

ConstructieMechanica 3
CTB2210

MODULE : SPANNINGSLEER EN BEZWIJKMODELLEN

COEN HARTSUIJKER
HANS WELLEMAN

Civiele Techniek
TU-Delft

Januari 2018

INHOUDSOPGAVE

1. INTRODUCTIE VAN SPANNINGEN EN REKKEN	1
1.1 SPANNINGEN IN 3D.....	1
1.1.1 <i>Bijzondere spanningstoestanden</i>	4
1.1.2 <i>Isotrope en deviatorische spanningscomponenten</i>	6
1.2 REKKEN.....	7
1.2.1 <i>Bijzondere reksituaties, vlakke vervormingstoestand</i>	17
1.2.2 <i>Volumerek</i>	17
2. TRANSFORMATIES EN TENSOREN	19
2.1 DIRECTE METHODE, SPANNINGSTRANSFORMATIE EN HOOFDSPANNINGEN.....	20
2.2 ALGEMENE METHODE MET VECTORTRANSFORMATIES, TENSOREN	23
2.2.1 <i>Tensoren</i>	28
2.2.2 <i>Bijzondere wiskundige eigenschappen van tensoren</i>	28
2.2.3 <i>Generalisatie naar 3D</i>	30
2.3 GRAFISCHE TRANSFORMATIES, CIRKEL VAN MOHR.....	31
2.4 TOEPASSINGEN VAN DE CIRKEL VAN MOHR	34
2.4.1 <i>Voorbeeld, stijfheidstensor</i>	34
2.4.2 <i>Voorbeeld, spanningstensor</i>	38
2.4.3 <i>Voorbeeld, rektensor</i>	42
3. VRAAGSTUKKEN.....	45
4. LINEAIR ELASTISCHE SPANNING – REK RELATIE	49
4.1 ÉÉN-ASSIGE TREKPROEF.....	50
4.2 NORMAALSPANNINGEN VERSUS REKKEN.....	52
4.3 SCHUIFSPANNINGEN VERSUS AFSCHUIFVERVORMING	53
4.4 COMPLETE SPANNING-REK RELATIE IN 3D.....	54
4.5 SPANNING-REK RELATIE VOOR VLAKSPANNINGSTOESTAND	54
4.6 SPANNING-REK RELATIE IN DE HOOFDRICHTINGEN.....	55
5. VRAAGSTUKKEN.....	56
5.1 OPGAVE 1	56
5.2 OPGAVE 2	56
5.3 OPGAVE 3	57
6. BEZWIJKEN.....	59
6.1 HOOFDSPANNINGSRUIMTE.....	59
6.2 VON MISES FAILURE MODEL.....	61
6.2.1 <i>Von Mises vloeicriterium gebaseerd op een éénassige trekproef</i>	63
6.2.2 <i>Von Mises criterium voor een vlakspanningstoestand</i>	65
6.2.3 <i>Von Mises criterium voor liggers</i>	65
6.3 TRESCA'S BEZWIJKCRITERIUM.....	66
6.3.1 <i>Tresca voor een vlakspanningstoestand</i>	68
6.3.2 <i>Tresca voor slanke liggers</i>	68
6.4 VON MISES VERSUS TRESCA	70
6.4.1 <i>Voorbeeld</i>	71
7. APPENDIX	73
7.1 REKFORMULERING	73
7.2 SHEAR MODULUS G	74
7.3 VON MISES CRITERION BASED ON DEFORMATION ENERGY	76
7.3.1 <i>Stains and stresses due to shape deformation</i>	76
7.3.2 <i>Deformation energy</i>	77
7.4 VON MISES BASED ON A SHEAR TEST.....	79
7.5 CONTINUATION OF STRAIN EXAMPLE FROM PARAGRAPH 2.5.3	80
7.6 EXAMPLE OF AN EXAMINATION	82

STUDIEAANWIJZING

Deze aantekeningen maken deel uit van de lesmodule CTB2210 en CIE4145 (internationale studenten). Op verzoek is de Engelse versie omgezet naar een Nederlandse versie. De opzet van dit dictaat is zodanig dat de theorie wordt afgewisseld met voorbeelden en toepassingen. Aan het eind van een onderdeel zijn opgaven opgenomen waarvan de antwoorden beschikbaar zijn. Hierdoor is een leermiddel ontstaan dat zich uitstekend leent voor zelfstudie.

Naast het lesmateriaal is ook extra materiaal beschikbaar via de web site van de docent:

http://icozct.tudelft.nl/TUD_CT/

Hoewel het materiaal met de grootst mogelijk zorgvuldigheid is voorbereid, is niet uit te sluiten dat er onvolkomenheden in zijn geslopen. De auteurs stellen het dan ook zeer op prijs als deze worden gemeld.

Ten opzichte van de vorige versie is de vakcode aangepast en is ook het laatste hoofdstuk vertaald.

de docent,

Hans Welleman

Januari 2018

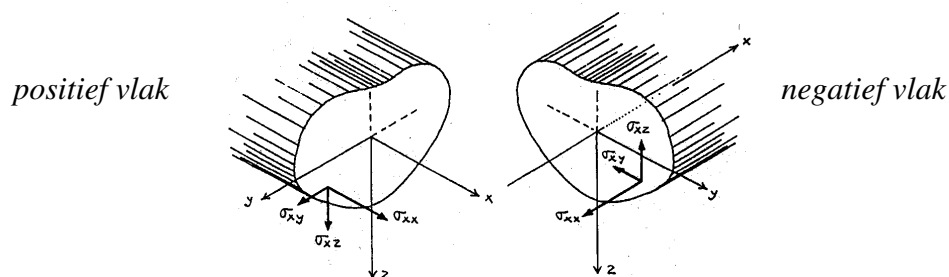
j.w.welleman@tudelft.nl

1. INTRODUCTIE VAN SPANNINGEN EN REKKEN

In deze module wordt de relatie tussen spanningen en vervormingen voor lineair elastische 3D-continua beschreven. Er wordt gestart met de beschrijving van de spannings- en rekdefinities in 3D en de relatie tussen spanningen en rekken. Doel is om een bezwijkmodel te genereren waaraan een spanningssituatie kan worden getoetst. We beperken ons hier tot de modellen van von Mises en Tresca. Om deze modellen te kunnen toepassen is het noodzakelijk dat een spanningstoestand kan worden getransformeerd naar een eenduidig assenstelsel waarmee de hoofdspanningen kunnen worden beschreven. Hiervoor is het nodig om de transformatieregels voor spanningen en rekken te beschrijven. Deze transformatieregels blijken een algemene geldigheid te hebben. Om dit te laten zien wordt het begrip tensor geïntroduceerd. De transformatieformules kunnen zowel analytisch als grafisch worden toegepast. Deze laatste vorm staat ook wel bekend als de cirkel van Mohr. Hoewel deze methode er ouderwets uitziet is zij voor een aantal situaties erg handig zoals uit de vele voorbeelden zal blijken.

1.1 Spanningen in 3D

Met de bekende definitie dat een spanning een kracht per eenheid van oppervlak is kunnen we op een oppervlak twee spanningen definiëren, een *normaal spanning* en een *schuifspanning*. Een positieve normaalspanning werkt in de richting van de uitwendige normaal van het oppervlak. Een schuifspanning werkt evenwijdig aan een vector in het vlak. Meestal wordt een assenstelsel gehanteerd waarmee vervolgens de schuifspanning kan worden ontbonden in twee loodrechte componenten die in het vlak werken, zie ook TOEGEPASTE MECHANICA 1, paragraaf 10.1.2. Als de normaal van het oppervlak samenvalt met de x -as, dan is het vlak waarop de spanningen werken een vlak dat wordt opgespannen door de y - en z -as. Dit vlak wordt echter aangeduid als een x -vlak, hetgeen refereert naar de *normaal van het vlak*. Als de *uitwendige* normaal samenvalt met de x -as spreken we van een *positief* vlak zoals in figuur 1.1 wordt verduidelijkt.



Figuur 1.1 : Normaal en schuifspanningen

Spanningen zullen we aanduiden met een dubbele index, de eerste index verwijst naar het vlak waarop de spanningen werken. De tweede index verwijst naar de richting van de spanning. Als voorbeeld nemen we hier de normaalspanning op een x -vlak. Deze wordt weergegeven als:

$$\begin{array}{ccc} & \sigma_{xx} & \\ x\text{-vlak} & \text{---} \text{---} \text{---} & x\text{-richting} \end{array}$$

De schuifspanningen in y - en z -richting in dit vlak worden vervolgens aangeduid met:

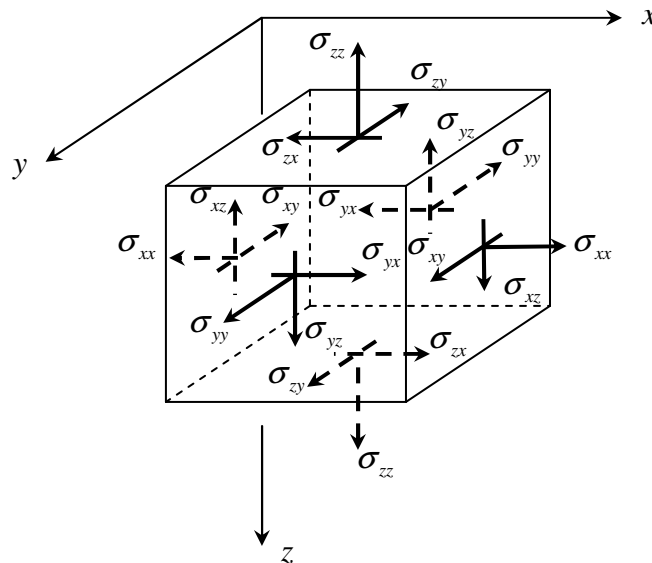
$$\sigma_{xy}$$

$$\sigma_{xz}$$

Op deze wijze zijn de spanningen eenduidig gedefinieerd. De tekenafspraken kan kort worden samengevat als:

- Een spanning is positief als deze op een positief vlakje in de positieve richting werkt (of op een negatief vlakje in de negatieve richting).
- Een spanning is negatief als deze op een positief vlakje in de negatieve richting werkt (of op een negatief vlakje in de positieve richting).

