

BEKNOPTTE UITWERKING

VRAAGSTUK 1 : Theorie

Deel 1

- a) Voor starre systemen geldt dat de (aanhangelende) belasting van model (a) kan worden vervangen door een equivalente belasting op model (b) volgens:

$$F_{eq} = \sum_{i=1}^n \frac{F}{l_i} \times l$$

Met een eenvoudig vrijgemaakt model kan deze uitdrukking worden aangetoond, laat dat zien! (zie dictaat hoofdstuk 3)

- b) De equivalente belasting wordt hiermee:

$$F_{eq} = \frac{F}{\frac{3}{4}l} \times l + \frac{F}{\frac{1}{4}l} \times l + \frac{F}{\frac{2}{4}l} \times l + F = \frac{25}{3}F$$

Deel 2

- c) Zie dictaat
- d) Neem de ligger-as als x-as en een z-as omlaag zoals gebruikelijk. De spanningstensor wordt hiermee:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 160 & 60 \\ 60 & 0 \end{bmatrix}$$

Het bijzondere van deze vlakspanning is de afwezigheid van een normaalspanning op het z-vlakje. Het *vezelmodel* dat gehanteerd wordt volgens de liggertheorie kan deze spanning niet beschrijven.

- e) De drie (!) hoofdspanningen voor deze spanningstoestand zijn:

$$\sigma_1 = 180 \text{ N/mm}^2; \sigma_2 = 0 \text{ N/mm}^2; \sigma_3 = -20 \text{ N/mm}^2$$

Toetsen aan het von Mises bezwijkcriterium levert:

$$\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{1}{3} \times f_y^2$$

$$\frac{36400}{3} \leq \frac{1}{3} 200^2 \Leftrightarrow 12133\frac{1}{3} < 13333\frac{1}{3} \quad \text{geen bezwijken}$$

Merk op:

Bij een vlakspanning is altijd één van de hoofdspanningen per definitie gelijk aan nul. De andere hoofdspanningen kunnen worden gevonden m.b.v. het karakteristieke polynoom van het eigenwaardeprobleem (zie dictaat) of m.b.v. een cirkel van Mohr. Deze laatste route levert direct de twee invarianten; een middelpunt $m = 80 \text{ N/mm}^2$ en een straal $r = 100 \text{ N/mm}^2$ hetgeen direct de twee resterende hoofdspanningen opleveren. Uiteraard kan de combinatie (σ, τ) ook direct worden getoetst m.b.v. Huber-Hencky. Mits gemotiveerd waarom, wordt dit ook goed gerekend.

VRAAGSTUK 2 : Statisch onbepaalde constructies-1

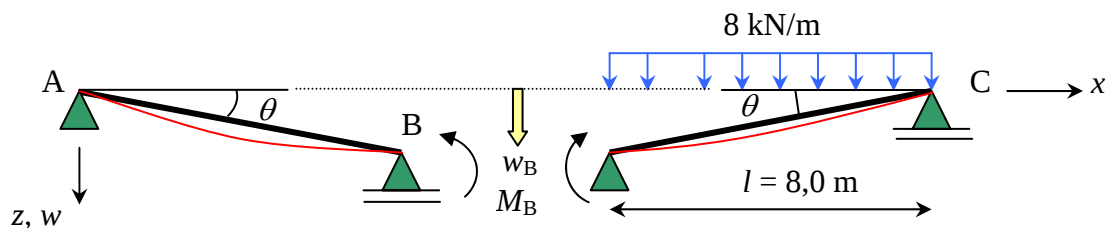
- a) Steunpuntsmoment t.g.v. een enkel belast veld (*maak gebruik van VGN-tjes*):

$$M = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} ql^2 = -\frac{1}{16} ql^2 = -\frac{1}{16} \times 8 \times 64 = -32 \text{ kNm}$$

Dit is een negatief buigend moment (trek aan de bovenzijde van de ligger).

Teken een correcte momentenlijn met de juiste vervormingstekens en geef de raaklijnen aan.

