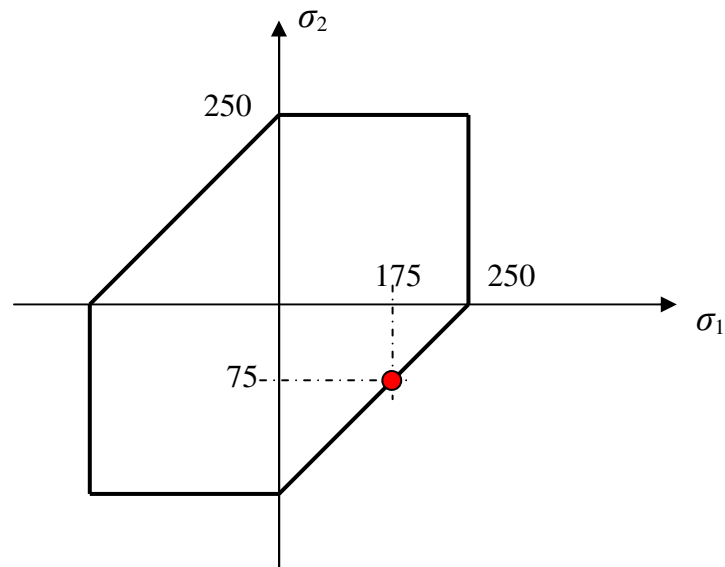
Punt 1 : $(\sigma_{xx}; \sigma_{xy}) = (6\sigma; 3\sigma)$

Punt 2 : $(\sigma_{yy}; \sigma_{yx}) = (-2\sigma; 3\sigma)$



- b) ED en EA zijn vlakken met de normaal in de hoofdrichtingen. Op deze vlakken werkt alleen de hoofdspanning (normaalspanning). De spanning op vlak DC kan worden gevonden door vanuit het RC een lijn te trekken evenwijdig aan de normaal van DC. Waar deze lijn de cirkel snijdt wordt het spanningspunt afgelezen. Als de uitwendige normaal als lokale $\bar{x}$ -as wordt gekozen bestaat het spanningspunt uit de componenten $(\sigma_{\bar{xx}}; \sigma_{\bar{xy}})$.
- c) Dit materiaal gaat bezwijken volgens Tresca indien de grootste schuifspanning gelijk is aan 125 N/mm^2 . Dit gebeurt bij een spanning $\sigma = 25 \text{ N/mm}^2$.

- d) De vloeicontour kan in de (1) - (2) ruimte worden weergegeven als het snijvlak van de Tresca-hexagon met het (1) - (2) vlak. De huidige spanningssituatie is met een cirkel aangegeven.



- e) De grootste rek is de hoofdrek met vezels in de (1)-richting. Deze rek kan worden bepaald met:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = 0,001292$$