Voor een kubus met zes vlakken ontstaat de in figuur 1.2 weergegeven positieve spanningsdefinitie voor ieder vlak.



Figuur 1.2 : Spanningen in 3D

Deze zes oppervlakken zijn onder te verdelen in drie verschillende oppervlakken die zowel positief als negatief voorkomen:

x-vlak

y-vlak

z-vlak

Hieruit volgt dat er slechts negen verschillende spanningen te benoemen zijn.

$\sigma_{xx}; \sigma_{xy}; \sigma_{xz}$ x – vlak

$\sigma_{yy}; \sigma_{yx}; \sigma_{yz}$ y – vlak

$\sigma_{zz}; \sigma_{zx}; \sigma_{zy}$ z – vlak

$\underbrace{\hspace{1cm}}$ $\underbrace{\hspace{1cm}}$
 normaal schuif

Opdracht:

Controleer zelf het krachtenevenwicht t.g.v. de weergegeven spanningen uit figuur 1.2 op een kubus met ribbe dx , dy en dz . Hoeveel onafhankelijke spanningen hebben we nodig?

De hierboven beschreven negen spanningen kunnen op verschillende wijze worden weergegeven. Als getransponeerde vector noteren we:

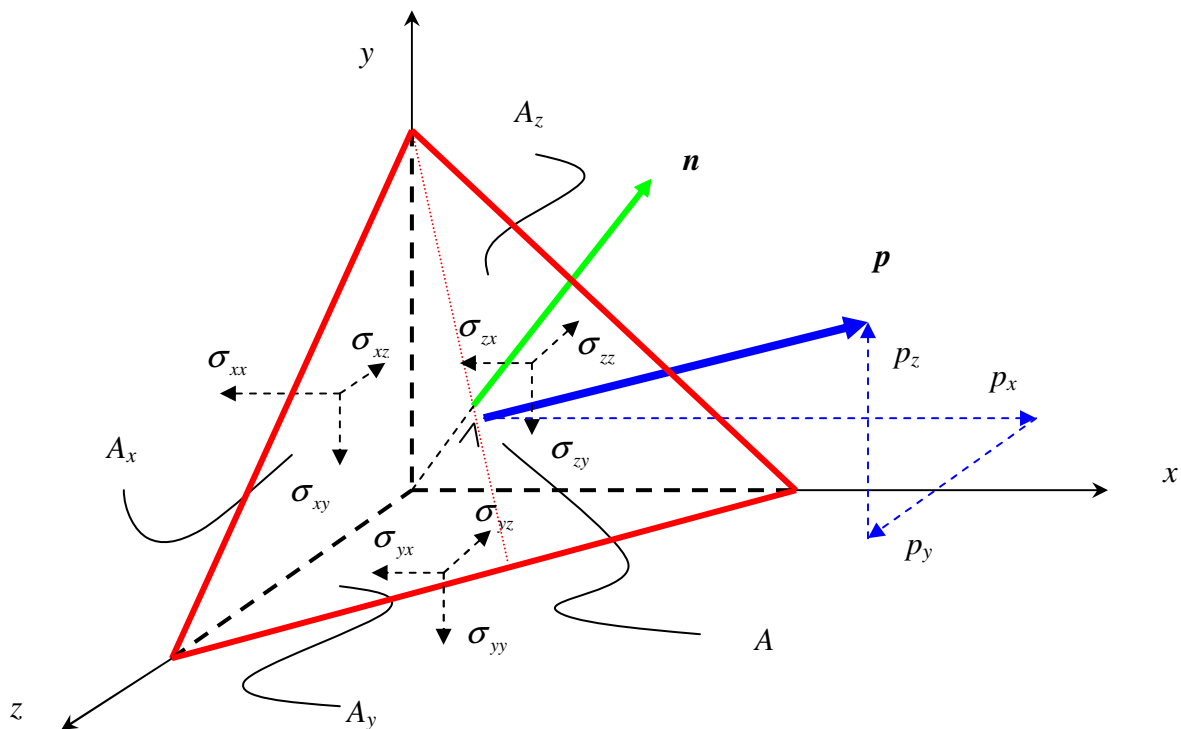
$$\sigma_{xyz}^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}, \sigma_{zx}, \sigma_{xz})$$

Bij deze weergave is het gebruikelijk om de normaalspanningen voorop te plaatsen. Een andere presentatie is in de vorm van een matrix:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

In dit geval worden de normaalspanningen op de diagonaal weergegeven. De betekenis van deze matrix zal worden uiteengezet met het onderstaande voorbeeld.

Op de in figuur 1.3 weergegeven tetraëder werkt op het schuine oppervlak A, een willekeurige spanning p . De overige vlakken van de tetraëder vallen samen met de vlakken van het x -, y -, z -assenstelsel. Gevraagd wordt om een relatie te leggen tussen de spanningen op deze drie vlakken en de willekeurige spanning op het oppervlak A dat een uitwendige eenheidsnormaal n heeft zoals is aangegeven in de figuur.



Figuur 1.3 : Tetraëder in 3D

De spanning p kan worden ontbonden in de componenten p_x , p_y en p_z . De uitwendige normaal n van het oppervlak A kan worden ontbonden in de componenten n_x , n_y en n_z . Dit is in de figuur weergegeven. De oppervlakken van de x -, y - en z -vlakken kunnen worden bepaald met:

$$\begin{aligned} A_x &= A \times n_x & n_x &= \cos(n, x) \\ A_y &= A \times n_y & \text{met : } n_y &= \cos(n, y) \\ A_z &= A \times n_z & n_z &= \cos(n, z) \end{aligned} \quad (1)$$

De hoeken worden in deze uitdrukking weergegeven als hoek tussen twee vectoren, respectievelijk (n, x) , (n, y) , en (n, z) .

Het evenwicht vereist evenwicht van krachten. Met de spanningen op ieder vlak moeten daarom eerst de resultante krachten worden bepaald die in evenwicht moeten zijn. Krachtenevenwicht in x -, y - en z -richting eist:

$$A \times p_x - A_x \sigma_{xx} - A_y \sigma_{yx} - A_z \sigma_{zx} = 0$$

$$A \times p_y - A_x \sigma_{xy} - A_y \sigma_{yy} - A_z \sigma_{zy} = 0$$

$$A \times p_z - A_x \sigma_{xz} - A_y \sigma_{yz} - A_z \sigma_{zz} = 0$$

Met (1) gaan deze drie vergelijkingen over in:

$$A \times p_x = A \times (\cos(n, x) \times \sigma_{xx} + \cos(n, y) \times \sigma_{yx} + \cos(n, z) \times \sigma_{zx})$$

$$A \times p_y = A \times (\cos(n, x) \times \sigma_{xy} + \cos(n, y) \times \sigma_{yy} + \cos(n, z) \times \sigma_{zy})$$

$$A \times p_z = A \times (\cos(n, x) \times \sigma_{xz} + \cos(n, y) \times \sigma_{yz} + \cos(n, z) \times \sigma_{zz})$$

Dit resultaat kan in matrixvorm worden weergegeven:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(n, x) \\ \cos(n, y) \\ \cos(n, z) \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

De matrix in deze relatie geeft het verband tussen een willekeurige spanning p op een oppervlak en de normaal n van dat oppervlak. Dat deze matrix symmetrisch moet zijn is bewezen met de eerder in deze paragraaf verstrekte opdracht, zie ook TOEGEPASTE MECHANICA 2, paragraaf 5.3. Het maakt daarom niet uit als de aangegeven niet-diagonaalelementen worden gespiegeld. De matrix die dan ontstaat heeft dan de gebruikelijke indexnotatie waar we later op terug komen:

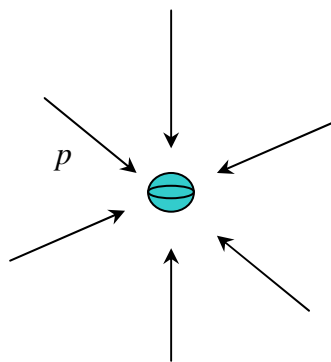
$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad \text{met:} \quad \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \end{aligned}$$

De relatie tussen de twee vectoren p en n is een symmetrische matrix met zes verschillende componenten. We identificeren daarom slechts zes spanningscomponenten in 3D.

1.1.1 Bijzondere spanningstoestanden

Een aantal bijzondere spanningssituaties zullen hier worden beschreven die ook gebruikt worden in de voorbeelden die volgen.

- Isotrope spanning
- Vlakspanning
- Vlakspanning – vezelmodel
- Eenassige spanning

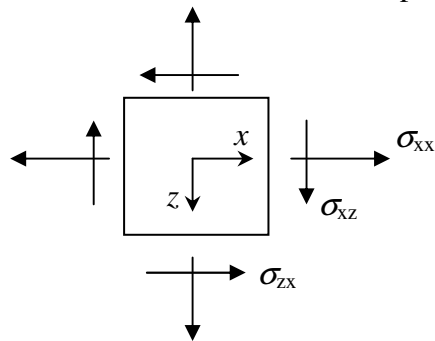
Isotrope spanning -

Als er alleen normaalspanningen voorkomen die ook nog eens gelijk zijn in grootte en teken dan spreken we van een *isotrope* of ook wel *hydrostatische spanningstoestand*.

$$\sigma_{xyz}^T = (p, p, p, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

De spanningstoestand in een stilstaande vloeistof laat zich beschrijven met dit model aangezien we daar mogen aannemen dat de schuifspanningen nul zijn en de hydrostatische druk alzijdig werkt hetgeen leidt tot gelijke normaalspanningen, zie figuur 1.4.

