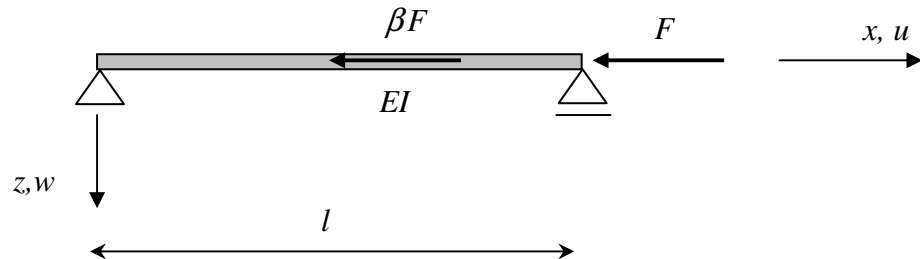


OPGAVE 7 : ARBEID EN ENERGIE

In de onderstaande figuur is een op druk belaste buigzame staaf weergegeven die halverwege belast wordt met een extra kracht. De normaalkracht in de staaf is hierdoor niet constant.



Vraag

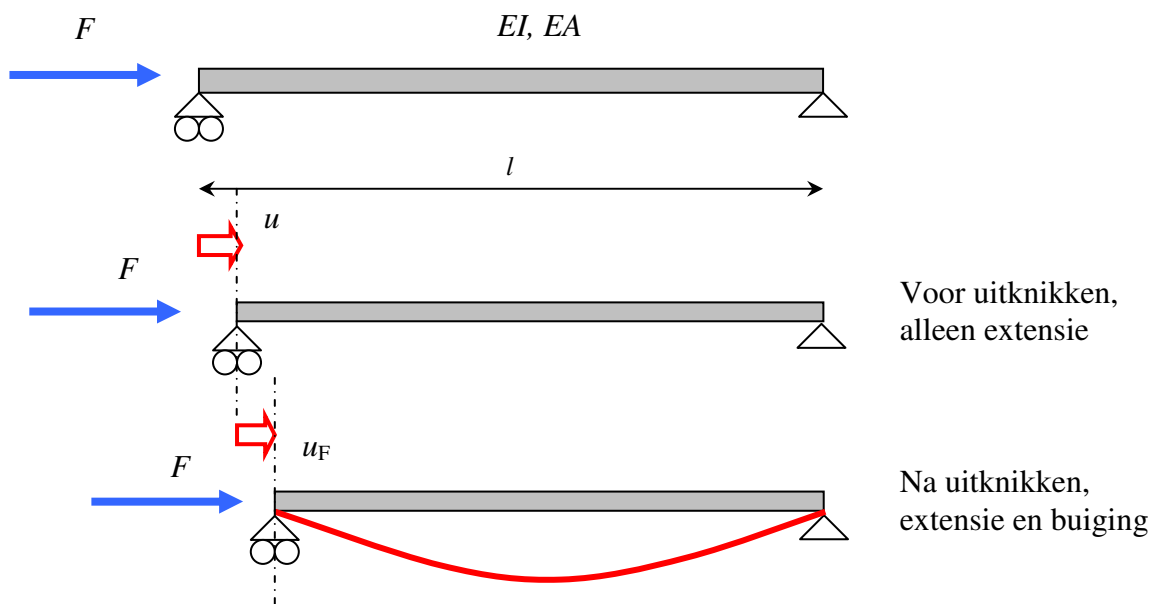
Bepaal met een arbeid/energie methode een uitdrukking voor de kniklast. Teken het verband tussen de factor β en de kniklast F in een grafiek.

UITWERKING

Theorie

Een evenwicht is stabiel als bij iedere overgang naar een naburige kinematisch mogelijke configuratie de door de belasting verrichte arbeid kleiner is dan de benodigde vervormingsenergie.

Als we dit toepassen op een buigzame, op druk belaste staaf zoals in de onderstaande figuur is weergegeven dan zal de puntlast arbeid verrichten door de verplaatsing in de richting van de kracht en zal in de *uitknikkende staaf* de energie worden opgeslagen in de vorm van vervormings- energie voor *extensie* en *buiging*.



Figuur 1 : Buigzame op druk belaste staaf, knikstaaf van Euler

Vlak voor uitknikken is er alleen sprake van vervorming door extensie immers de staaf is nog niet gebogen. Voor de vervormingsenergie geldt:

$$E_v = \int_0^l \frac{1}{2} EA \epsilon^2 dx$$

Na uitknikken is er wel een kromming en geldt voor de vervormingsenergie:

$$E_v = \int_0^l \frac{1}{2} EA \epsilon^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx$$

