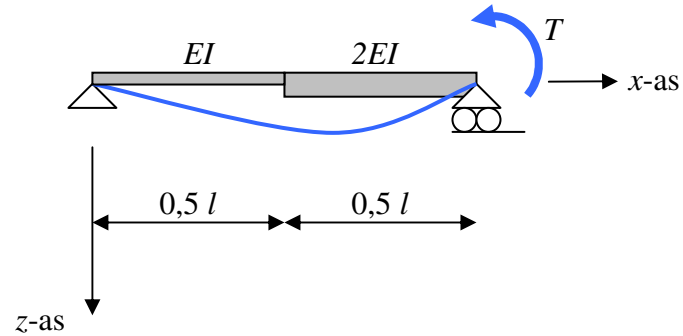


ARBEIDS- en ENERGIEMETHODEN

Opgave 0 : Ligger met een koppel

Van de rechts weergegeven ligger wordt gevraagd om de rotatie in het rechter steunpunt ten gevolge van het koppel T te bepalen met behulp van de 2^e stelling van Castigliano.



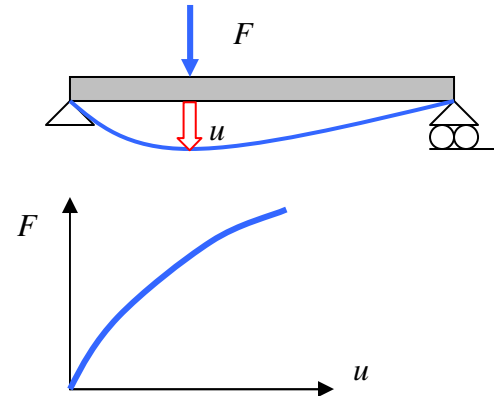
Opgave 1 : Niet-lineair last-zakkingsdiagram

Van de hiernaast weergegeven ligger is het last-zakkings diagram weergegeven. Uit dit diagram blijkt dat er een niet-lineaire relatie bestaat tussen de belasting en de verplaatsing t.p.v. de belasting. Gegeven is dat dit verband kan worden beschreven met :

$$u = cF^2$$

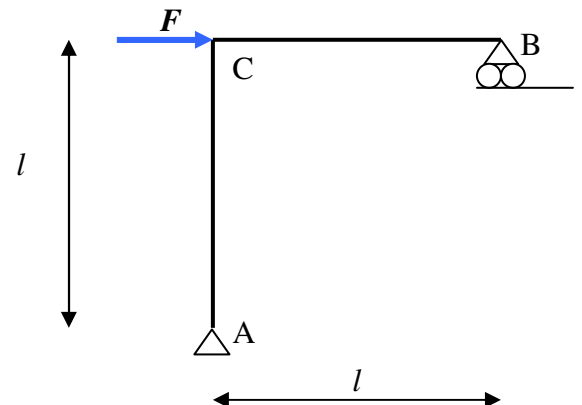
Bepaal:

- De vormveranderingsenergie (uit te drukken in u)
- De complementaire energie (uit te drukken in F)



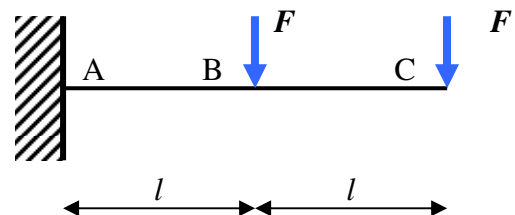
Opgave 2 : Horizontaal belast raamwerk

Bereken met de 2^e stelling van Castigliano de horizontale verplaatsing van B . De buigstijfheid van alle staven is EI . Vervorming door normaalkracht wordt verwaarloosd.



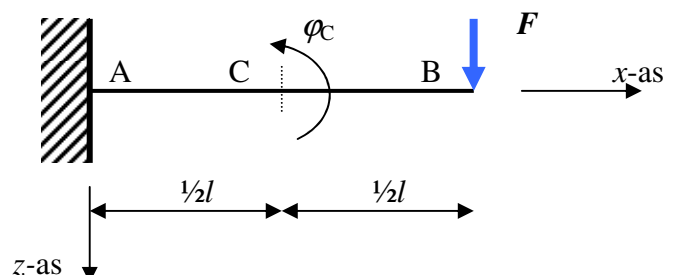
Opgave 3 : Uitkragende ligger 2

Bereken met behulp van de 2^e stelling van Castigliano de zakking van punt B . De prismatische ligger heeft een buigstijfheid EI .