Figuur 1.4 : Isotrope spanning

Vlakspanningstoestand -

Als op één van de oppervlakken alle spanningen gelijk zijn aan nul spreken we van een *vlakspanningstoestand*, zie figuur 1.5.

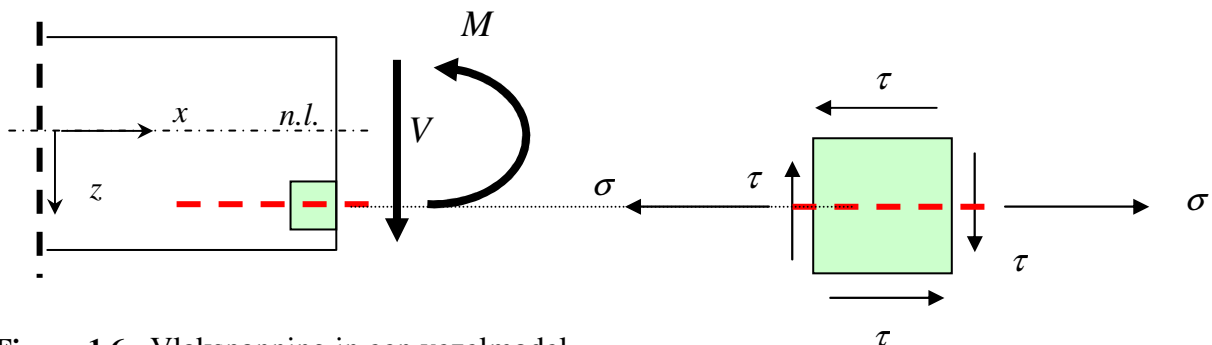
$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= 0 \\ \sigma_{yx} &= 0 \\ \sigma_{yz} &= 0\end{aligned}$$

$$\text{tensor: } \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Figuur 1.5 : Vlakspanning

Vlakspanning vezelmodel -

Een bijzondere vlakspanning is de spanningstoestand die optreedt in *vezelmodel* waarmee de spanningen in liggers kunnen worden beschreven. In dit model kan alleen in de doorsnede de normaalspanning σ t.g.v. extensie en buiging en de schuifspanning τ t.g.v. afschuiving worden beschreven. Deze situatie is weergegeven in figuur 1.6. In dit model is in het horizontale vlak evenwijdig aan de x -as alleen de schuifspanning bekend. De normaalspanning op dit vlak kan niet worden beschreven. Voor een klein elementair vlakje loodrecht op de doorsnede, op afstand z van de neutrale lijn, kan een vlakspanning worden aangenomen met alleen deze spanningen.



Figuur 1.6 : Vlakspanning in een vezelmodel

*één-assige
spanningstoestand -*

Als er slechts een normaalspanning ongelijk is aan nul en alle andere spanningscomponenten zijn gelijk aan nul, spreken we van een *één-assige spanningstoestand*, zie figuur 1.7.



Figuur 1.7 : één-assige spanningstoestand

1.1.2 Isotrope en deviatorische spanningscomponenten

Tot slot van deze introductie over spanningen introduceren we hier de begrippen isotrope en deviatorische spanningscomponenten. De spanningsmatrix waarmee spanningen in 3D kunnen worden weergegeven kunnen we splitsen in een diagonaalmatrix en een tweede, niet-diagonaalmatrix. De diagonaalmatrix bestaat louter en alleen uit gelijke diagonaaltermen. De niet-diagonaalmatrix is zodanig dat de som van beiden de oorspronkelijke spanningsmatrix oplevert:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix}}_{\text{isotrope deel}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_o & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_o & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_o \end{bmatrix}}_{\text{deviatorische deel}}$$

De diagonaalmatrix waarin alle normaalspanningen even groot en gelijk van teken zijn, noemen we het *isotrope deel* en stelt in feite een isotrope spanningssituatie voor waarbij de spanning gelijk is aan het gemiddelde van de normaalspanningen volgens:

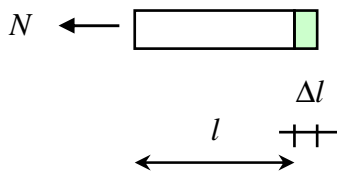
$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

De niet-diagonaal matrix is de mate waarin de spanningstoestand afwijkt van de isotrope spanningstoestand. Deze wordt het *deviatorische spanningsdeel* genoemd.

Van dit onderscheid zal verderop bij de bezwijkmodellen gebruik worden gemaakt aangezien de isotrope spanning veelal alleen aanleiding geeft tot een volumeverandering terwijl de deviatorische component aanleiding geeft tot gedaanteverandering (verandering van vorm).

1.2 Rekken

Spanningen veroorzaken vervormingen. De mate van vervorming wordt aangeduid met het begrip rek. Als voorbeeld grijpen we in figuur 1.8 terug op het meest eenvoudige basisgeval; de vervorming van trekstaaf. Dit is een zgn. één-assige spanningstoestand. De *specifieke verlenging*, dat is de verlenging per eenheid van lengte wordt per definitie de rek genoemd.

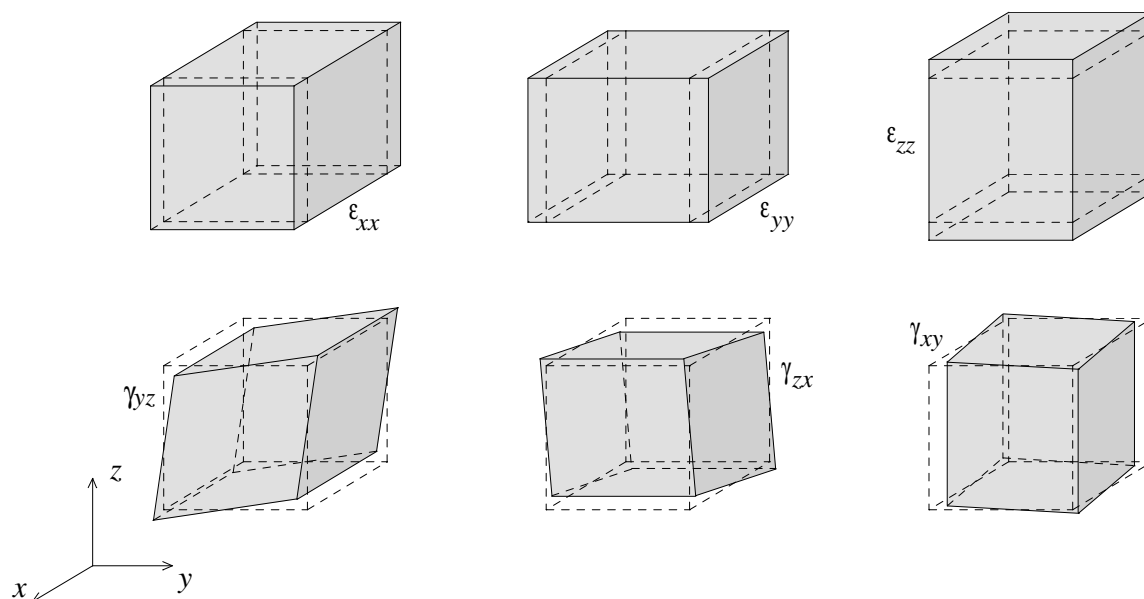


Figuur 1.8 : Specifieke verlenging, rek

De lengte van de trekstaaf l zal door de vervorming t.g.v. de normaalkracht N toenemen met Δl . De specifieke verlenging, aangeduid met het symbool ε wordt de rek genoemd:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

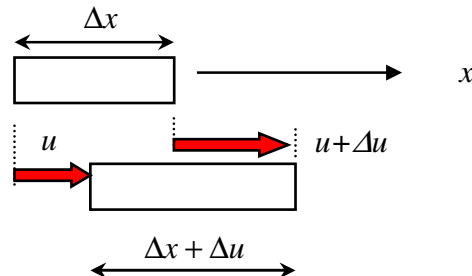
Een blokje vervormbaar materiaal dat belast wordt in 3D zal niet alleen de bovengenoemde verlenging kunnen ondergaan maar kan ook van vorm veranderen zoals in figuur 1.9 is weergegeven.



Figuur 1.9 : Vervorming in 3D

De bovenste drie vervormingen zijn verlengingen in x , y en z -richting. De vorm van het blokje blijft onveranderd, d.w.z. rechte hoeken blijven rechte hoeken. De drie vervormingen op de tweede rij geven een gedaanteverandering weer. Net als bij spanningen herkennen we *vervorming door extensie* en *afschuifvervorming*. De centrale vraag van deze paragraaf is hoe we de vervorming kunnen beschrijven op basis van de waargenomen verplaatsingen van het materiaal.

Het verband tussen rek en verplaatsing, ook wel de *kinematische relatie* genoemd is eenvoudig op te stellen zie ook TOEGEPASTE MECHANICA 2, paragraaf 2.2. Er zal begonnen worden met een eenvoudig voorbeeld om de systematiek uiteen te zetten. De één-assige spanningstoestand uit het voorgaande voorbeeld wordt in figuur 1.10 iets completer bekeken. Aangenomen wordt dat alle vezels in de doorsnede identiek zijn en evenwijdig lopen aan de x -as die samenvalt met de staafas. De verplaatsingen in de x -richting worden aangegeven met u . De linker doorsnede van het mootje verplaatst u en aan de rechterzijde is deze verplaatsing aangegroeid tot $u + \Delta u$.