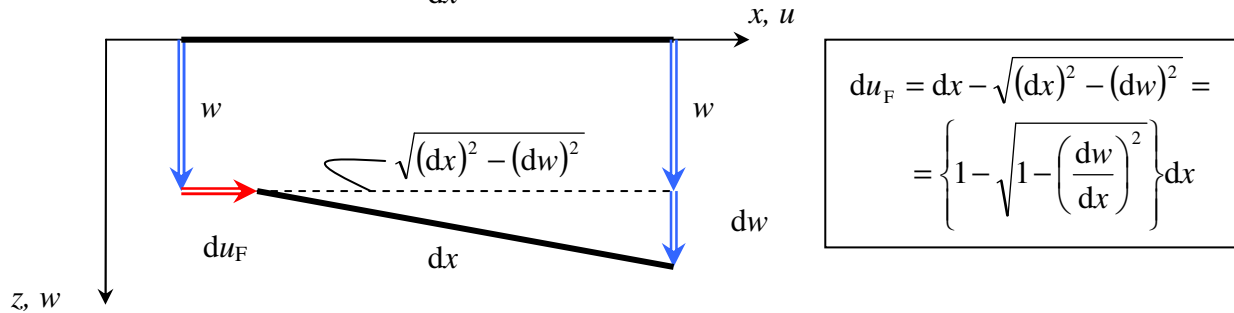
Bij het langzaam verhogen van de axiale belasting zal juist voor en juist na uitknikken de normaalkracht in de staaf gelijk zijn. De axiale rek is dan voor beide situaties ook gelijk waarmee het aandeel in de vervormingsenergie t.g.v. extensie juist voor en na uitknikken dus ook gelijk moet zijn. Dit houdt in dat bij de overgang van de rechte staaf naar de uitgeknikte staaf er een toename plaats vindt van de vervormingsenergie die juist gelijk is aan alleen de vervormingsenergie t.g.v. buiging:

$$\Delta E_v = \int_0^l \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx = \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx$$

Deze vervormingsenergie is gelijk aan de door de puntlast verrichte arbeid in de overgang van de rechte naar de gebogen toestand. Deze arbeid is gelijk aan:

$$A = F \times u_F$$

Deze horizontale verplaatsing kan worden uitgedrukt in de verticale uitbuiging met behulp van de stelling van Pythagoras: dx



Figuur 2 : Kleine horizontale en verticale verplaatsingen

De lengte van de staaf blijft immers voor en na uitbuigen onveranderd.

De gevonden uitdrukking voor horizontale verplaatsing bevat een vervelende wortel-functie met een kwadratische afgeleide. Deze uitdrukking kan met behulp van een Taylor-reeks ontwikkeling worden benaderd (met verwaarlozing van de hogere orde termen) tot :

$$du_F = \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \right\} dx \cong \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$$

De totale horizontale verplaatsing is na integreren over de totale staaflengte gelijk aan:

$$u_F = \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$$

Gelijkstellen van de arbeid t.g.v. deze horizontale verplaatsing aan de vervormingsenergie t.g.v. buiging levert uiteindelijk de vergelijking waarmee de kniklast kan worden gevonden:

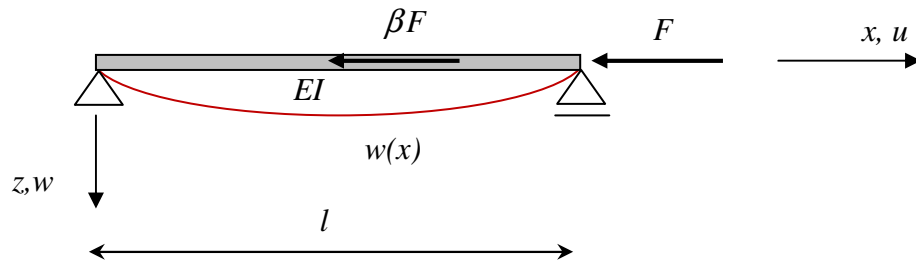
$$\Delta E_v = A \Leftrightarrow \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx = F \times \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$$

Er is nog juist evenwicht mogelijk als de arbeid gelijk is aan de vormveranderingsenergie.

Aan deze aanpak is de naam verbonden van Rayleigh. Door een knikvorm $w(x)$ aan te nemen kan een kniklast worden bepaald. Deze kniklast is hoger dan de werkelijke kniklast en dat is iets om goed in de gaten te houden want de oplossing is daarmee onveilig! Hoe beter het aangenomen verplaatsingsveld past bij de werkelijke knikvorm, hoe nauwkeuriger de kniklast zal zijn. De knikvorm moet uiteraard voldoen aan de kinematische eisen aan de randen m.b.t. de verplaatsing en hoekverdraaiing maar zal i.h.a. niet voldoen aan alle evenwichtseisen. Hierdoor kunnen er dus (kleine) afwijkingen optreden. Als de werkelijke uitbuigingsvorm wordt aangenomen dan zal dit de exacte kniklast geven.

Toepassing

De theorie passen we toe op de opgave.