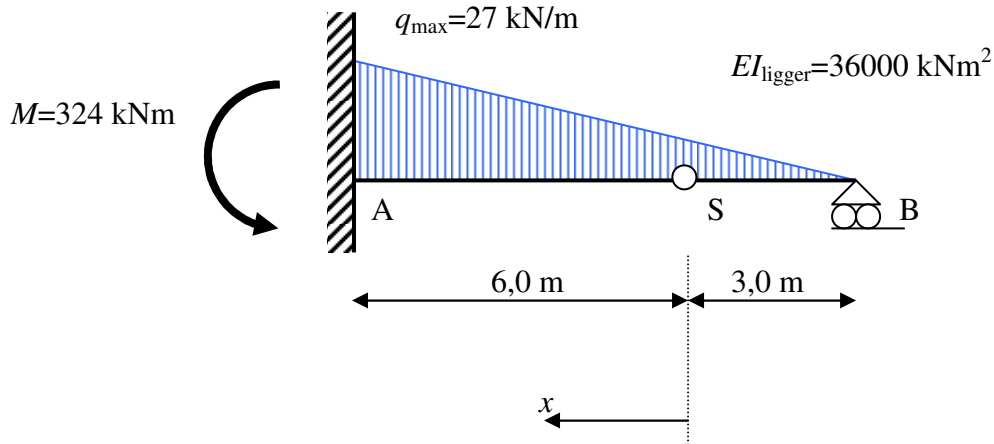
Opgave 4 : Uitkragende ligger 3

Bereken de rotatie in punt C t.g.v. een kracht in punt B . De prismatische ligger heeft een buigstijfheid EI .



Opgave 5 : Uitkragende ligger 4

In de onderstaande figuur is een eenzijdig ingeklemde ligger weergegeven met een aangegeven verdeelde belasting $q(x)$ en een scharnier S.



Gegeven is dat het moment als functie van x [m] geschreven kan worden als :

$$M(x) = -9x - 4,5x^2 - 0,5x^3 \quad [\text{kNm}]$$

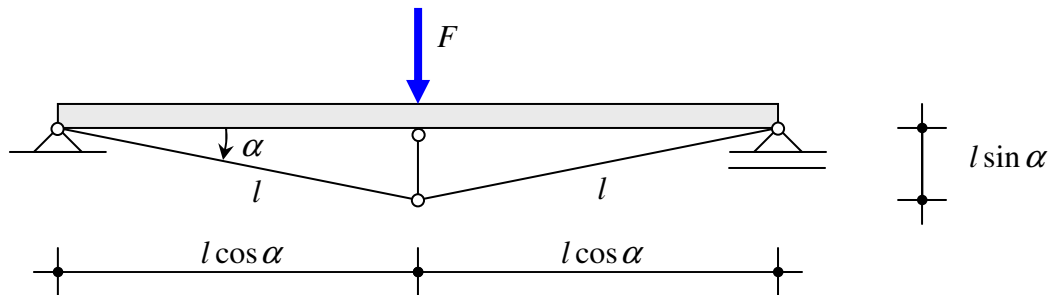
Let op : De plaats x wordt gemeten vanuit punt S zoals in de figuur is aangegeven, dus positief vanuit S is naar links !

Vragen:

- Teken de momentenlijn voor de ligger
- Bepaal met behulp van de arbeidsmethode met een eenheidslast de zakking van het scharnier S.

Opgave 6: Onderspannen ligger

In de onderstaande figuur is een versterkte ligger met buigstijfheid EI weergegeven met trekstangen met lengte l waarvan de krachtsverdeling wordt gevraagd. De rekstijfheid van de ligger is oneindig en de rekstijfheid van alle pendelstaven is EA .