Figuur 1.10 : Rek-definitie

Door gebruik te maken van de eerder geïntroduceerde rekdefinitie is de rek in een vezel te schrijven als:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Als vervolgens de lengte van het mootje erg klein gedacht wordt, ontstaat in de limietovergang de volgende relatie tussen de rek en het verplaatsingsveld $u(x)$:

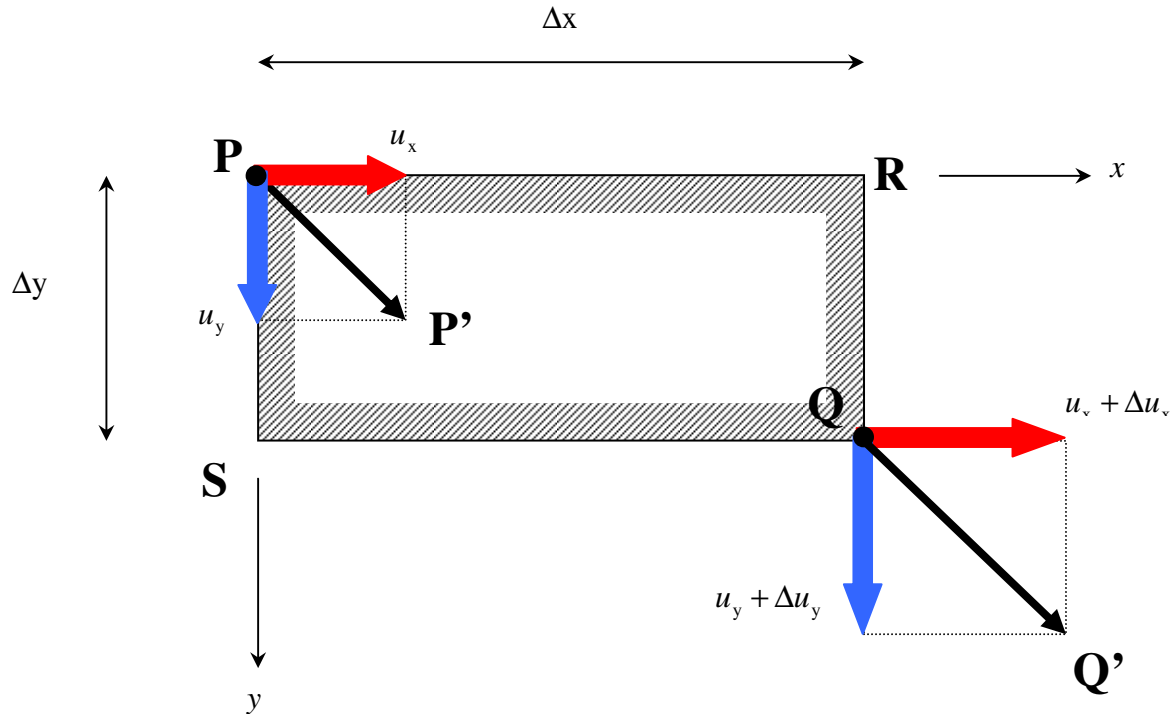
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Hieruit volgt dat de rek in de eerste afgeleide is van het verplaatsingsveld $u(x)$ in x -richting.

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Met afleiding is voor een zeer eenvoudig geval een *kinematische relatie* bepaald, het verband tussen verplaatsing en vervorming.

Dezelfde procedure kan nu toegepast worden op een 2-dimensionaal probleem. In figuur 1.11 is een in zijn vlak belast plaatje PRSQ weergegeven met afmetingen Δx , Δy . Het verplaatsingsveld u is een verplaatsing in het vlak van het plaatje. Dit verplaatsingsveld kan worden ontbonden in de componenten u_x en u_y in aangegeven as-richtingen. Door vervorming zal punt P verplaatsen naar P' en Q naar Q'. Ook de twee andere punten zullen verplaatsingen ondergaan.



Figuur 1.11 : Twee-dimensionaal probleem, in zijn vlak belaste plaat

Het verplaatsingsveld van dit plaatmateriaal **PRSQ** wordt weergegeven met:

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y) \\ u_y = u_y(x, y) \end{cases}$$

Hierbij wordt uitgegaan van een continu differentieerbaar verplaatsingsveld zodat geldt:

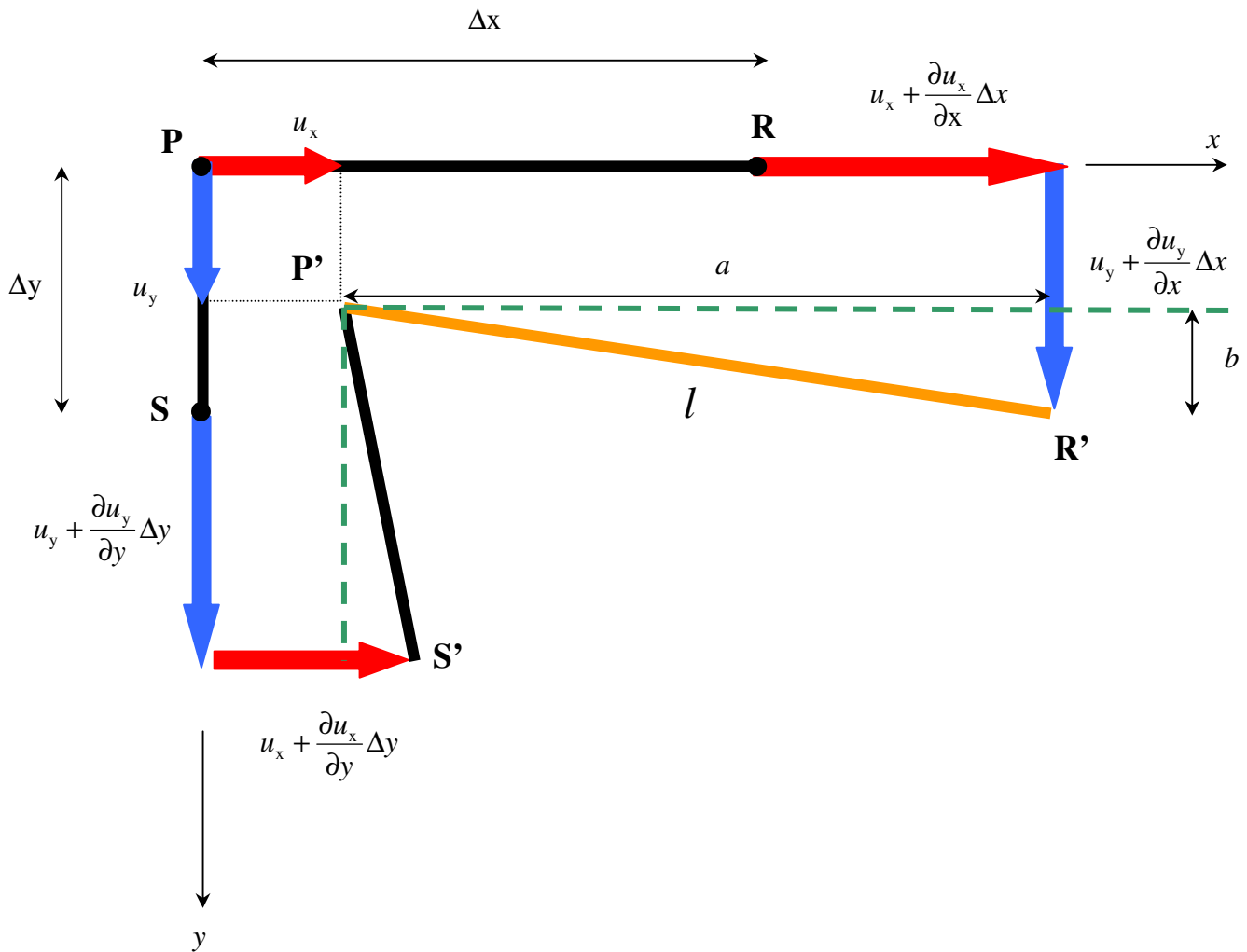
$$\begin{cases} \Delta u_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta y \\ \Delta u_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \Delta y \end{cases}$$

Deze relatieve verplaatsingscomponenten laten zich in matrixvorm schrijven als:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (1)$$

Geprobeerd wordt om op basis van deze uitdrukking een definitie te vinden voor de rekken voor vezels in het materiaal die evenwijdig aan de x- en y-richting lopen. Om dit zichtbaar te maken wordt figuur 1.11 uitgebreid door de verplaatsing van rand PR en PS vergroot weer te geven.

Deze randen vallen samen met de vezels in x - en y -richting zoals in figuur 1.12 is weergegeven.



