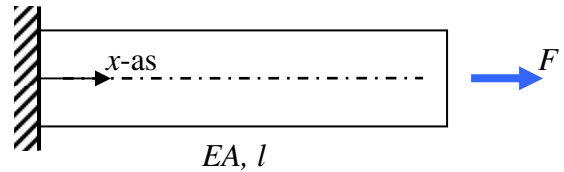


ENERGIEPRINCIPES

Opgave 1 : Op extensie belaste staaf

Er is evenwicht als de virtuele arbeidsvergelijking voor elk kinematisch mogelijk verplaatsingsveld geldt. Past men het principe van minimale potentiële energie toe op een beperkt aantal kinematisch mogelijke verplaatsingsvelden, dan zal niet overal exact aan het evenwicht worden voldaan, maar gemiddeld wel. Dit leidt tot een benaderingsoplossing voor de verplaatsingen en de krachtsverdeling in de constructie.



Bereken (benader) met het principe van minimum potentiële energie het verloop van de verplaatsing u en de normaalkracht N , uitgaande van de volgende twee kinematisch mogelijke verplaatsingsvelden :

$$u(x) = a \frac{x^2}{l^2}$$

$$u(x) = a_1 \frac{x}{l} + a_2 \frac{x^2}{l^2}$$

Opgave 2 : Niet-prismatische doorsnede

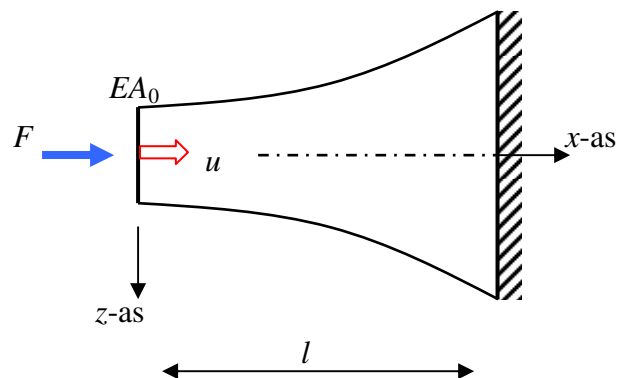
Gegeven is de niet-prismatische doorsnede zoals rechts in de figuur is afgebeeld. Verder is gegeven:

$$EA(x) = \frac{2EA_0}{2 - \frac{x}{l}}$$

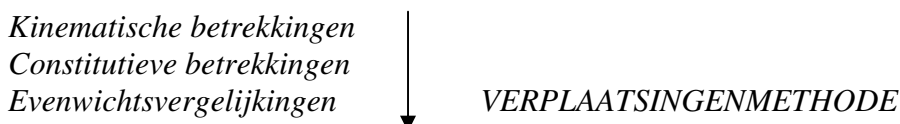
Het materiaal gedraagt zich lineair elastisch.

Bereken met behulp van het principe van minimale potentiële energie de verplaatsing u , uitgaande van het kinematisch mogelijke verplaatsingsveld:

$$u(x) = a \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$



Maak gebruik van de onderstaande trits vergelijkingen die samen de strategie van de verplaatsingenmethode vormen.

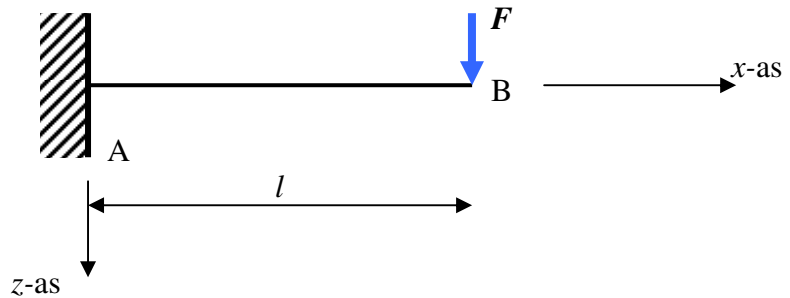


Opgave 3 : Uitkragende ligger

Bepaal met behulp van het principe van minimale potentiële energie het verloop van de zakking w , het buigend moment M en de dwarskracht V , uitgaande van het kinematisch mogelijke verplaatsingsveld :

$$w(x) = a \frac{x^2}{l^2}$$

Vergelijk de resultaten met het (bekende) exacte verloop.



