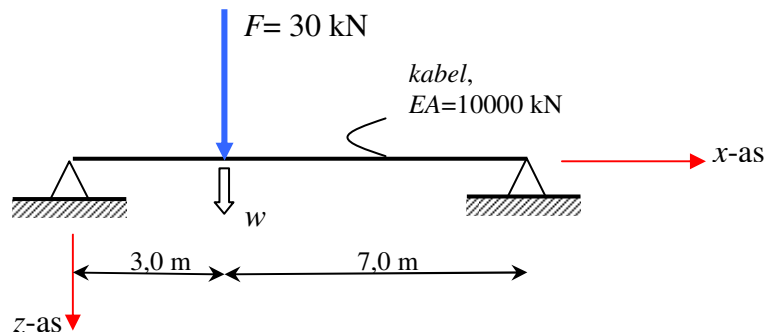


OPGAVE 5 : ARBEID EN ENERGIE

Een kabel van exact 10,5 m is geplaatst tussen twee plaatsvaste steunpunten die exact 10,0 m van elkaar liggen. Op 3,0 m vanaf het linker steunpunt grijpt een puntlast F aan zoals in de figuur is weergegeven.

U wordt gevraagd met MAPLE een onderzoek in te stellen naar het verband tussen de belasting F en de zakking w t.p.v. de puntlast.



Vragen :

- Bepaal zo exact mogelijk de zakking t.p.v. de puntlast als de normaalkrachtvervorming van de kabel buiten beschouwing wordt gelaten. U mag hier een rekenmodel naar keuze voor gebruiken mits U dit goed toelicht.
- Door de doorhang ontwikkelt de kabel een stijfheid voor belasting in de richting van de z -as. Bepaal m.b.v. de 1^e stelling van Castigliano, de stijfheid van deze kabel voor dit belastingsgeval t.p.v. het aangrijpingspunt van de belasting voor de gegeven waarde van F .
- Schets het door U verwachte verband tussen F en w in een grafiek waarbij de zakking op de horizontale as wordt uitgezet voor belastingen groter dan de gegeven F . Wat is naar uw mening de kwalitatieve invloed van de axiale stijfheid van de kabel op dit verband?

UITWERKING

- a) De kabelsegmenten blijven recht, knik t.p.v. de puntlast. Zonder verlenging moet op basis van het evenwicht gelden voor de zakking z t.p.v. de puntlast op $x = a$:

$$z = \frac{M}{H} = \frac{F \times a \times (l - a)}{Hl} = \frac{F \times 3 \times 7}{10H} \quad (1)$$

Deze zakking kan bepaald worden met de gegeven kabellengte:

$$10,5 = \sqrt{7^2 + z^2} + \sqrt{3^2 + z^2} \Leftrightarrow z = 1,48 \text{ m} \quad (2)$$

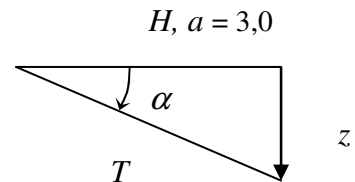
- b) Uit (1) en (2) volgt dat de horizontale component van de trekkracht H in de kabel gelijk is aan:

$$H = 42,5 \text{ kN}$$

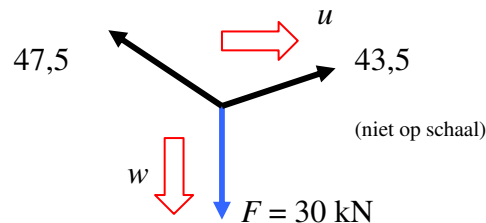
De trekkrachten in de kabelsegmenten links en rechts van de puntlast kunnen nu worden bepaald:

$$T_{links} = \frac{H}{\cos \alpha} = 47,5 \text{ kN} \quad \text{met : } \tan \alpha = \frac{z}{a}$$

$$T_{rechts} = \frac{H}{\cos \beta} = 43,5 \text{ kN} \quad \text{met : } \tan \beta = \frac{z}{l-a}$$



Hiermee ontstaat voor de kabel in de verplaatste stand de volgende evenwichtssituatie t.p.v. de puntlast:



De schuine kabelsegmenten mogen nu opgevat worden als veren met een zekere veerstijfheid. Deze stijfheden volgen uit de gegeven axiale stijfheid EA en de lengten van de segmenten volgens:

$$k_{links} = \frac{EA}{\sqrt{3^2 + 1,48^2}}; \quad k_{rechts} = \frac{EA}{\sqrt{7^2 + 1,48^2}}$$

Een extra verplaatsing w en u zal een verlenging geven in het linker en rechter segment van:

$$\Delta l_{links} = w \times \sin \alpha + u \times \cos \alpha; \quad \Delta l_{rechts} = w \times \sin \beta - u \times \cos \beta$$

De stijfheid wordt hier bepaald m.b.v. de 1^e wet van Castigliano. De vormveranderingsenergie die opgeslagen wordt in de beide staven is, uitgedrukt in de verplaatsingen u en w , te bepalen met:

$$E_v = \frac{1}{2} k_{links} \times \Delta l_{links}^2 + \frac{1}{2} k_{rechts} \times \Delta l_{rechts}^2$$

Toepassen van Castigliano levert dan de stijfheidsrelatie tussen de uitwendige krachten die aangrijpen op de kabel op $x=a$ en de horizontale en verticale verplaatsing van de kabel op dit punt:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial E_v}{\partial u} = 3742,09u + 903,23w \\ F_z &= \frac{\partial E_v}{\partial w} = 903,23u + 644,99w \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