Figuur 1.12 : Rekken in x - en y -richting

Net als in het eerste voorbeeld wordt een verplaatsing aangenomen in punt P, die aangroeit over de afmeting van het plaatje. Deze aangroei wordt beschreven met de eerder gevonden relatie (1) en is in figuur 1.12 voor een deel verwerkt. Uit de figuur wordt duidelijk dat de nieuwe lengte van vezel P'R' kan worden weergegeven als:

$$l^2 = a^2 + b^2 = \left(\Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x \right)^2 \quad (2)$$

Met de definitie van een rek dat de nieuwe lengte de oorspronkelijke lengte is plus de rek maal de oorspronkelijke lengte kan deze nieuwe lengte van een vezel in x -richting ook worden geschreven als:

$$l = \Delta x + \varepsilon_{xx} \Delta x = (1 + \varepsilon_{xx}) \Delta x \quad (3)$$

Hierin is ε_{xx} de rek in de x -richting voor een vezel in x -richting. De nieuwe lengte l van vezel P'R' is uiteraard in (2) en (3) dezelfde. Door (2) en (3) te combineren kan de rek uitgedrukt worden in het verplaatsingsveld:

$$(1 + \varepsilon_{xx})^2 \times \Delta x^2 = \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 \times \Delta x^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 \times \Delta x^2 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_{xx} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2} - 1$$

Deze uitdrukking voor de rek bevat een wortel met daaronder het kwadraat van twee afgeleiden. Met een Taylor reeks naar zowel u_x als u_y kan deze uitdrukking worden benaderd met:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 \quad (\text{zie APPENDIX 1})$$

Onder de aanname dat de verplaatsingsgradiënten klein zijn, mogen de hogere orde termen worden verwaarloosd, waardoor er een *gelineariseerde* uitdrukking voor de rek ontstaat:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Voor de rek in de y-richting in een vezel evenwijdig aan de y-richting (zoals b.v. vezel P'S') geldt dezelfde aanpak en ontstaat:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

Dit resultaat lijkt tot nu toe zeer sterk op het eerder verkregen resultaat van de één-assige trekproef. Het enige verschil is nu dat aangezien het verplaatsingsveld een functie is van zowel x als y , partiële afgeleiden nodig zijn van het verplaatsingsveld in plaats van de gewone afgeleide.

Met dit resultaat kan de eerder gevonden uitdrukking voor de relatieve verplaatsingen (1) herschreven worden tot:

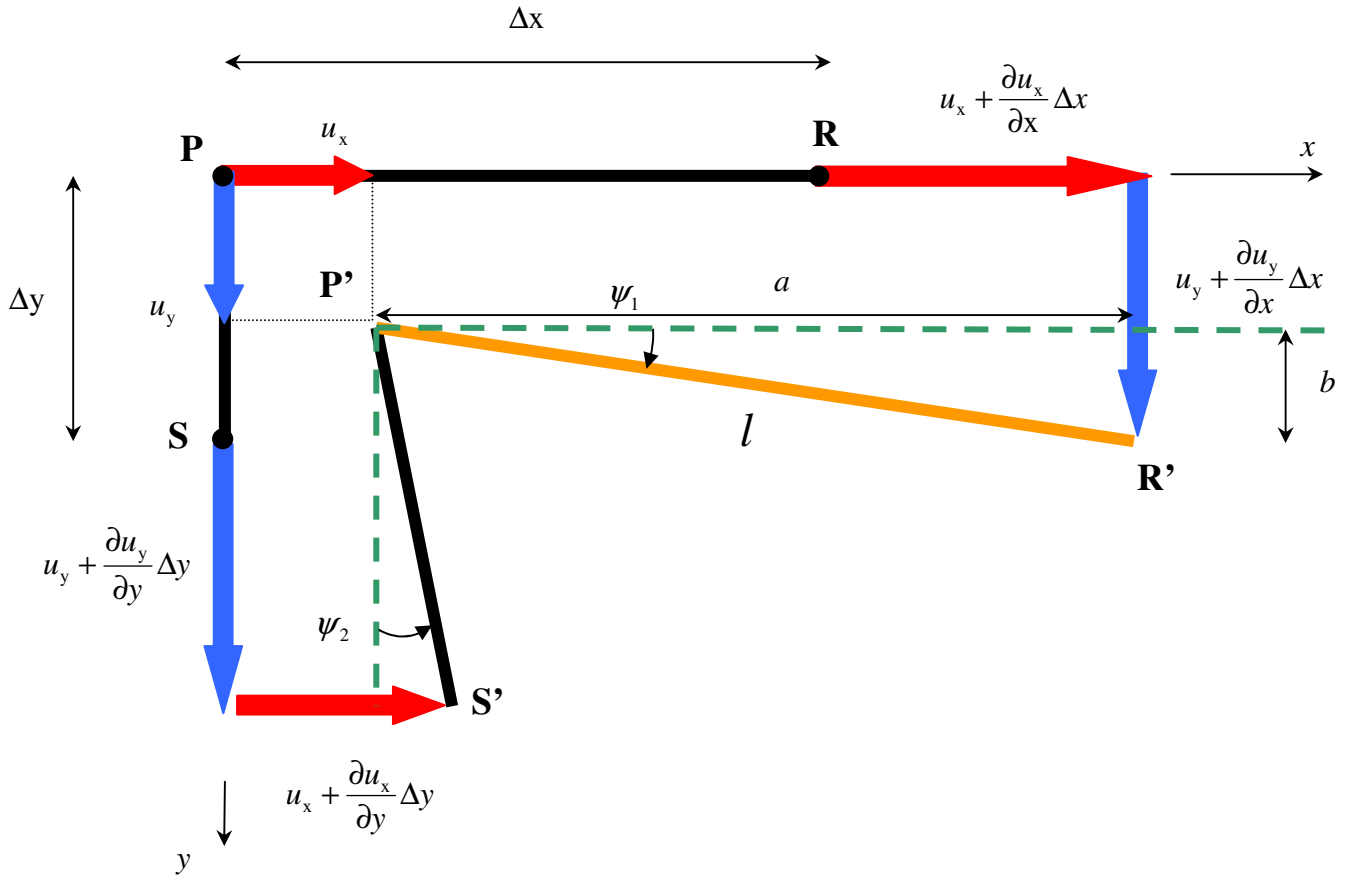
$$\begin{bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

WAT STELLEN DE NIET-DIAGONAAL TERMEN VOOR ?

In deze matrix herkennen we nu de “normale” rekdefinitie op de diagonaal. Onbekend is nog wat de niet-diagonaaltermen voorstellen. Uit figuur 1.12 kan worden opgemaakt dat de vezels in x - en y -richting niet alleen langer worden maar ook roteren. Hierdoor ontstaat een gedaanteverandering, de rechte vorm verandert in een ruit. Daarom worden deze rotaties nader onderzocht met als doel een mogelijke verklaring te vinden voor de betekenis van de niet-diagonaaltermen.

Figuur 1.12 wordt daarom nog een klein beetje aangepast waarbij de rotatie van de vezels in x - en y -richting worden aangegeven. Dit is weergegeven in figuur 1.13.



Figuur 1.13 : Rotatie van vezels in de x - en y -richting

In figuur 1.13 wordt zichtbaar dat de vorm van het proefstuk verandert door de rotaties ψ_1 en ψ_2 . De totale verandering van de oorspronkelijk rechte hoek tussen de vezels in de x - en y -richting wordt gedefinieerd als de *afschuifvervorming* en aangeduid met het symbool γ .

$$\gamma = \psi_1 + \psi_2 \quad (\text{definitie})$$

Uit de figuur is op te maken dat de rotaties van de vezels kunnen worden beschreven met:

$$\psi_1 = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x}{\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \Delta x} \quad \text{en} \quad \psi_2 = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta y}{\left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \Delta y}$$

Voor kleine verplaatsingsgradiënten geldt wederom dat we de uitdrukking kunnen vereenvoudigen tot:

$$\psi_1 = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \text{onder de aanname dat} \quad \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \approx 1$$

$$\psi_2 = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \text{onder de aanname dat} \quad \left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \approx 1$$

Dit zijn juist de niet-diagonaal elementen van uitdrukking (1) waar naar werd gezocht.

De eerder gevonden uitdrukking voor de relatieve verplaatsingen wordt hiermee:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \psi_2 \\ \psi_1 & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \psi_1 \neq \psi_2$$

Deze matrix is niet-symmetrisch. Door de matrix te splitsen in een symmetrisch deel en een keersymmetrisch deel ontstaat:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \psi_2 \\ \psi_1 & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 \\ \frac{1}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 \\ \frac{1}{2}\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze uitdrukking laat zich compacter noteren door het invoeren van een hulpvariabele ω :

$$\omega = \frac{1}{2}\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2$$

De niet diagonaalelementen van de symmetrische matrix worden per definitie vanaf nu aangeduid met:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 = \frac{1}{2}\gamma$$

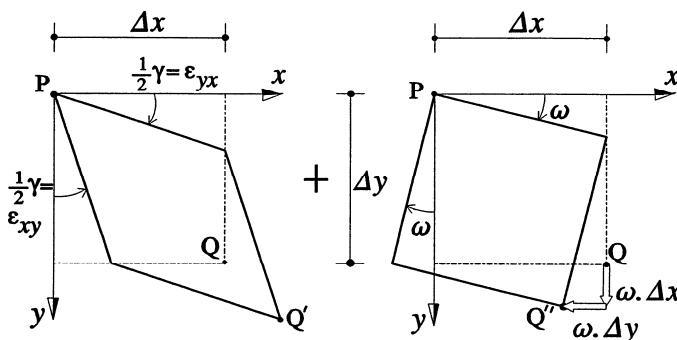
Dit is precies gelijk aan de helft van de totale verandering van de rechte hoek, de afschuifvervorming γ , tussen de vezels in de x - en y -richting. De symmetrische matrix is daarmee een matrix waarmee de vervorming wordt beschreven met op de hoofddiagonaal de verlenging van de vezels en op de niet-diagonaal de helft van de afschuifvervorming:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \psi_2 \\ \psi_1 & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \quad \text{met: } \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$$

De relatieve verplaatsing kan hiermee gesplitst worden in een deel ten gevolge van de vervorming van het materiaal en een deel ten gevolge van het keer-symmetrische deel van de expressie:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}}_{\text{t.g.v. vervorming}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}}_{\text{t.g.v. starre rotatie}} \quad \text{met: } \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \quad (4)$$

Deze laatste bijdrage blijkt juist een starre rotatie voor te stellen zoals uit figuur 1.14 blijkt.



