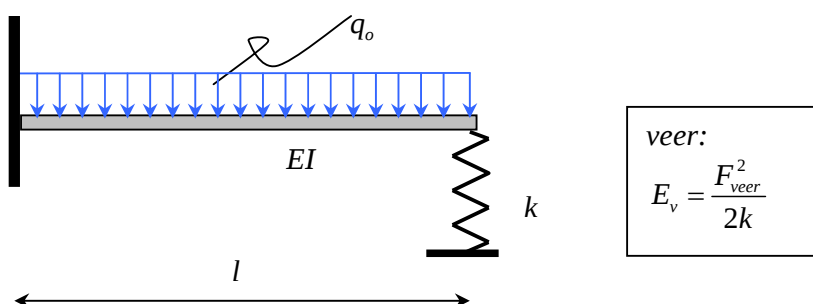


OPGAVE 6 : ARBEID EN ENERGIE

In de onderstaande figuur is een buigligger weergegeven die aan de linker zijde volledig is ingeklemd en rechts is ondersteund door een veer met een veerstijfheid k . Over de gehele ligger werkt een verticale gelijkmatig verdeelde belasting q_o .

De veerstijfheid is met de onderstaande uitdrukking in een (dimensieloos) verhoudingsgetal uit te drukken t.o.v. de buigstijfheid en overspanning van de ligger:

$$\rho = \frac{kl^3}{EI} \Rightarrow k = \frac{\rho EI}{l^3}$$



Vraag 1

Geef aan hoe u met behulp van de theorema's van Castigliano de krachtsverdeling in deze constructie kunt vinden en maak een schets om uw aanpak te onderbouwen.

Vraag 2

Bepaal de uitdrukking voor de kracht in de veer op de door u beschreven wijze en toon aan dat hiervoor geldt:

$$F_v = \frac{\rho}{\rho + 3} \times \frac{3}{8} ql$$

Vraag 3

Bepaal de waarde van ρ waarvoor geldt dat het inklemmingsmoment in absolute waarde drie maal het maximum veldmoment bedraagt.

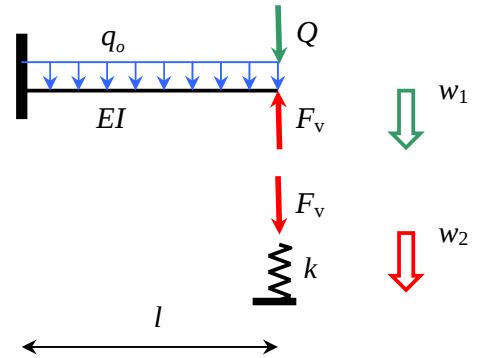
Vraag 4

Als verder gegeven is : $EI = 10000 \text{ kNm}^2$; $l = 8 \text{ m}$; $q_o = 5 \text{ kN/m}$, bepaal dan de momentenlijn voor de door u gevonden waarde van ρ en teken deze en geef daarbij de vervormingstekens aan en schrijf de waarden erbij.

UITWERKING

Vraag 1

De vormveranderingsenergie van de constructie bestaat uit een buigingsaandeel uit de ligger en een aandeel uit de veer. Neem de drukkracht F_v in de veer als onbekende en stel de verplaatsing van het liggeruiteinde gelijk aan de indrukking van de veer. E.e.a. kan op verschillende manieren worden vormgegeven. Hier wordt gekozen voor een dummy puntlast Q (omlaag) op het liggeruiteinde. Voor de M -lijn geldt:



$$M(x) = -\frac{1}{2}q(l-x)^2 - (Q - F_v)(l-x)$$

De uitdrukkingen voor de aandelen in de vormveranderingsenergie worden hiermee:

Ligger:
$$E_{v1} = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M(x)^2}{2EI} dx \quad \dots \text{uitwerken met Maple}$$

Veer:
$$E_{v2} = \frac{F_v^2}{2k} = \frac{F_v^2 l^3}{2\rho EI}$$

Pas Castigliano toe en differentieer de vormveranderingsenergie van beide delen naar resp Q en F_v en stel deze verplaatsingen gelijk onder de aanname uiteraard dat de grootte van de dummy-kracht Q gelijk is aan nul:

$$\frac{dE_{v1}}{dQ} = \frac{dE_{v2}}{dF_v}$$

Merk op:

Door een drukkracht in de veer aan te nemen is de bijbehorende verplaatsing die wordt verkregen m.b.v. Castigliano een verkorting van de veer (zakking). Op deze manier is deze zakking gelijk van teken als de zakking van het liggeruiteinde t.g.v. de dummy last Q . Dit is een handigheidje voor teken-ellende.