Opgave 4 : Uitkragende ligger (vervolg)

Kies voor de ligger uit de vorige opgaven als verplaatsingsveld:

$$w(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \frac{x^2}{l^2} + a_3 \frac{x^3}{l^3}$$

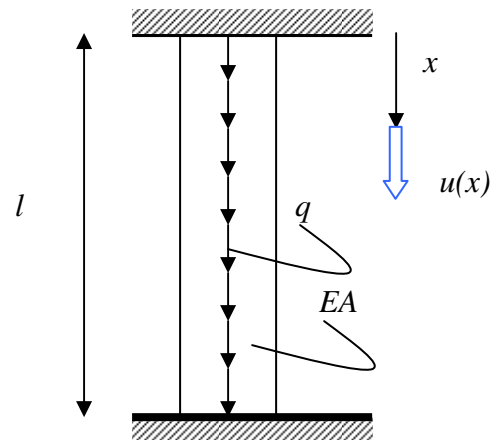
- Is dit verplaatsingsveld kinematisch mogelijk? Zo niet, pas het dan aan.
- Bereken met het principe van minimale potentiële energie het verloop van de zakking w .

Opgave 5 : Op extensie belaste staaf (2)

Van de in de figuur weergegeven constructie is de verplaatsing bij de opleggingen verhinderd. Op de prismatische kolom met rekstijfheid EA werkt over de lengte l een gelijkmatig verdeelde belasting q . Het normaalkrachtenverloop in de kolom wordt berekend met de strategie van de verplaatsingenmethode. Voor de verplaatsingen $u(x)$ in de x -richting wordt het volgende verloop aangenomen :

$$u(x) = \hat{u} \sin \frac{\pi x}{l} \quad \text{amplitude } \hat{u}$$

De amplitude van deze sinusfunctie is een nog nader te bepalen constante.



Vragen:

- Toon aan dat het gekozen verplaatsingsveld voldoet aan de kinematische randvoorwaarden.
- Bereken de amplitude, uitgedrukt in q , l en EA , met behulp van het principe van minimum potentiële energie.
- Teken de bijbehorende N -lijn en schrijf de waarden er bij (met de goede tekens!).

Opgave 1 : Op extensie belaste staaf

De potentiële energie kan worden bepaald op basis van het aangenomen verplaatsingsveld dat voldoet aan de randvoorwaarden en daardoor een kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld is. Voor verplaatsingsveld en rek geldt :

$$u = \frac{ax^2}{l^2}$$
$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{2ax}{l^2}$$

De potentiële energie is nu te schrijven als:

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} EA \times \varepsilon^2 dx - F \times a = \int_0^l \frac{1}{2} EA \times \left(\frac{2ax}{l^2} \right)^2 dx - F \times a \Leftrightarrow$$
$$V = \frac{2EAa^2}{3l} - Fa$$

Een stabiel evenwicht is alleen mogelijk indien bij een kleine variatie van de toestandsvariabele de verandering van de potentiële energie nul is. De toestandsvariabele is in dit geval a . Dit houdt wiskundig in dat moet gelden :

$$\delta V = \frac{dV}{da} \delta a = 0$$

Dit moet gelden voor iedere, kinematisch mogelijke variatie van de toestandsvariabele. Dat betekent dat de variatie van de potentiële energie alleen nul kan zijn indien de afgeleide van de potentiële energie naar de toestandsvariabele nul is:

$$\frac{dV}{da} = 0$$

Dit is het principe van minimale potentiële energie. Uitwerken levert:

$$\frac{dV}{da} = \frac{4EAa}{3l} - F = 0 \Leftrightarrow$$
$$a = \frac{3}{4} \frac{Fl}{EA}$$