- b) T.g.v. de steunpuntszakking van B ontstaat er in B een positief steunpuntsmoment (trek aan de onderzijde). In absolute zin zal de 32 kNm dus in grootte kleiner worden.
- c) Statisch bepaald hoofdsysteem zijn twee liggertjes op twee steunpunten. De vormveranderingsvoorwaarde is de rotatie t.p.v. het middensteunpunt.



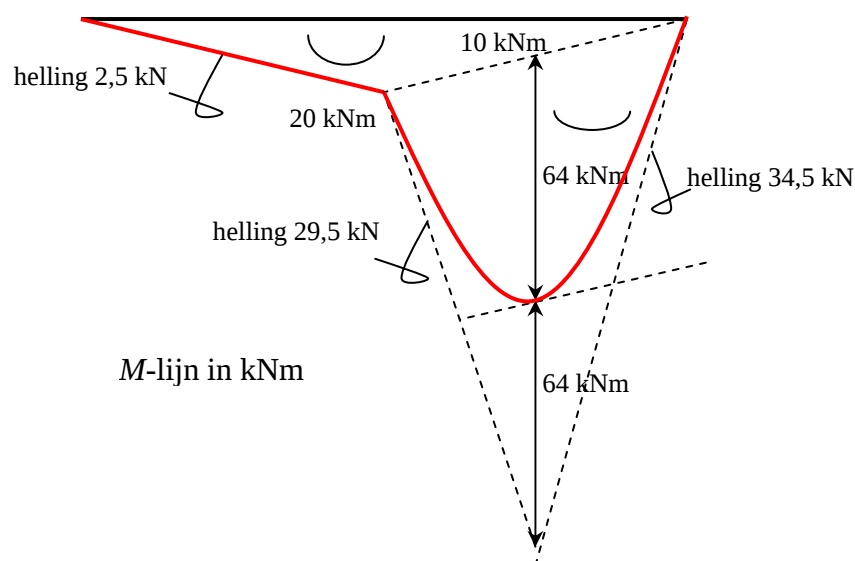
De hoekverdraaiing links en rechts van punt B zal gelijk moeten zijn:

$$-\theta + \frac{M_B l}{3EI} = +\theta - \frac{M_B l}{3EI} - \frac{ql^3}{24EI} \quad \text{met: } \theta = \frac{w_B}{l}$$

Na invullen van de gegeven waarden volgt voor het steunpuntsmoment:

$$M_B = 20,0 \text{ kNm}$$

Dit steunpuntsmoment veroorzaakt trek aan de onderzijde en is in het gehanteerde assenstelsel dus een positief buigend moment.



Teken een correcte momentenlijn met de juiste vervormingstekens en geef de raaklijnen aan. De interpretatie van de uitkomsten in de vorm van een momentenlijn is een belangrijk leerdoel van de basismechanica en weegt derhalve zwaar mee in de beoordeling.

VRAAGSTUK 3 : Statisch onbepaalde constructies-2

- a) Laat in de schets goed zien dat het een probleem betreft met verplaatsbare knopen. Als de invloed van de normaalkrachtvervorming buiten beschouwing wordt gelaten zoals we gewoon zijn te doen, dan zal punt C niet zakken.
- b) Maak van alle starre verbinden scharnieren, er ontstaat nu een mechanisme. De rotatie van AC is een extra vrijheidsgraad θ die meegenomen moet worden in de hoekveranderingsvergelijkingen. Een duidelijke schets waarin is aangegeven welke richtingen worden aangenomen is essentieel voor de beoordeling. Bij een aangenomen verplaatsing van punt B naar rechts worden de h.v.v.:

hoekveranderingsvergelijkingen:

$$\varphi_A = 0$$

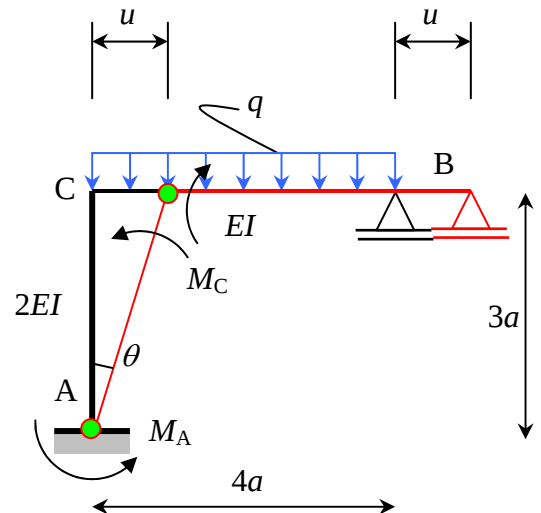
$$\varphi_C^{AC} = \varphi_C^{CB}$$

virtuele arbeid :

$$-M_A \delta\theta - M_C \delta\theta = 0 \Rightarrow M_A = -M_C$$

$$\frac{M_A \times 3a}{3 \times 2EI} - \frac{M_C \times 3a}{6 \times 2EI} - \theta = 0$$

$$-\frac{M_A \times 3a}{6 \times 2EI} + \frac{M_C \times 3a}{3 \times 2EI} - \theta = -\frac{M_C \times 4a}{3 \times EI} - \frac{q \times (4a)^3}{24EI}$$



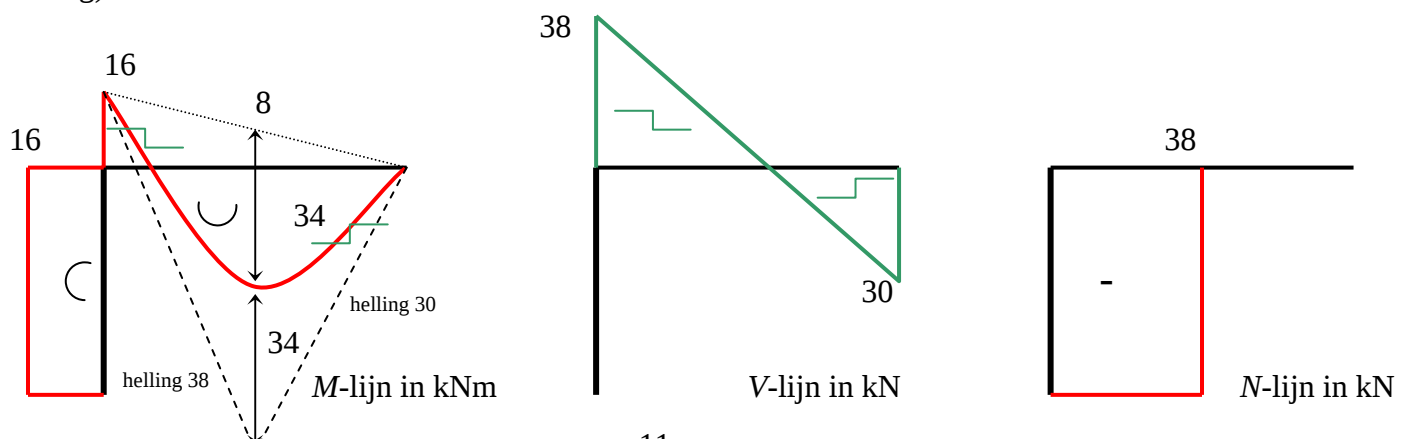
- c) Uitwerken levert: $M_A = \frac{16qa^2}{17} = 16 \text{ kNm}$

