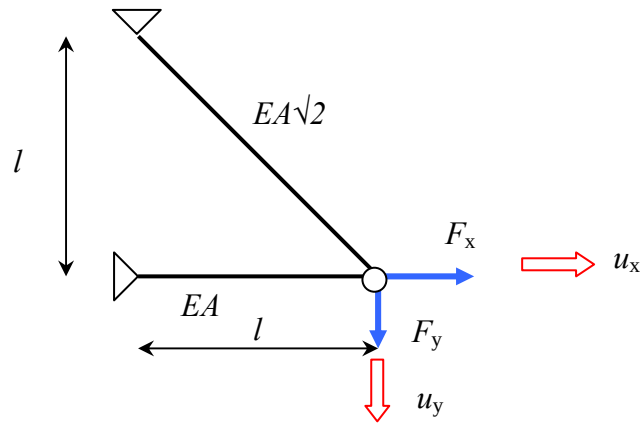


OPGAVE 3 : ARBEID EN ENERGIE

Van het hieronder weergegeven vakwerk wordt gevraagd om :



- a) Toon aan dat voor een prismatische vakwerkstaaf met alleen krachten die aangrijpen in de staafuiteinden, de opgeslagen vormveranderingsenergie t.g.v. een verlenging Δl gelijk is aan:

$$E_V = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \times (\Delta l)^2$$

- b) Met behulp van de 1^e wet van Castigliano de krachten F_x en F_y uit te drukken in de verplaatsingen u_x en u_y .

Tip : Stel eerst de vormveranderingsenergie op.

- c) Stel dit verband ook eens op de klassieke manier op. (huiswerk)

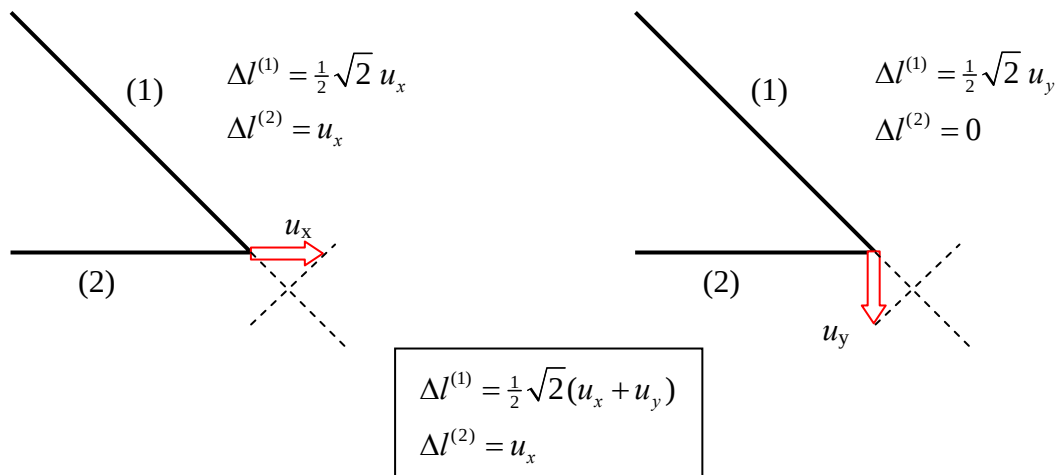
- a) zie theorie dictaat
 b) De kracht uitgedrukt in de verplaatsing betekent dat we de eerste wet van Castigliano toepassen:

$$F_x = \frac{\partial E_v}{\partial u_x}$$

$$F_y = \frac{\partial E_v}{\partial u_y}$$

Hiervoor is allereerst de vormveranderingsenergie E_v uitgedrukt in de verplaatsingen u_x en u_y nodig. Deze kunnen we als volgt bepalen:

Leg allereerst een verplaatsing in de x -richting op en bepaal de verlenging van de beide staven. Vervolgens wordt een verplaatsing in de y -richting opgelegd en wordt opnieuw de verlenging van de staven bepaald. Hiermee is dan de totale verlenging per staaf bekend t.g.v. een nog onbekende verplaatsing in x - en y -richting. (*We passen hier in feite het concept toe van de verplaatsingsmethode*)



Nu de uitdrukking voor de verlenging van de staven bekend is kan de vormveranderingsenergie worden bepaald:

$$E_v = \frac{EA^{(1)}}{2l^{(1)}} \times (\Delta l^{(1)})^2 + \frac{EA^{(2)}}{2l^{(2)}} \times (\Delta l^{(2)})^2 = \frac{EA}{2l} \times \left(\frac{3}{2}u_x^2 + u_x u_y + \frac{1}{2}u_y^2 \right)$$

Toepassen van de 1^e stelling van Castigliano levert:

$$F_x = \frac{\partial E_v}{\partial u_x} = \frac{EA}{2l} \times (3u_x + u_y)$$

$$F_y = \frac{\partial E_v}{\partial u_y} = \frac{EA}{2l} \times (u_x + u_y)$$

of in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

Hiermee is in feite de stijfheidsmatrix van deze constructie gevonden: $K = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Is dit niet een prachtige methode?