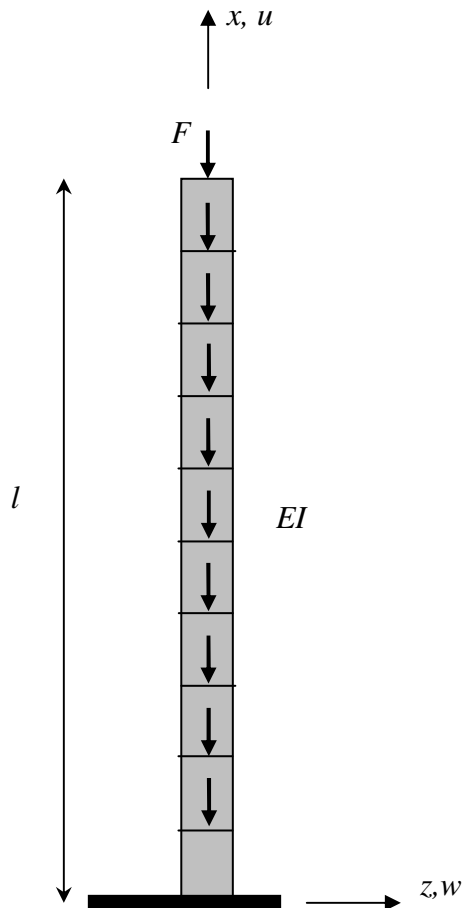


OPGAVE 8 : ARBEID EN ENERGIE

In de onderstaande figuur is een liftschacht van een flatgebouw gegeven. Iedere verdieping van het gebouw draagt een belasting F af op deze liftschacht. We gaan ervan uit dat de liftschacht de stabiliteit van het evenwicht moet waarborgen voor het gehele gebouw, in de kracht F zit daarom het effect van eventuele aanpendelende belasting reeds verwerkt. De normaalkracht in de liftschacht is door deze belasting niet constant en de gebruikelijke route om de kniklast te vinden m.b.v. de differentiaalvergelijking voor constante normaalkracht kan nu niet worden toegepast.



Vraag

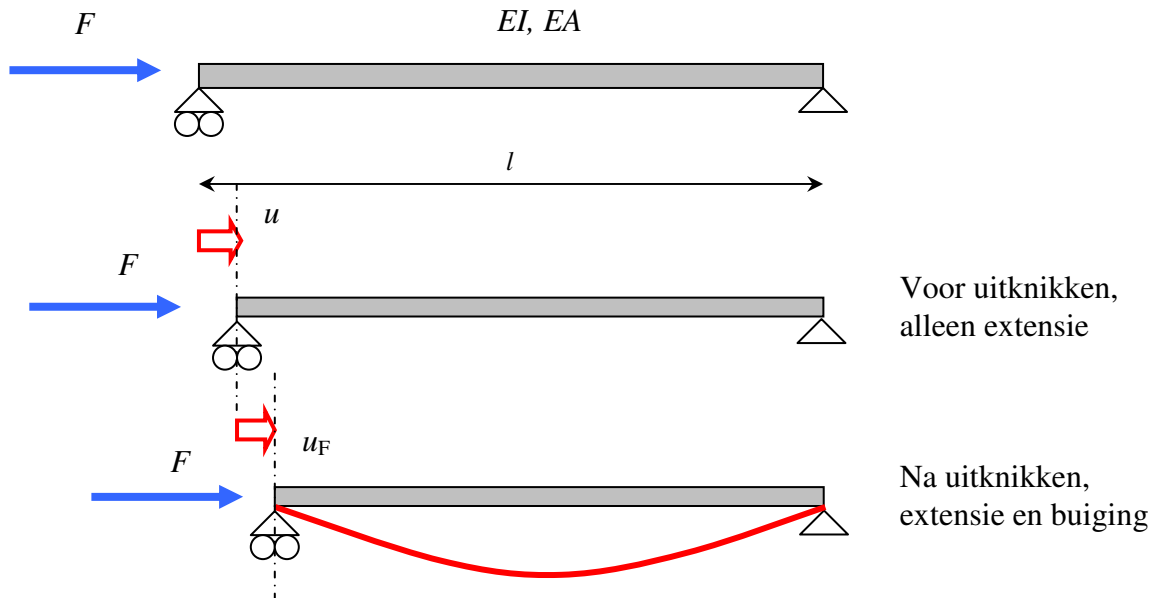
Bepaal met een arbeid/energie methode een uitdrukking voor de kniklast en bepaal hiermee een uitdrukking voor de kniklengte.