Vragen

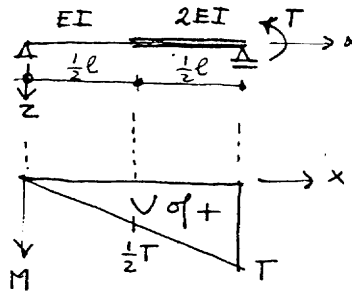
- Hoeveel voudig statisch onbepaald is deze constructie?
- Geef aan hoe met de stelling van Castigliano de vormveranderingsvoorwaarde(n) die bij de statisch onbepaalde(n) horen kunnen worden vormgegeven.
- Los de door u gekozen statisch onbepaalde vervolgens op m.b.v. de door U aangegeven methode en druk deze uit in de gegeven parameters F , EI , l , EA en α .

Opgave 0 : Ligger met een koppel

$$M = T \cdot \frac{x}{\ell}$$

$$E_C = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\begin{aligned} E_C &= \int_0^{\frac{1}{2}\ell} \frac{(T \frac{x}{\ell})^2}{2EI} dx + \int_{\frac{1}{2}\ell}^{\ell} \frac{(T \frac{x}{\ell})^2}{4EI} dx \\ &= \frac{1}{6} \frac{x^3 T^2}{\ell^2 EI} \Big|_0^{\frac{1}{2}\ell} + \frac{1}{12} \frac{x^3 T^2}{\ell^2 EI} \Big|_{\frac{1}{2}\ell}^{\ell} \\ &= \frac{3}{32} \frac{T^2 \ell}{EI} \end{aligned}$$



Pas Castigliano toe:

$$E_C = \frac{3}{32} \frac{T^2 \ell}{EI}$$

$$\varphi_C = \frac{dE_C}{dT} = \frac{3}{16} \frac{T \ell}{EI}$$

Opgave 1: Niet-lineair last-zakkingsdiagram

$$u = cF^2 \quad \text{of} \quad F = \sqrt{u/c} = \frac{u^{1/2}}{\sqrt{c}}$$

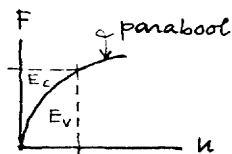
$$E_v = \int_0^u F du = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^u u^{1/2} du = \frac{1}{\sqrt{c}} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{u^3}{c}}$$

$$E_c = \int_0^F u dF = \int_0^F cF^2 dF = \frac{1}{3} cF^3 \Big|_0^F = \frac{1}{3} cF^3$$

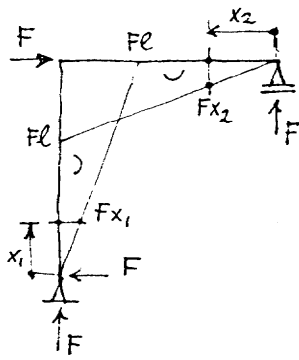
variant (mbv oppervlakken):

$$E_v = \frac{2}{3} F u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{u}{c}} \cdot u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{u^3}{c}}$$

$$E_c = \frac{1}{3} F u = \frac{1}{3} \cdot F \cdot cF^2 = \frac{1}{3} cF^3$$



Opgave 2 : Horizontaal belast raamwerk



Bereken oplegreacties en M-lijn.

$$E_C = \int_{AB} \frac{M^2}{2EI} dx_1 + \int_{BC} \frac{M^2}{2EI} dx_2$$

$$AB: M = Fx_1 \quad \left(\frac{\partial M}{\partial F} = x_1 \right)$$

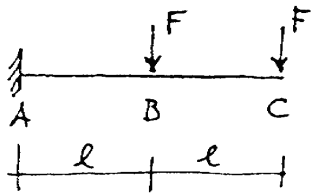
$$BC: M = Fx_2 \quad \left(\frac{\partial M}{\partial F} = x_2 \right)$$

Het teken van M is niet van belang.