Figuur 1.14: Relatieve verplaatsing t.g.v. vervorming en starre rotatie

Voor het bepalen van de spanningen in een materiaal is in feite alleen de vervormingscomponent van belang. Dat betekent dat de symmetrische matrix de rekbeschrijving is waarna we op zoek zijn. De keer-symmetrische matrix veroorzaakt een starre rotatie van het materiaal waarbij geen vervorming optreedt en die daarmee ook geen spanningen veroorzaakt. In de meeste literatuur wordt daarom weinig aandacht besteed aan dit deel van de relatieve verplaatsingsrelatie. Als echter de uiteindelijke verplaatsingen moeten worden bepaald is dit aandeel wel van belang zoals verderop in een voorbeeld zal worden aangetoond.

Het tot nu toe gevonden resultaat voor de rekken in 2D kunnen we als volgt samenvatten:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial x}\end{aligned}$$

De afschuifvervorming γ is per definitie:

$$\gamma = \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 2\epsilon_{xy}$$

Voor 3D situaties kan dezelfde aanpak worden gehanteerd hetgeen voor de rekken in matrixnotatie levert:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{met:} \quad \begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} \\ \epsilon_{xz} &= \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{yz} &= \epsilon_{zy} \end{aligned} \quad \text{en} \quad \begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} &= 2\epsilon_{xz} \\ \gamma_{yz} &= 2\epsilon_{yz} \end{aligned}$$

Een hele korte notatiewijze is de zgn. index-notatie of *tensornotatie* waarmee de rekcomponenten kunnen worden gedefinieerd als:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial i} \quad \text{met: } i, j = x, y, z \quad (\text{loop zelf een aantal componenten eens na!})$$

De relatieve verplaatsing ten gevolge van een starre rotatie van een blokje materiaal in 3D kan worden beschreven met de keer-symmetrische matrix voor starre rotaties:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en:} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial j} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial i} = -\omega_{ji} \quad \text{met: } i, j = x, y, z$$

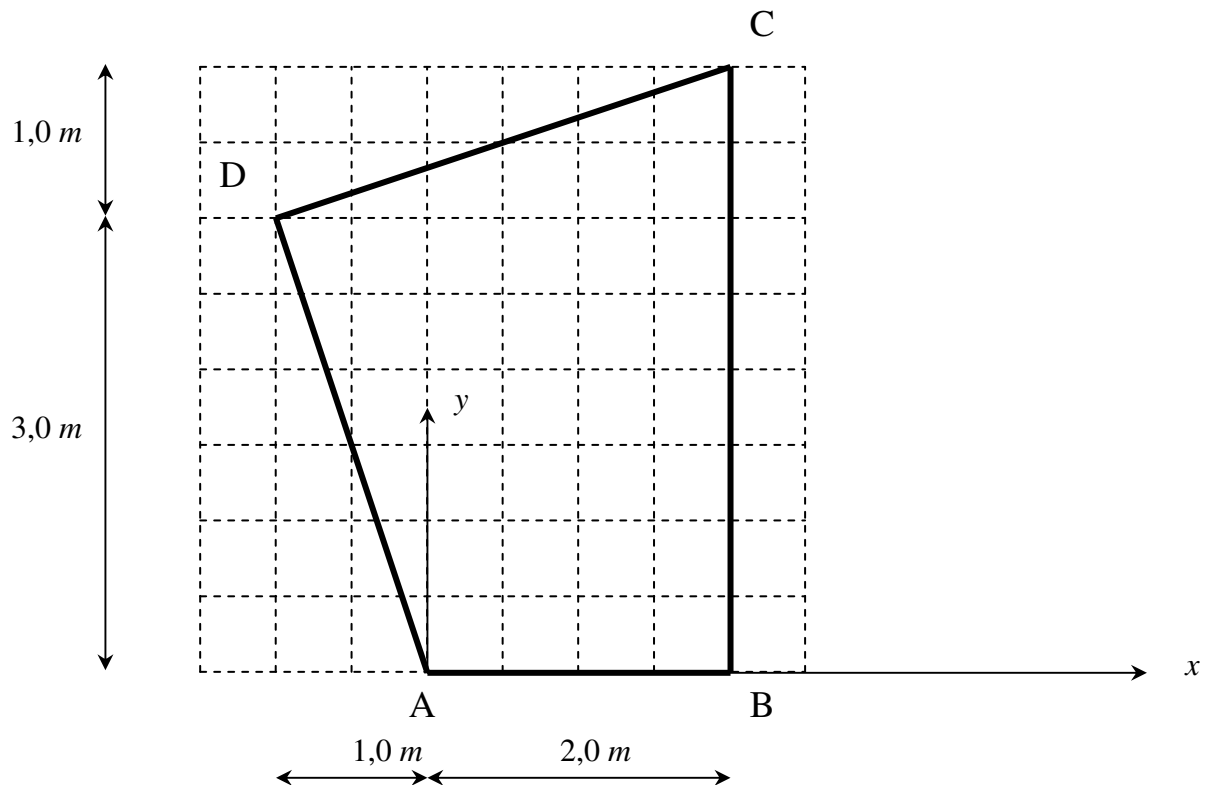
Deze compacte notatie met dubbele indices zal nader worden toegelicht bij het onderdeel over tensoren.

Voorbeeld, relatieve verplaatsing, rek en starre rotatie

Van een proefstuk uit figuur 1.15 is het verplaatsingsveld gegeven:

$$u_x = 0,2 \times 10^{-4} + 0,3 \times 10^{-4} x$$

$$u_y = 2 \times 10^{-4} x + 1,8 \times 10^{-4} y$$



Figuur 1.15 : Voorbeeld relatieve verplaatsingen, rekken en starre rotatie

De relatieve verplaatsing van punten van het proefstuk kan worden bepaald met uitdrukking (4):

$$\begin{bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} \\ \omega_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \text{met: } \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$$

Voor de componenten van de matrices in deze relatie geldt:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \quad \text{en} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial j} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial i} = -\omega_{ji} \quad \text{met: } i, j = x, y$$

Dit levert:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,3 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 1,8 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 2,0 \times 10^{-4} = 1,0 \times 10^{-4}$$

$$\text{en } \omega_{xy} = \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{2} \times 2,0 \times 10^{-4} = -1,0 \times 10^{-4}$$

Als we een stap Δx , Δy in de ruimte maken levert dat een verandering van de verplaatsing op:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,3 & 1,0 \\ 1,0 & 1,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 & -1,0 \\ 1,0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Als proef op de som passen we deze uitkomst toe voor het bepalen van de verplaatsing in C door te starten vanuit de oorsprong. De stap in x -richting is dan 2,0 m en in y -richting is deze 4,0 m:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0 \\ 4,0 \end{bmatrix} \text{ m}$$

In A is de verplaatsing bekend want voor $x = 0$ en $y = 0$ vinden we met het gegeven verplaatsingsveld:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0,2 \times 10^{-4} \\ 0,0 \end{bmatrix} \text{ m}$$

De verplaatsing in C is nu gelijk aan de verplaatsing in A, vermeerderd met de relatieve verplaatsing tussen A en C:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}_C &= \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}_C &= \begin{bmatrix} 0,2 \times 10^{-4} \\ 0,0 \end{bmatrix} + 10^{-4} \underbrace{\begin{bmatrix} 0,3 & 1,0 \\ 1,0 & 1,8 \end{bmatrix}}_{\text{t.g.v. vervorming}} \begin{bmatrix} 2,0 \\ 4,0 \end{bmatrix} + 10^{-4} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1,0 \\ 1,0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{t.g.v. starre rotatie}} \begin{bmatrix} 2,0 \\ 4,0 \end{bmatrix} \text{ m} \end{aligned}$$

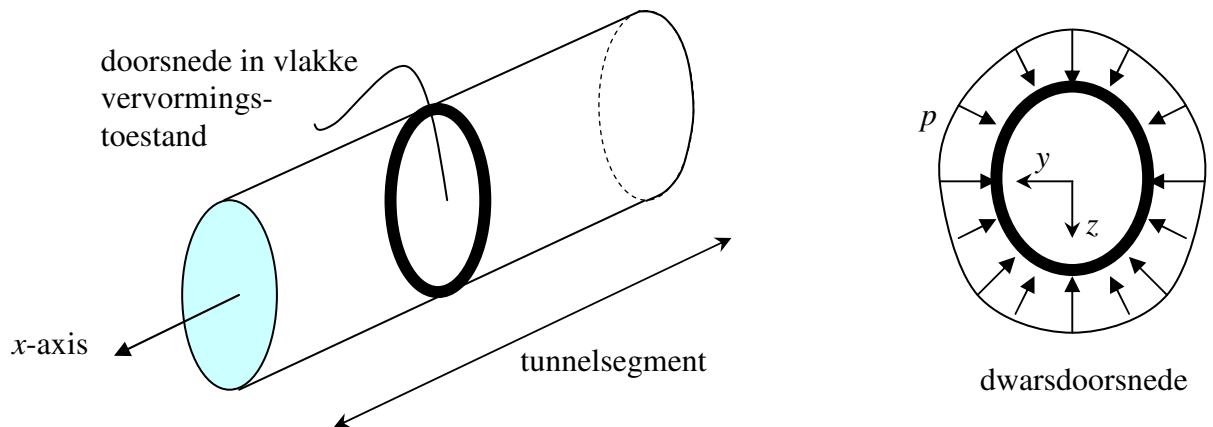
Uitwerken levert voor de verplaatsing in punt C:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} 0,8 \times 10^{-4} \\ 11,2 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}$$

Deze uitkomst kan eenvoudig worden gecontroleerd door de coördinaat van punt C in te vullen in de expressies voor het gegeven verplaatsingsveld.