Voor deze opdracht nemen we een sinusvormige knikvorm aan:

$$w(x) = C \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Deze uitbuigingsvorm leidt tot axiale verplaatsing langs de liggeras:

$$u(x) = -\int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = -\frac{C^2 \pi}{4l^2} \left[l \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \pi x \right]$$

$$u\left(\frac{1}{2}l\right) = -\frac{C^2 \pi^2}{8l}$$

$$u(l) = -\frac{C^2 \pi^2}{4l}$$

Punten op de liggeras zullen door uitbuigen zodoende naar links verplaatsen. Beide puntlasten βF en F die in de negatieve x -richting werken, zullen hierdoor positieve arbeid verrichten:

$$A_{uitw} = (-\beta F) \times \frac{-C^2 \pi^2}{8l} + (-F) \times \frac{-C^2 \pi^2}{4l} \quad (1)$$

$$A_{uitw} = \frac{C^2 F \pi^2}{8l} (\beta + 2)$$

Deze arbeid moet gelijk zijn aan de opgeslagen vormveranderingsenergie door buiging:

$$\Delta E_v = \int_0^l \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx = \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{C^2 \pi^4 EI}{4l^3} \quad (2)$$

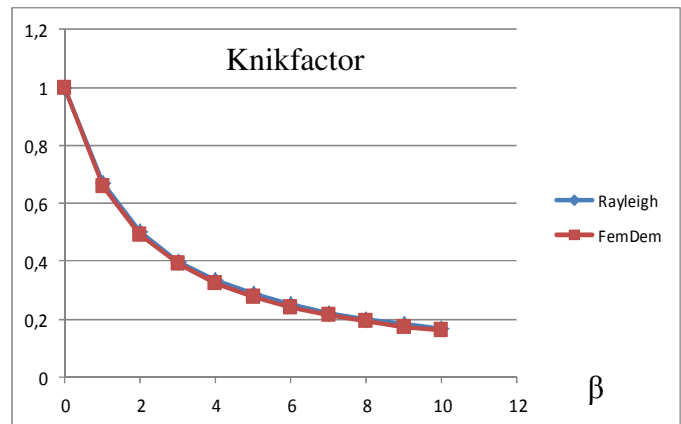
Gelijkstellen van (1) en (2) levert:

$$F_k = \frac{2\pi^2 EI}{(\beta + 2)l^2} = \alpha \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met:} \quad \alpha = \frac{2}{\beta + 2}$$

Deze uitkomst kan geschreven worden in de vorm van een knikfactor α maal de kniklast volgens Euler voor de op druk belaste staaf met alleen een last F op het rechter uiteinde.

Deze zeer handzame uitdrukking is getoetst aan numerieke uitkomsten met een elementenprogramma. In de onderstaande tabel zijn de verschillen weergegeven en is in een figuur het verschil weergegeven tussen de knikfactor volgens Rayleigh en de numerieke resultaten voor verschillende waarden van β :

β	Rayleigh	FemDem	Vershil %
0	0,99978678	0,996240538	0,35
1	0,666693388	0,660614117	0,91
2	0,500020041	0,491914347	1,62
3	0,399965372	0,391353072	2,15
4	0,333346694	0,324734394	2,58
5	0,285725738	0,27736674	2,93
6	0,250010021	0,242157629	3,14
7	0,222146695	0,214547606	3,42
8	0,199856035	0,192763552	3,55
9	0,181871525	0,175032345	3,76
10	0,166673347	0,16008747	3,95



De oplossing voldoet goed, de verschillen nemen geleidelijk aan toe tot ca 3,5 % voor een puntlast halverwege de ligger welke 10 maal de grootte heeft van de puntlast op het uiteinde. Uit de resultaten valt op dat de numerieke uitkomsten allemaal een knikfactor geven die lager is dan de volgens Rayleigh gevonden waarde hetgeen voldoet aan onze verwachtingen.

Werkelijke verplaatsingsveld

De aangenomen sinusvorm zal niet de echte knikvorm zijn want beide delen van de ligger hebben een verschillende normaalkracht. De beide staafdelen hebben daarmee een verschillende DV:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + (\beta + 1) F \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} l$$

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + F \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \frac{1}{2} l \leq x \leq l$$

De algemene oplossing van de beide staafdelen leveren hiermee sinus en cosinus oplossingen met een verschillende perioden.

$$w_1(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin(\alpha_1 x) + C_4 \cos(\alpha_1 x) \quad \wedge \quad \alpha_1^2 = \frac{(1 + \beta) F}{EI} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} l$$

$$w_2(x) = D_1 + D_2 x + D_3 \sin(\alpha_2 x) + D_4 \cos(\alpha_2 x) \quad \wedge \quad \alpha_2^2 = \frac{F}{EI} \quad \frac{1}{2} l \leq x \leq l$$

De aangenomen sinusvorm met één enkele periode kan dus niet de juiste zijn. Verder uitwerken van de exacte route wordt hier niet gevraagd. De aanpak zal echter bekend zijn, stel de 8 rand- en overgangsvoorwaarden op waaraan de beide oplossingen moeten voldoen. Er resteert een homogeen stelsel vergelijkingen waar alleen een niet triviale oplossing voor te vinden is indien de determinant van het stelsel gelijk is aan nul. Oplossen van de karakteristieke vergelijking levert de uitdrukking voor de kniklast. Een gesloten uitdrukking zal dit niet opleveren en daarom is de methode van Rayleigh eleganter.