UITWERKING

Theorie

Een evenwicht is stabiel als bij iedere overgang naar een naburige kinematisch mogelijke configuratie de door de belasting verrichte arbeid kleiner is dan de benodigde vervormingsenergie.

Als we dit toepassen op een buigzame, op druk belaste staaf zoals in de onderstaande figuur is weergegeven dan zal de puntlast arbeid verrichten door de verplaatsing in de richting van de kracht en zal in de *uitknikkende staaf* de energie worden opgeslagen in de vorm van vervormings- energie voor *extensie* en *buiging*.



Figuur 1 : Buigzame op druk belaste staaf, knikstaaf van Euler

Vlak voor uitknikken is er alleen sprake van vervorming door extensie immers de staaf is nog niet gebogen. Voor de vervormingsenergie geldt:

$$E_v = \int_0^l \frac{1}{2} EA \epsilon^2 dx$$

Na uitknikken is er wel een kromming en geldt voor de vervormingsenergie:

$$E_v = \int_0^l \frac{1}{2} EA \epsilon^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx$$

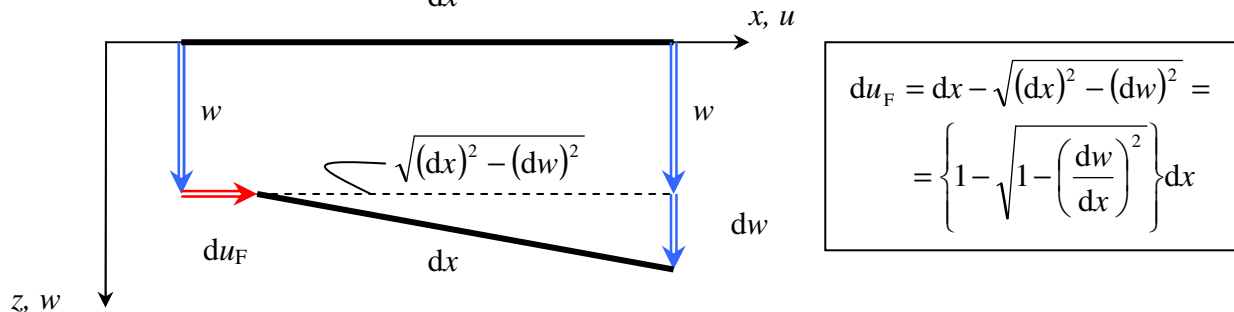
Bij het langzaam verhogen van de axiale belasting zal juist voor en juist na uitknikken de normaalkracht in de staaf gelijk zijn. De axiale rek is dan voor beide situaties ook gelijk waarmee het aandeel in de vervormingsenergie t.g.v. extensie juist voor en na uitknikken dus ook gelijk moet zijn. Dit houdt in dat bij de overgang van de rechte staaf naar de uitgeknikte staaf er een toename plaats vindt van de vervormingsenergie die juist gelijk is aan alleen de vervormingsenergie t.g.v. buiging:

$$\Delta E_v = \int_0^l \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx = \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx$$

Deze vervormingsenergie is gelijk aan de door de puntlast verrichte arbeid in de overgang van de rechte naar de gebogen toestand. Deze arbeid is gelijk aan:

$$A = F \times u_F$$

Deze horizontale verplaatsing kan worden uitgedrukt in de verticale uitbuiging met behulp van de stelling van Pythagoras:



Figuur 2 : Kleine horizontale en verticale verplaatsingen

De lengte van de staaf blijft immers voor en na uitbuigen onveranderd.