1.2.1 Bijzondere reksituaties, vlakke vervormingstoestand

Een bijzondere vervormingstoestand ontstaat indien er in een vlak geen rek optreedt. Er geldt dan : $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$. Een voorbeeld van een dergelijke situatie is een doorsnede in een proefstuk waarvan de dimensies van de doorsnede klein zijn in verhouding tot de lengte en waarbij de belasting in de doorsnede onafhankelijk is van de positie langs de lengte. Een voorbeeld hiervan is de in figuur 1.16 weergegeven tunneldoorsnede uit een langgerekte tunnel waarbij de x -as samenvalt met de tunnel-as.

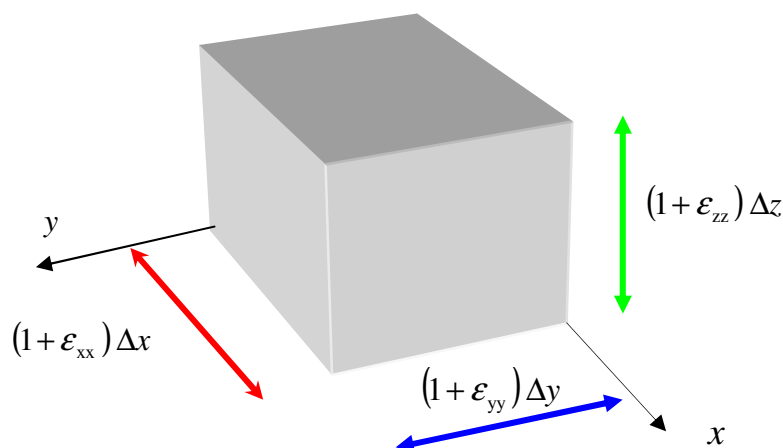


Figuur 1.16 : Vlakke vervormingstoestand

In een dergelijke situatie mogen we ervan uitgaan dat een plakje uit de tunnel geen vervormingen ondergaat in de richting van de lengte-as. In een dergelijke situatie spreken we van een materiaal dat zich bevindt in een *vlakke vervormingstoestand*.

1.2.2 Volumerek

Als een blokje materiaal met volume V onderhevig is aan vervormingen t.g.v. normaal rekken, d.w.z. dat alleen de vezels in de drie as-richtingen verlengen, dan zal het blokje niet van vorm veranderen maar alleen een volumeverandering ondergaan ΔV zoals in figuur 1.17 is weergegeven.



Figuur 1.17 : Volume verandering

De volume verandering ΔV kan worden bepaald uit het product van de nieuwe lengte van de ribben:

$$V + \Delta V = (1 + \varepsilon_{xx}) \Delta x \times (1 + \varepsilon_{yy}) \Delta y \times (1 + \varepsilon_{zz}) \Delta z$$

$$\Delta V = V (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz})$$

Als we aannemen dat de rekken klein zijn dan mogen kwadratische termen in deze uitdrukking worden verwaarloosd ten opzichte van de andere termen. De volumeverandering wordt hiermee:

$$\Delta V \cong V (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

De volumeverandering per eenheid van volume wordt hiermee:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Dit wordt ook wel aangeduid als de specifieke volumeverandering of *volumerek* en aangeduid met het symbool e . Blijkbaar is de volumerek gelijk aan de som van de diagonaaltermen van de rekmatrix:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

2. Transformaties en tensoren

De definitie van spanningen en rekken uit de vorige paragraaf hebben opgeleverd dat de spanningsmatrix een relatie legt tussen de spanning op een willekeurig oppervlak en de normaal van dat oppervlak. De componenten van deze spanningsmatrix zijn de spanningen op de vlakken met de normaal in de richting van het gekozen assenstelsel.

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{spanningen}} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad \text{met:} \quad \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \end{aligned}$$

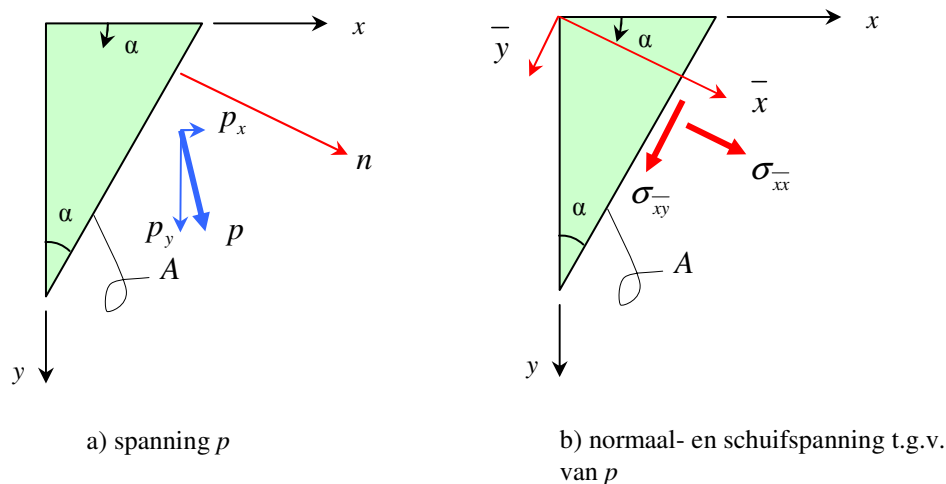
Voor de rekken is aangetoond dat de relatieve verplaatsingen t.g.v. de vervormingen kan worden bepaald met de rekmatrix:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{rekken}} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad \text{met:} \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} \end{aligned}$$

In beide gevallen legt de gevonden matrix een lineair verband tussen twee vectoren. Deze vectoren hebben een bepaalde oriëntatie t.o.v. het gekozen assenstelsel waarmee de spanningen en rekken zijn aangeduid. In deze paragraaf zal worden onderzocht hoe de uitdrukking voor de spanningen verandert, *transformeert*, als de oriëntatie van de beide vectoren t.o.v. het gekozen assenstelsel verandert. Aangezien de spanningen en de rekken grote overeenkomsten vertonen zal aan het einde van deze paragraaf worden aangetoond dat voor de bepaling van deze zogenaamde *transformatieformules* een uniforme aanpak bestaat met behulp van tensoren. Naast de analytische methoden voor het bepalen van de transformaties bestaat er ook een grafische methode die bekend staat als de *cirkel van Mohr*. Deze aanpak wordt aan het eind van dit hoofdstuk uiteengezet. Voordat we die uitleg echter volgen wordt begonnen met een eenvoudige uitleg om te zien wat er feitelijk gebeurt als de oriëntatie van de vectoren wijzigt. Hiervoor wordt gekozen voor een aanpak in 2D met een *x-y*-assenstelsel als basis.

2.1 Directe methode, spanningstransformatie en hoofdspanningen

In de onderstaande figuur worden twee situaties getoond van een spanning p op een schuin vlak met de uitwendige eenheidsnormaal n . Beide situaties zijn gelijkwaardig. In figuur 2.1a werkt er een willekeurige spanning p op een oppervlak A en in figuur 2.1b is deze spanning ontbonden in een schuifspanning even wijdig aan het oppervlak en een normaalspanning loodrecht op het oppervlak.

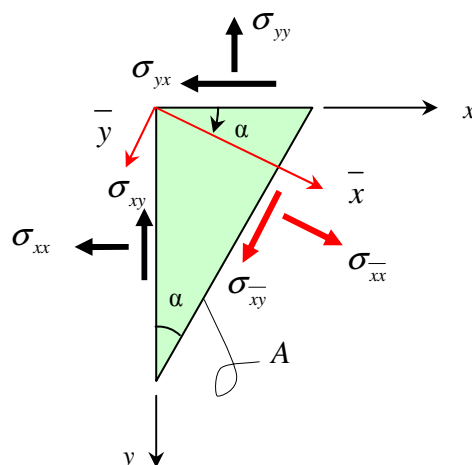


Figuur 2.1 : Vlakspanningssituatie

In plaats van te kijken naar het evenwicht van de situatie in figuur 2.1a zal nu uitgegaan worden van het evenwicht op basis van de weergave van de spanning op A volgens figuur 2.1b. Eenvoudig is overigens aan te tonen dat de relatie tussen de beide situaties wordt weergegeven met:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Uitgaande van figuur 2.1b is in figuur 2.2 het proefstuk weergegeven met alle daarop werkende spanningen. Door de hoek α tussen het schuine oppervlak en de y -as te variëren kan onderzocht worden hoe de uitdrukking voor de spanningen op het oppervlak A verandert.



Figuur 2.2 : Definitie van de spanningen op alle oppervlakken

Merk op dat de positieve spanningen op het negatieve x - en y -vlakje in de negatieve as-richtingen worden weergegeven volgens de eerder ingevoerde afspraken voor positieve spanningen. Het proefstuk uit figuur 2.2 is alleen in evenwicht als de resultante krachten een krachtenevenwicht vormen en als de som van de momenten in het vlak gelijk is aan nul. Aan deze laatste eis is reeds voldaan aangezien er met het momentenevenwicht is aangetoond dat voor de schuifspanningen op onderling loodrechte oppervlakken geldt: $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. Er resteren dus twee evenwichtsvergelijkingen:

$$\text{horizontaal evenwicht:} \quad A\sigma_{xx}^- \cos \alpha - A\sigma_{xy}^- \sin \alpha = \sigma_{xx} A \cos \alpha + \sigma_{yx} A \sin \alpha$$

$$\text{verticaal evenwicht:} \quad A\sigma_{xy}^- \sin \alpha + A\sigma_{yx}^- \cos \alpha = \sigma_{xz} A \cos \alpha + \sigma_{yy} A \sin \alpha$$

Deze vergelijkingen kunnen worden herschreven als:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^- &= \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{yx} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{xy}^- &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{yx} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

Door over te gaan op de *dubbele hoek notatie*:

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

kunnen deze vergelijkingen worden vereenvoudigd tot:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^- &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha \\ \sigma_{xy}^- &= -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (\text{transformatieformules})$$

Strikt genomen is deze laatste stap in het rekenmachinetijdperk niet meer essentieel maar internationaal worden de *spannings-transformatieformules* altijd zo gepresenteerd.