$$M_C = -\frac{16qa^2}{17} = -16 \text{ kNm}$$

$$\theta = \frac{12qa^3}{17EI} = 0,0012 \text{ rad}$$

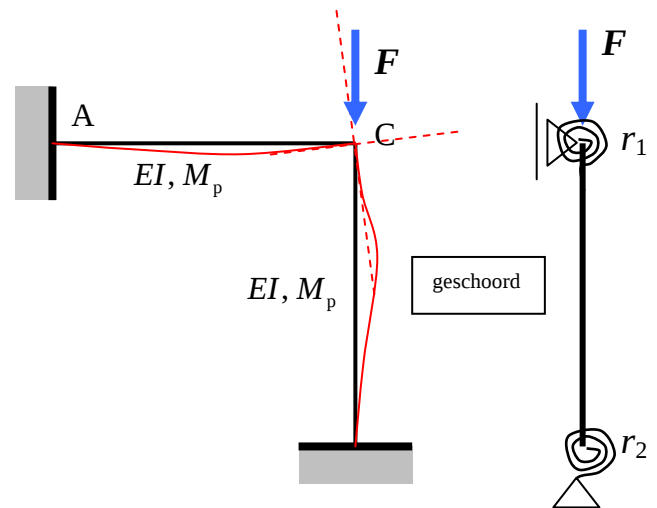
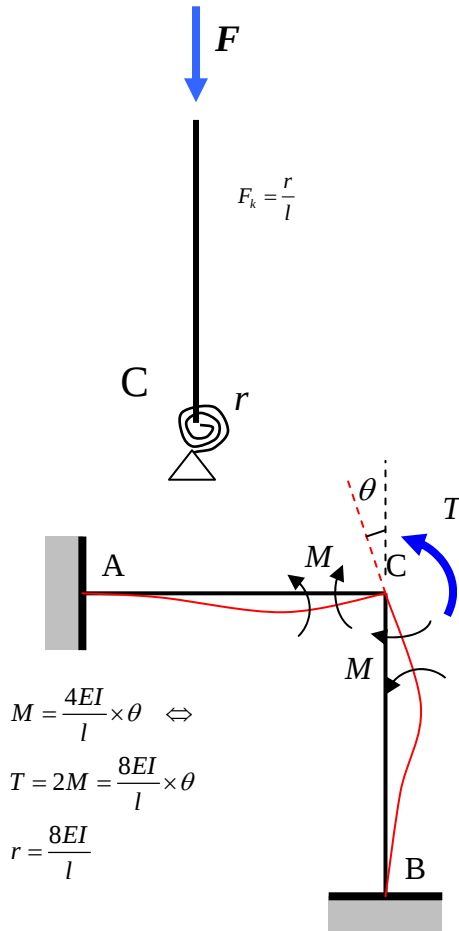
$$u = \theta \times 3a = 0,0036 \text{ m}$$

- d) De momenten in A en C zijn dus gelijk aan elkaar. Merk op dat dit niet zo is indien het een probleem zou betreffen met niet-verplaatsbare knopen!
- e) Zie onderstaande figuren
- f) Geen horizontale oplegreacties, $A_v = 38 \text{ kN}$ (omhoog) ; $B_v = 30 \text{ kN}$ (omhoog).
- g) Zie c.



VRAAGSTUK 4 : Stabiliteit

- a) Bij deze constructie kunnen twee mogelijke knikvormen optreden. De eerste is de starre vorm waarbij de staaf CD verend is ingeklemd in de onderbouw. De onderbouw ACB kan hierbij als een rotatieveer worden geschematiseerd. De tweede knikvorm is die waarbij in de onderbouw staaf CB uitknikt en waarbij AC weerstand biedt tegen deze uitbuiging.



Geschoord, rho-formule toepassen:

$$\rho_1 = \frac{r_1 \times l}{EI} = \frac{\frac{4EI}{l} \times l}{EI} = 4; \quad r_2 = \infty \Rightarrow \rho_2 = \infty$$

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1) \times 2}{(5 + \rho_1) \times 1} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{5 + 8}{5 + 4} \times \frac{2\pi^2 EI}{l^2} = \frac{26\pi^2 EI}{9l^2} \approx 14256 \text{ kN}$$