Vraag 2

Oplossen van deze vergelijking levert voor de onbekende veerkracht F_v :

$$F_v = \frac{\rho}{\rho + 3} \times \frac{3}{8} ql$$

Merk op:

Als de veerstijfheid oneindig wordt dan levert deze uitdrukking de bekende oplegreactie op voor een enkelzijdig ingeklemde ligger met een roloplegging aan de rechter zijde.

Vraag 3

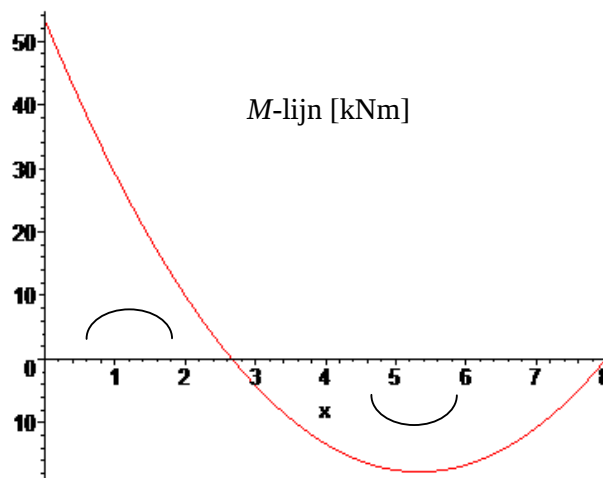
Bij dit onderdeel ging het erom om het maximum veldmoment te bepalen. Dat treedt op daar waar de dwarskracht nul is. Met de bekende veerkracht is de momentenverdeling in de ligger bekend. De dwarskracht is de eerste afgeleide van het moment en daarmee is de V-lijn te bepalen. Het maximum veldmoment zit op een afstand vanaf de oorsprong:

$$x = \frac{(5\rho + 24)}{8(\rho + 3)} \cdot l$$

Invullen van deze waarde voor x in de momentenverdeling levert een maximum waarde op voor het veldmoment. Door de absolute waarde van het inklemmingsmoment gelijk te stellen aan 3 maal dit veldmoment ontstaat een vergelijking met alleen de ρ als onbekende. Oplossen levert een waarde van 24 op.

Vraag 4

Met de gegeven parameters is het inklemmingsmoment gelijk aan -53,33 kNm.



De complete Maple invoer is op de volgende bladzijde weergegeven.

```

> restart;
> k:=rho*EI/L^3;
> M:=- (1/2)*q*(L-x)^2-(Q-Fv)*(L-x);
> Ev1:=int(M^2/(2*EI),x=0..L); Ev2:=Fv^2/(2*k);
> w1:=diff(Ev1,Q); w2:=diff(Ev2,Fv);
> Q:=0; #EI:=10000; L:=8; q:=5; rho:=1500;
> eq1:=w1=w2;
> Fv:=solve(eq1,Fv);
> V:=diff(M,x);
> xmax:=solve(V,x);
> x:=xmax; Mmax:=M: evalf(Mmax);
> x:=0; Mi:=M: evalf(Mi);
> eq2:=Mi=(-3*Mmax);
> sol:=solve(eq2,rho); assign(sol);
> evalf(sol[1]); evalf(sol[2]);
> rho:=sol[1];
> evalf(Mi);
> evalf(3*Mmax);
> EI:=10000; L:=8; q:=5;
> evalf(Mi);
> evalf(3*Mmax); evalf(Mmax);
> x:='x';
> plot(-M,x=0..L);

```