De gevonden uitdrukking voor horizontale verplaatsing bevat een vervelende wortel-functie met een kwadratische afgeleide. Deze uitdrukking kan met behulp van een Taylor-reeks ontwikkeling worden benaderd (met verwaarlozing van de hogere orde termen) tot :

$$du_F = \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx} \right)^2} \right\} dx \cong \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

De totale horizontale verplaatsing is na integreren over de totale staaflengte gelijk aan:

$$u_F = \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

Gelijkstellen van de arbeid t.g.v. deze horizontale verplaatsing aan de vervormingsenergie t.g.v. buiging levert uiteindelijk de vergelijking waarmee de kniklast kan worden gevonden:

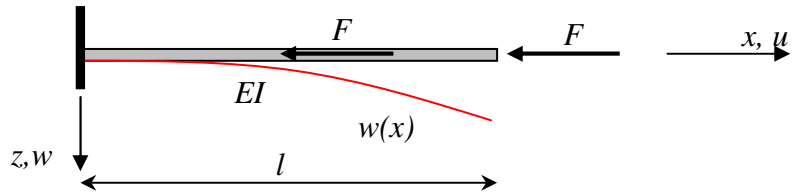
$$\Delta E_v = A \Leftrightarrow \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = F \times \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

Er is nog juist evenwicht mogelijk als de arbeid gelijk is aan de vormveranderingsenergie.

Aan deze aanpak is de naam verbonden van Rayleigh. Door een knikvorm $w(x)$ aan te nemen kan een kniklast worden bepaald. Deze kniklast is hoger dan de werkelijke kniklast en dat is iets om goed in de gaten te houden want de oplossing is daarmee onveilig! Hoe beter het aangenomen verplaatsingsveld past bij de werkelijke knikvorm, hoe nauwkeuriger de kniklast zal zijn. De knikvorm moet uiteraard voldoen aan de kinematische eisen aan de randen m.b.t. de verplaatsing en hoekverdraaiing maar zal i.h.a. niet voldoen aan alle evenwichtseisen. Hierdoor kunnen er dus (kleine) afwijkingen optreden. Als de werkelijke uitbuigingsvorm wordt aangenomen dan zal dit de exacte kniklast geven.

Toepassing

De theorie passen we toe op de opgave. Voor de eenvoud worden slechts twee van de tien aanwezige krachten getekend.



Figuur 3 : Uitbuigingsvorm

Voor deze opdracht nemen we een cosinusvormige knikvorm aan die voldoet aan de kinematische randvoorwaarden:

$$w(x) = C \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \right]$$

Deze uitbuigingsvorm leidt tot axiale verplaatsing langs de liggeras:

$$u(x) = -\int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = -\frac{C^2 \pi}{16l^2} \left[\pi x - l \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right] \quad (\text{alle uitkomsten zijn negatief!})$$

Punten op de liggeras zullen door uitbuigen zodoende naar links verplaatsen. De tien puntlasten die in de negatieve x -richting werken, zullen hierdoor positieve arbeid verrichten:

$$A_{uitw} = \sum_{i=1}^{10} (-F) \times u\left(\frac{i}{10}l\right) \quad (1)$$

Deze arbeid moet gelijk zijn aan de opgeslagen vormveranderingsenergie door buiging:

$$\Delta E_v = \int_0^l \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx = \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{C^2 \pi^4 EI}{64l^3} \quad (2)$$

Uitwerken met MAPLE en gelijkstellen van (1) en (2) levert:

$$F_k = \frac{0,0716 \pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{per verdieping!})$$

Bij het toepassen van veel puntlasten kan deze belasting in gedachten worden vervangen door een gelijkmatig verdeelde belasting. De totale belasting Q is dan gelijk aan nF waarbij n het aantal verdiepingen is. Voor dit probleem met $n = 10$ wordt zo gevonden:

$$Q_k = q_k \cdot l = n \cdot F_k = \frac{10 \cdot 0,0716 \cdot \pi^2 EI}{l^2} = \frac{7,07 EI}{l_k^2} = \frac{\pi^2 EI}{(1,18l)^2}$$

Voor de totale kniklast Q_k op de liftschacht kan hiermee een kniklengte worden gevonden van $1,18 l$. Voor een gelijkmatig verdeelde belasting is een oplossing uit de literatuur bekend:

$$Q_k = q_k \cdot l = \frac{7,94 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = \frac{\pi^2 EI}{(1,12l)^2}$$

De discrete belasting met 10 puntlasten en een kniklengte van $1,18 l$ geeft een iets lagere totale kniklast dan die met de volledig uitgesmeerde belasting.