Het benaderde verplaatsingsveld is zodoende:

$$u(x) = \frac{3}{4} \frac{Fl}{EA} \frac{x^2}{l^2}$$

De potentiële energie heeft hiermee een (negatieve waarde) van :

$$V = -\frac{3}{8} \frac{F^2 l}{EA}$$

Opgave 2 : Niet-prismatische doorsnede

De potentiële energie kan worden bepaald op basis van het aangenomen verplaatsingsveld dat voldoet aan de randvoorwaarden en daardoor een kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld is. Op basis van dit verplaatsingsveld is de rek :

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{-a}{l}$$

De potentiële energie is nu te schrijven als:

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} EA(x) \times \varepsilon^2 dx - F \times a$$

De rekstijfheid is nu geen constante maar een gegeven functie van de plaats x en kan dus niet buiten de integraal worden gehaald. Netjes uitwerken levert voor de totale potentiële energie:

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} \times \frac{2EA_o}{2 - \frac{x}{l}} \times \left(\frac{-a}{l} \right)^2 dx - Fa = \frac{-EA_o}{l} a^2 \int_0^l \frac{1}{2 - \frac{x}{l}} d\left(2 - \frac{x}{l}\right) - Fa$$
$$V = \frac{-EA_o}{l} a^2 \left[\ln\left(2 - \frac{x}{l}\right) \right]_0^l - Fa = \frac{EA_o}{l} a^2 \ln 2 - Fa$$

Een stabiel evenwicht is alleen mogelijk indien bij een kleine variatie van de toestandsvariabele de verandering van de potentiële energie nul is. De toestandsvariabel is in dit geval a . Dit houdt wiskundig in dat moet gelden :

$$\delta V = \frac{dV}{da} \delta a = 0$$

Dit moet gelden voor iedere, kinematisch mogelijke variatie van de toestandsvariabele. Dat betekent dat de variatie van de potentiële energie alleen nul kan zijn indien de afgeleide van de potentiële energie naar de toestandsvariabele nul is:

$$\frac{dV}{da} = 0$$

Dit is het principe van minimale potentiële energie. Uitwerken levert:

$$\frac{dV}{da} = \frac{2EA_o}{l} \ln 2 - F = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$a = \frac{1}{2 \ln 2} \frac{Fl}{EA_o}$$

Opgave 3 : Uitkragende ligger

De potentiële energie kan worden bepaald op basis van het aangenomen verplaatsingsveld dat voldoet aan de randvoorwaarden en daardoor een kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld is. Op basis van dit verplaatsingsveld is de kromming :

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2a}{l^2}$$

De potentiële energie is nu te schrijven als:

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} EI \times \kappa^2 dx - F \times a = \int_0^l \frac{1}{2} EI \times \left(\frac{2a}{l^2}\right)^2 dx - F \times a$$

Netjes uitwerken levert voor de totale potentiële energie:

$$V = \frac{2EIa^2}{l^3} - Fa$$

Een stabiel evenwicht is alleen mogelijk indien bij een kleine variatie van de toestandsvariabele de verandering van de potentiële energie nul is. De toestandsvariabele is in dit geval a . Dit houdt wiskundig in dat moet gelden :

$$\delta V = \frac{dV}{da} \delta a = 0$$

Dit moet gelden voor iedere, kinematisch mogelijke variatie van de toestandsvariabele. Dat betekent dat de variatie van de potentiële energie alleen nul kan zijn indien de afgeleide van de potentiële energie naar de toestandsvariabele nul is:

$$\frac{dV}{da} = 0$$

Dit is het principe van minimale potentiële energie. Uitwerken levert:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{da} &= \frac{4EIa}{l^3} - F = 0 \quad \Leftrightarrow \\ a &= \frac{Fl^3}{4EI} \end{aligned}$$