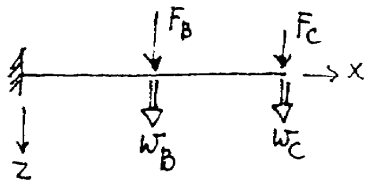
$$\begin{aligned} u_F &= \frac{\partial E_C}{\partial F} = \int_{AB} \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} dx_1 + \int_{BC} \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} dx_2 \quad *) \\ &= \int_0^l \frac{Fx_1}{EI} \cdot x_1 dx + \int_0^l \frac{Fx_2}{EI} \cdot x_2 dx_2 \\ &= \frac{F}{EI} \left[\frac{1}{3} x_1^3 \right]_0^l + \frac{F}{EI} \left[\frac{1}{3} x_2^3 \right]_0^l = \frac{2}{3} \frac{Fl^3}{EI} \end{aligned}$$

*) De volgorde van differentieren en integreren mag men verwisselen. Dat bespaart veel rekenwerk.

Opgave 3 : Uitkragende ligger 2



Bereken met de 2^e stelling van Castigliano de zetting in B.
De ligger is prismatisch met buigstijfheid EI .



uitwerking:

Geef beide krachten F een eigen "naam".

$$0 \leq x \leq l$$

$$M = -F_B l \left(1 - \frac{x}{l}\right) - 2F_C l \left(1 - \frac{x}{2l}\right)$$

$$l \leq x \leq 2l$$

$$M = -2F_C l \left(1 - \frac{x}{2l}\right)$$

$$E_C = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + \int_l^{2l} \frac{M^2}{2EI} dx$$

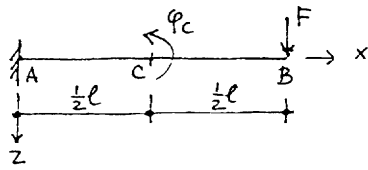
$$w_B = \frac{\partial E_C}{\partial F_B} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_B} dx + \int_l^{2l} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_B} dx$$

$\uparrow$ $-\ell(1 - \frac{x}{\ell})$ $\uparrow$ 0

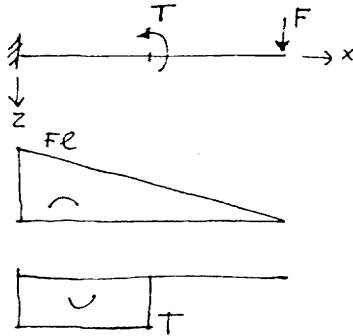
$$\begin{aligned} w_B &= \frac{1}{EI} \int_0^l \left[-F_B l \left(1 - \frac{x}{l}\right) - 2F_C l \left(1 - \frac{x}{2l}\right) \right] \left[-\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \right] dx \\ &= \frac{F_B l^2}{EI} \int_0^l \left(1 - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) dx + \frac{2F_C l^2}{EI} \int_0^l \left(1 - \frac{3x}{2l} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right) dx \\ &= \frac{F_B l^2}{EI} \left(x - \frac{x^2}{l} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^2} \right) \Big|_0^l + \frac{2F_C l^2}{EI} \left(x - \frac{3}{4}\frac{x^2}{l} + \frac{1}{6}\frac{x^3}{l^2} \right) \Big|_0^l \\ &= \frac{1}{3} \frac{F_B l^3}{EI} + \frac{5}{6} \frac{F_C l^3}{EI} = \frac{7}{6} \frac{F l^3}{EI} \end{aligned}$$

↳ nu pas invullen $F_B = F_C = F$!

Opgave 4 : Uitkragende ligger 4



Bereken de rotatie φ_C in C tgv de kracht F in B. De buigstijfheid is overal EI .



uitwerking:

Breng in C in de richting van φ_C een koppel T aan. Bereken nu $\varphi_C = \frac{\partial E_C}{\partial T}$ en stel $T=0$ in het gevonden antwoord.

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2} : M = T - F(l-x) \quad \left(\frac{\partial M}{\partial T} = 1 \right)$$

$$x \geq \frac{l}{2} : M = -F(l-x) \quad \left(\frac{\partial M}{\partial T} = 0 \right)$$

$$E_C = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2}{2EI} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\begin{aligned} \varphi_C = \frac{\partial E_C}{\partial T} &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial T} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial T} dx \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{T - F(l-x)}{EI} \cdot 1 \cdot dx + \int_{\frac{l}{2}}^l 0 \cdot dx \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{T - F(l-x)}{EI} dx = -\frac{3Fl^2}{8EI} + \frac{1}{2} \frac{Tl}{EI} \end{aligned}$$

het antwoord op de gestelde vraag vindt men door T hierin nul te stellen:

$$\varphi_C = -\frac{3Fl^2}{8EI}$$

Vanwege het invoeren van een "hulpkracht" T (dummy-load) noemt men dit de dummyloadmethode.