De rotatiestijfheid van de onderbouw kan snel gevonden worden m.b.v. de verplaatsingenmethode. Immers de enige vrijheidsgraad van dit constructiedeel is de rotatie van knoop C. De tweede knikvorm is een standaardgeval en is in de rechter figuur weergegeven. De laagste kniklast is maatgevend. Het blijkt dat in dit voorbeeld altijd het (linker) starre model maatgevend is! De kniklast hiervan is:

$$F_k = \frac{r}{l} = \frac{8EI}{l^2} = 4000 \text{ kN}$$

Noot :

In feite wordt de veerstijfheid van de onderbouw een beetje verkleind t.g.v. de invloed van de drukkracht in CB. Deze afname staat ook wel bekend als een schijnbare stijfheid. Als de normaalkracht in CB ca 4000 kN is dan geldt voor de EI van de kolom in de onderbouw:

$$n = \frac{14256}{4000} \approx 3,5 \Rightarrow EI_k = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times EI = 0,71 \times EI$$

De veerstijfheid van de onderbouw wordt hiermee:

$$r = \frac{4EI}{l} + \frac{0,71 \times 4EI}{l} = \frac{6,85EI}{l} = 0,86 \times \frac{8EI}{l} = 0,86 \times r$$

De kniklast wordt hier door : $F_k = \frac{r}{l} = 0,86 \times \frac{8EI}{l^2} = 3420 \text{ kN}$

Deze exercitie moet met deze nieuwe kniklast iteratief worden herhaald waarmee een werkelijke kniklast van 3508 kN kan worden aangetoond. Dit resultaat wordt ook gevonden met een niet-lineaire raamwerkberekening. De invloed van de schijnbare stijfheid valt buiten de tentamenstof maar wordt wel in het dictaat beschreven op blz 379. Om deze invloed in de opgave buiten beschouwing te laten is de **noot** bij de tekst van de opgave geplaatst.

- b) De evenwichtsvergelijking voor het (linker) maatgevende model in de elastische en plastische fase luidt:

$$F \times u + H \times l - \frac{8EI}{l} \times \frac{u}{l} = 0 \quad \text{elastisch}$$

$$F \times u + H \times l - 2M_p = 0 \quad \text{plastisch}$$

- c) De 1^e orde berekening elastisch levert een verplaatsing u op van:

$$H \times l = \frac{8EI}{l^2} \times u$$

$$u = \frac{Hl^3}{8EI} = \frac{25 \times 8}{8 \times 2000} = 0,0125 \text{ m}$$

Maximale horizontale verplaatsing is u_p als:

$$H \times l = \frac{8EI}{l^2} \times u_p = 2M_p = 200$$

$$u_p = \frac{200 \times 4}{8 \times 2000} = 0,050 \text{ m}$$

$$H_p = \frac{2M_p}{l} = 100 \text{ kN} \quad (\text{max. hor. belasting})$$

- d) Neem aan elastisch:

$$1000,0 \times u + 25,0 \times 2 - \frac{8 \times 2000}{2^2} \times u = 0$$

$$u = 0,01667 \text{ m} \quad (< u_p)$$

$$\text{Controle: } u = \frac{n}{n-1} \times u_1 = \frac{4}{4-1} \times 0,0125 = 0,01667 \text{ m}$$

- e) Bezwijken door instabiliteit indien:

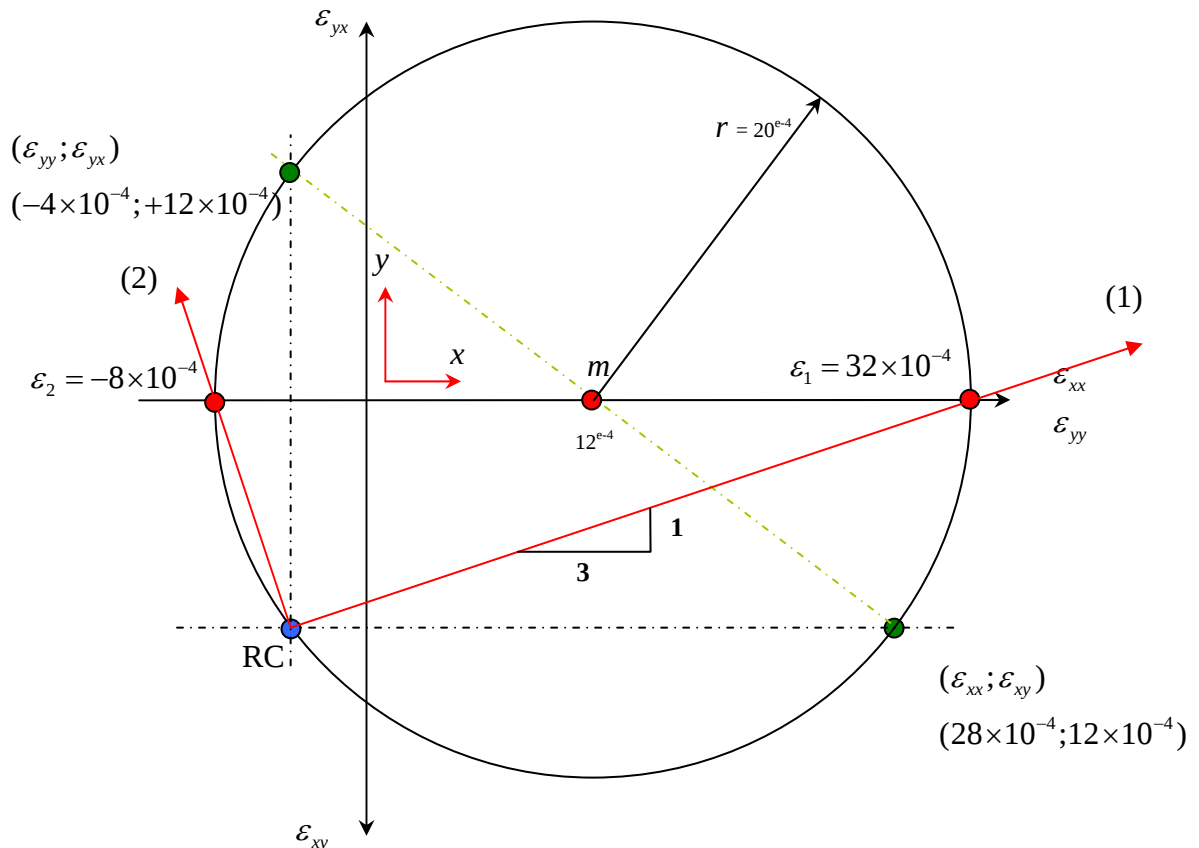
$$F_c \times u_p + H \times l - 2M_p = 0$$

$$F_c = \frac{2M_p - H \times l}{u_p} = \frac{200 - 25 \times 2}{0,050} = 3000 \text{ kN}$$

$$\text{controle met Merchant: } \frac{F_c}{F_k} + \frac{H}{H_p} = 1 \Rightarrow \frac{3000}{4000} + \frac{25}{100} = 1$$

VRAAGSTUK 5 : Elasticiteitsleer

- a) De cirkel van Mohr kan worden getekend met de gegeven rekken.



- b) De spanningen kunnen worden bepaald m.b.v. deze rekken. Daarvoor moet eerst de dwarscontractie coëfficiënt worden bepaald uit de gegeven E en G :

$$\nu = \frac{20}{2 \times 8} - 1 = 0,25$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) = 576 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) = 64 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{xy} = 2G\epsilon_{xy} = 192 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 576 & 192 \\ 192 & 64 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

- c) De hoofdrichtingen voor de spanningen zijn gelijk aan die voor de rekken. Vlakje CB heeft een normaal in hoofdrichting (2). Er werkt op dit vlak dus alleen een normaalspanning gelijk aan hoofdspanning 1.

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) = 640 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (\text{vlakspanning!})$$

- d) De grootste spanningscirkel heeft een straal van 320 N/mm^2 . Volgens Tresca volgt hiermee: $\gamma \times 320 = \frac{1}{2} \times 360 \Leftrightarrow \gamma = 0,56 \text{ bezwijkt}$.