De potentiële energie heeft hiermee een (negatieve waarde) van :

$$V = -\frac{F^2 l^3}{8 EI}$$

Opgave 4 : Uitkragende ligger (vervolg)

Een kinematisch mogelijk verplaatsingsveld heeft bij de inklemming een *zakking* en *hoekverdraaiing* nul. Een toelaatbaar verplaatsingsveld en de daarbij behorende kromming zijn:

$$w = a_2 \frac{x^2}{l^2} + a_3 \frac{x^3}{l^3}$$
$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{2a_2}{l^2} - \frac{6a_3 x}{l^3}$$

De potentiële energie is nu te schrijven als:

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} EI \times \kappa^2 dx - F \times (a_2 + a_3) =$$
$$V = \frac{6EIa_3^2}{l^3} + \frac{6EIa_2a_3}{l^3} + \frac{2EIa_2^2}{l^3} - F \times (a_2 + a_3)$$

Een stabiel evenwicht is alleen mogelijk indien bij een kleine variatie van de toestandsvariabele de verandering van de potentiële energie nul is. De toestandsvariabelen zijn in dit geval a_2 en a_3 . Dit houdt wiskundig in dat moet gelden :

$$\delta V = \frac{dV}{da_2} \delta a_2 + \frac{dV}{da_3} \delta a_3 = 0$$

Dit moet gelden voor iedere, kinematisch mogelijke variatie van de toestandsvariabelen. Dat betekent dat de variatie van de potentiële energie alleen nul kan zijn indien de beide afgeleiden van de potentiële energie naar de toestandsvariabelen nul zijn:

$$\frac{dV}{da_2} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{dV}{da_3} = 0$$

Dit is het principe van minimale potentiële energie. Uitwerken levert:

$$\frac{dV}{da_2} = \frac{6EIa_3}{l^3} + \frac{4EIa_2}{l^3} - F = 0$$
$$\frac{dV}{da_3} = \frac{12EIa_3}{l^3} + \frac{6EIa_2}{l^3} - F = 0$$

Dit levert twee vergelijkingen met twee onbekenden. De onbekenden a_2 en a_3 en het verplaatsingsveld $w(x)$ zijn hiermee :

$$a_2 = \frac{Fl^3}{2EI}; \quad a_3 = -\frac{Fl^3}{6EI}; \quad \Rightarrow \quad w(x) = \frac{Flx^2}{2EI} - \frac{Fx^3}{6EI}$$

De potentiële energie heeft hiermee een (negatieve waarde) van :

$$V = -\frac{F^2 l^3}{6 EI}$$

Opgave 5 : Op extensie belaste staaf (2)

De potentiële energie vergelijking luidt:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^l \frac{1}{2} EA \times \varepsilon^2 dx - \int_0^l q \times u dx \\ V &= \frac{1}{2} EA \frac{\pi^2}{l^2} \hat{u}^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx - q \times \hat{u} \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx \\ V &= \frac{1}{4} EA \frac{\pi^2}{l} \hat{u}^2 - \frac{2ql}{\pi} \hat{u} \\ \delta V &= \frac{dV}{d\hat{u}} \delta \hat{u} = \left(\frac{1}{2} EA \frac{\pi^2}{l} \hat{u} - \frac{2ql}{\pi} \right) \delta \hat{u} = 0 \\ \hat{u} &= \frac{4ql^2}{\pi^3 EA} \end{aligned}$$

Of hiermee de potentiële energie een minimum of een maximum bereikt kan worden onderzocht door naar de 2^e afgeleide te kijken:

$$\frac{d^2 V}{d\hat{u}^2} = \frac{1}{2} EA \frac{\pi^2}{l^2} > 0$$

Hiermee is aangetoond dat het extreem een minimum betreft.