Opgave 5 : Uitkragende ligger 4

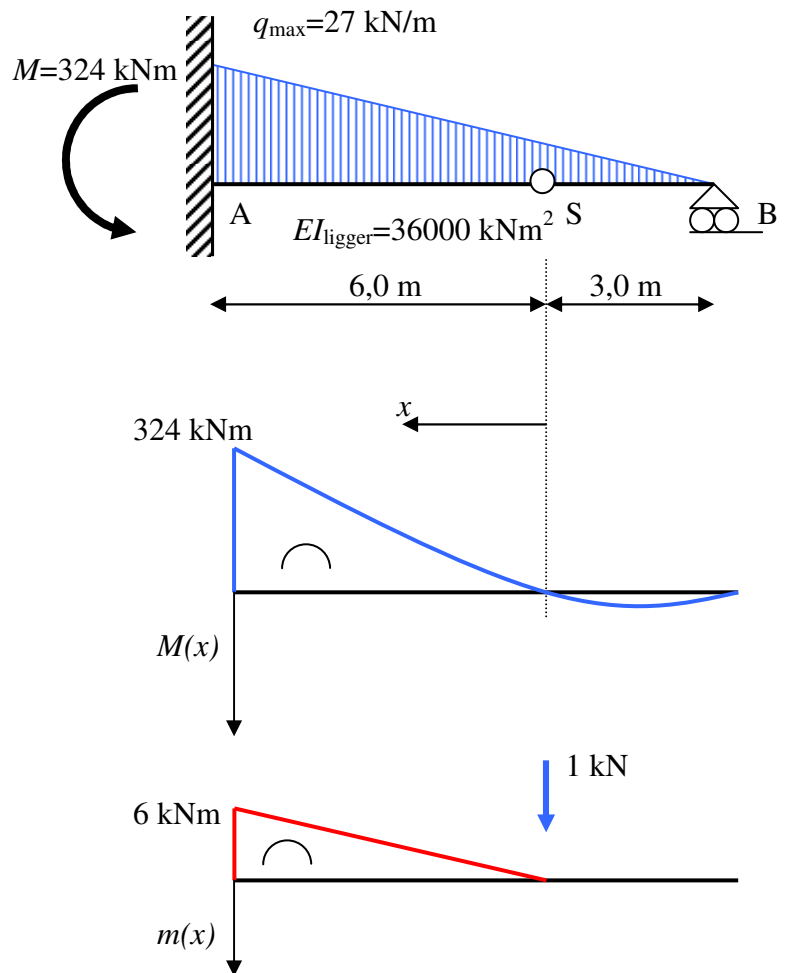
- a) De momentenlijn is in de rechter figuur weergegeven.
- b) Voor het bepalen van de zakking wordt gevraagd gebruik te maken van de arbeidsmethode met behulp van een eenheidslast. De zakking t.p.v. de eenheidslast kan worden bepaald met behulp van :

$$w = \int_0^l \frac{m(x)M(x)}{EI} dx$$

Hierin is $M(x)$ de onder vraag a) bedoelde momentenlijn en $m(x)$ de momentenlijn t.g.v. de eenheidslast t.p.v. het scharnier. Deze is ook in de rechter figuur weergegeven.