Voor dit belastingsgeval is de horizontale kracht gelijk aan nul en de verticale kracht is 30 kN. Hiermee ontstaat het stelsel:

$$\begin{bmatrix} 3742,09 & 903,23 \\ 903,23 & 644,99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

En vinden we voor de verplaatsingen u en w :

$$u = -0,0169; \quad w = 0,0703$$

Daarmee is de verticale stijfheid van de kabel ter plaatse van de puntlast te bepalen, er geldt op constructieniveau immers $F = k \times w$:

$$k = \frac{F}{w} = \frac{30}{0,0703} = 426 \text{ kN/m}$$

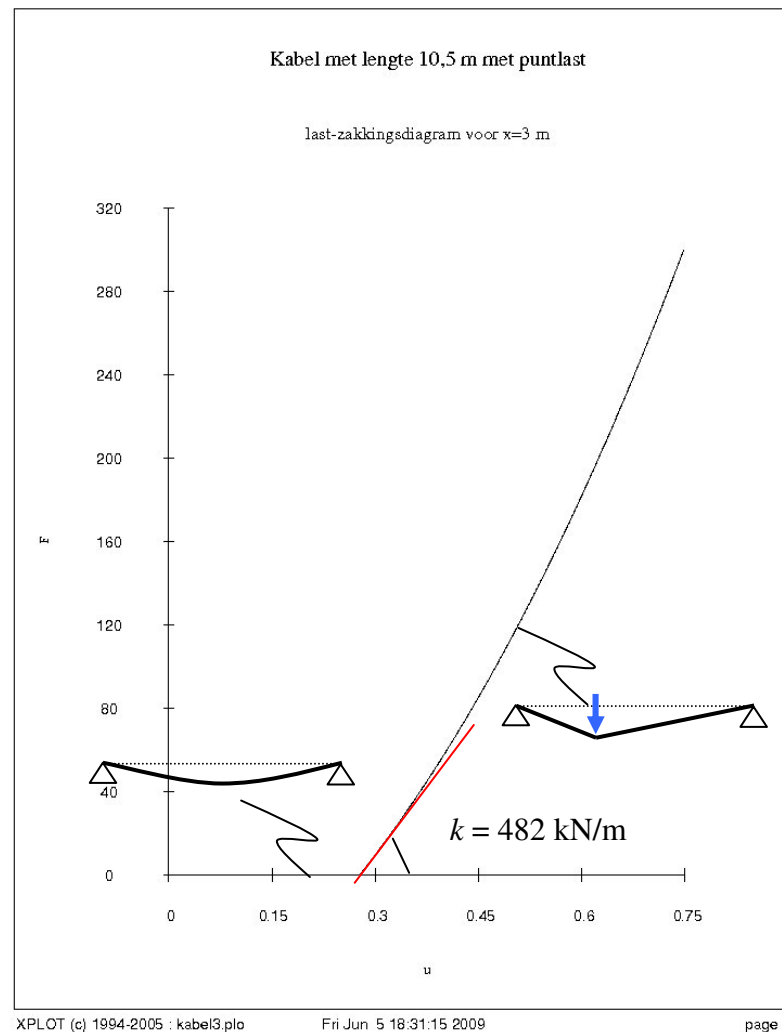
Deze stijfheid kan ook worden gevonden door de beide schuine veren in te voeren als vakwerk in b.v. MatrixFrame. De stijfheid wordt wel onderschat want de verstijvende werking door geometrische niet-lineariteit van de kabel is niet verwerkt in de berekening. De werkelijke stijfheid zal groter zijn.

- c) De stijfheidsrelatie van de kabel is niet-lineair. Bij toenemende verplaatsing zal de stijfheid van de kabel toenemen. Als de rekstijfheid van de kabel wordt meegenomen zal de verplaatsing een beetje groter worden en dus de stijfheid lager zijn.

Merk op:

Uit de vraagstelling was niet geheel duidelijk welke stijfheid werd gevraagd. De bedoeling was het gedrag van de kabel te onderzoeken t.g.v. de aangegeven belasting op het aangrijpingspunt van deze belasting. Een antwoord waarin de stijfheid k_{zz} als stijfheid werd opgevoerd is goed gerekend maar hiermee wordt de stijfheid t.p.v. de puntlast wel overschat met een factor $\sqrt[645]{426} = 1,5$.

Ter illustratie wordt hier een resultaat getoond van het gedrag van deze kabel indien een niet-lineaire berekening¹ wordt uitgevoerd. Om de berekening zo realistisch mogelijk te maken is de kabel eerst onbelast als een parabool ingevoerd met een lengte langs de koorde van 10,5 m. Vervolgens is incrementeel een belasting van 300 kN aangebracht. Deze belasting is het 10-voudige van de in deze opgave aangebrachte belasting waardoor het niet-lineaire karakter van de oplossing goed zichtbaar wordt.



In de bovenstaande figuur is het last-zakkingsdiagram t.p.v. de puntlast weergegeven. Uit de figuur blijkt duidelijk dat de onbelaste kabel in eerste instantie geen stijfheid heeft, de kabel moet eerst een zodanige stand innemen dat de kabelvorm overeenstemt met de aangebrachte belasting. Pas bij een zakking (t.o.v. de initiële parabool) van 0,27 m ontwikkelt de kabel stijfheid. De berekende stijfheid is 482 kN/m en is inderdaad iets groter dan de eerder gevonden waarde.

¹ Berekening is uitgevoerd met het niet-lineaire programma FEMDEM, © J.W. Welleman