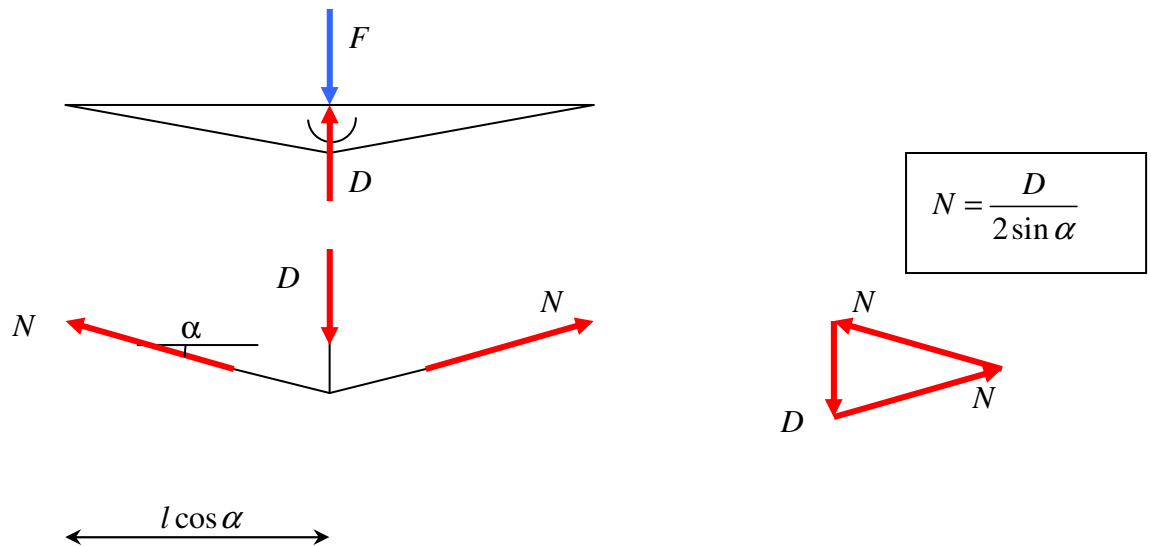
Het oplossen van deze integraal kan nu niet met behulp van de tabel uit figuur 3.16 van het dictaat maar zal analytisch moeten worden uitgewerkt. Bijkomend voordeel is dat $m(x)$ over het liggerdeel SB nul is en dus uit de integraal verdwijnt. Alleen de productfunctie over de eerste 6,0 m moet worden uitgewerkt :

$$w = \frac{1}{EI} \int_0^6 (-x) \times (-9x - 4,5x^2 - 0,5x^3) dx = \frac{2883,6}{EI} = 80,1 \text{ mm}$$



Opgave 6 : Onderspannen ligger

De ligger is enkelvoudig statisch onbepaald. Kies de (druk)kracht D in de verticale pendelstaaf als statisch onbepaalde. Voor de onderspannen constructie kunnen alle krachten worden uitgedrukt in deze statisch onbepaalde D en kan de vormveranderingsenergie worden uitgedrukt in de statisch onbepaalde. Voor de ligger kan de momentenlijn worden bepaald waarbij de statisch onbepaalde wordt meegenomen.



De staven hebben elk een eigen stijfheid k waarmee de vormveranderingsenergie in het verstijvende deel kan worden bepaald:

$$E_{v-1} = 2 \cdot \frac{N^2}{2k_1} + \frac{D^2}{2k_2} \quad \text{met:} \quad k_1 = \frac{EA}{l}; \quad k_2 = \frac{EA}{l \sin \alpha}$$

De vormveranderingsenergie in de ligger kan worden bepaald m.b.v. de momentenlijn t.g.v. de belasting F en de statisch onbepaalde N :

$$E_{v-2} = \int_0^{2l \cos \alpha} \frac{M^2}{2EI} dx = 2 \int_0^{l \cos \alpha} \frac{\left(\frac{1}{2}(F-D) \cdot x\right)^2}{2EI} dx = \frac{(F-D)^2 l^3 \cos^3 \alpha}{12EI}$$

Halverwege de ligger moet de zakking van de ligger (in de richting van F) gelijk zijn aan de zakking van het onderspannen stavensysteem (in de richting van D):

$$\begin{aligned} \frac{dE_{v-1}}{dD} &= \frac{dE_{v-2}}{dF} \Leftrightarrow \\ \frac{Dl}{2EA \sin^2 \alpha} + \frac{Dl \sin \alpha}{EA} &= \frac{(F-D)l^3 \cos^3 \alpha}{6EI} \\ D &= \frac{EA \cdot l^2 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha}{3EI + 6EI \sin^3 \alpha + EA \cdot l^2 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha} F \end{aligned}$$