Met deze transformatieformules is voor iedere waarde van α direct te bepalen hoe groot de spanningen op het schuine oppervlak A worden. Deze spanningen worden uitgedrukt in de spanningen op de vlakken in de richting van het x - y -assenstelsel.

Interessant is nu om te onderzoeken wanneer bijvoorbeeld de normaalspanning maximaal wordt op het oppervlak A . Door de uitdrukking voor de normaalspanning te differentiëren naar de hoek α en deze gelijk te stellen aan nul kan een extreem worden bepaald:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}^-}{d\alpha} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{d \left[\frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha \right]}{d\alpha} &= 0 \Leftrightarrow \\ -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha + 2\sigma_{xy} \cos 2\alpha &= 0 \Leftrightarrow \\ \tan 2\alpha &= \frac{2\sigma_{xy}}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} \end{aligned}$$

Door de gevonden waarde van α in te vullen in de spanningsformules, wordt voor de normaalspanningen en de schuifspanningen gevonden:

$$\sigma_{\overline{xx}, \overline{yy}} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\right]^2 + \sigma_{xy}^2}$$

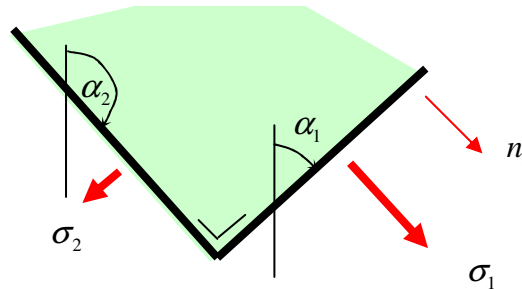
$$\sigma_{\overline{xy}, \overline{yx}} = 0$$

Merk op dat de oplossing voor de extreme ligging van het oppervlak A, twee waarden voor de hoek α oplevert. Blijkbaar is op de beide gevonden vlakken de normaalspanning extreem terwijl de schuifspanning juist gelijk is aan nul. Als deze situatie zich voordoet dan spreken we van een *hoofdspanning*.

Definitie:

Een hoofdspanning is de grootste of de kleinste waarde van de normaalspanning in een materiaal op een vlak waar per definitie de schuifspanning nul moet zijn. De meest positieve hoofdspanning wordt met 1 aangeduid, de ander met 2. De richting van de vlakken waarop deze hoofdspanningen werken noemen we de hoofdrichtingen en worden eveneens met 1 en 2 aangeduid.

In figuur 2.3 is dit resultaat getekend.



Figuur 2.3 : Hoofdspanningen en hoofdrichtingen

De richting van de hoofdspanning valt nu samen met de normaal van het vlak waarop de hoofdspanning werkt. Aangezien per definitie de schuifspanning nul is valt in dit geval de richting van de spanningsvector p op het vlak A samen met de normaal n van dit oppervlak. Van deze bijzonderheid wordt verderop gebruik gemaakt.

Tot slot van deze directe aanpak wordt nog de relatie gelegd met de oorspronkelijke definitie van de spanningsmatrix. Voor de vlakspanningssituatie uit figuur 2.1a die we hier bekijken geldt volgens paragraaf 1.1:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad \text{met :} \quad \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

De spanning p kan worden uitgedrukt in een normaal- en schuifspanning op vlak A volgens:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\overline{xx}} \\ \sigma_{\overline{xy}} \end{bmatrix}$$

Door deze twee betrekkingen in elkaar te schuiven ontstaat:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Hieruit volgen de twee onderstaande vergelijkingen:

$$\sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha = \sigma_{xx} \cos \alpha - \sigma_{xy} \sin \alpha$$

$$\sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha = \sigma_{xx} \sin \alpha - \sigma_{xy} \cos \alpha$$

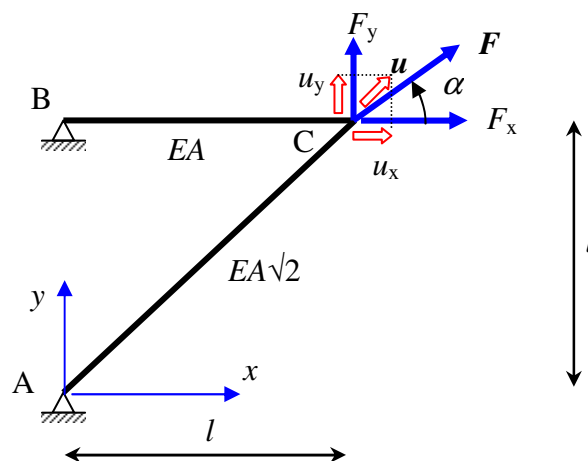
Uitwerken levert precies dezelfde transformatieformules voor de normaal- en schuifspanning op het schuine oppervlak A uitgedrukt in de spanningen op de vlakken in de as-richtingen.

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} &= -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (\text{transformatieformules})$$

2.2 Algemene methode met vectortransformaties, tensoren

Hoewel de directe methode snel leidt tot de gevraagde transformatieformules geeft deze methode nog geen inzicht in hoeverre deze aanpak algemeen toepasbaar is voor zowel spanningen als rekken. In deze paragraaf zal daarom opnieuw gekeken worden naar de transformaties maar nu gebaseerd op een algemene lineaire relatie tussen twee vectoren. Als voorbeeld nemen we hiervoor een stijfheidsrelatie.

In figuur 2.4 is een vakwerk getekend waarvan alleen knoop C kan verplaatsen. De verplaatsing en de belasting in C kunnen worden ontbonden in componenten in de x- en y-richting zoals in de figuur is aangegeven.



Figuur 2.4 : Stijfheidsprobleem m.b.v. een vakwerk

De relatie tussen de kracht en de verplaatsing in punt C kan met de verplaatsingsmethode uit TOEGEPASTE MECHANICA, 3 paragraaf 4.3, worden gevonden:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (\text{ ga dit zelf maar eens na })$$

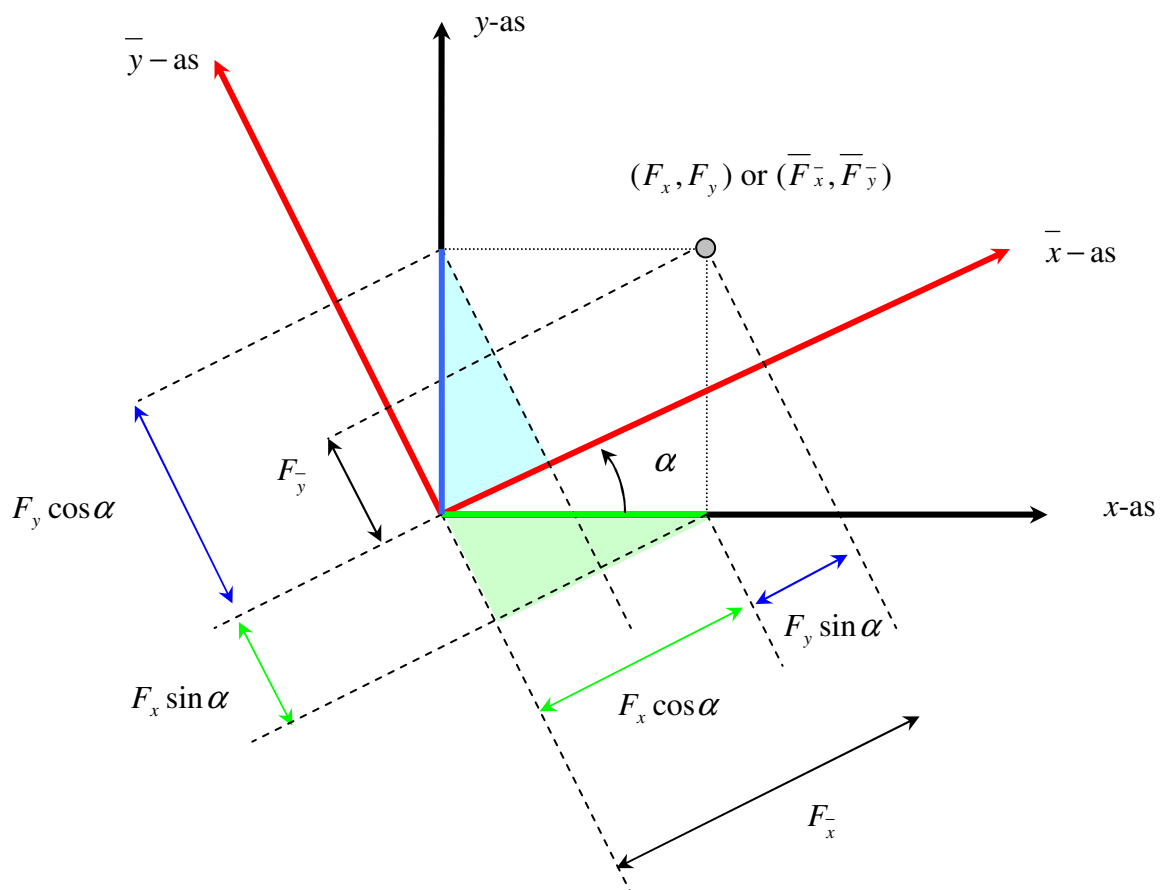
De relatie tussen de belasting en de verplaatsing in C kan meer algemeen worden genoteerd als:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad \text{of:} \quad F = K \cdot u \quad (1)$$

De stijfheidsrelatie is een lineaire relatie tussen twee vectoren F en u die wordt beschreven met de *stijfheidsmatrix* K . De gelijkenis met de spanningsmatrix en de rekmatrix is daarmee overduidelijk.

Zowel de kracht F als de verplaatsing u zijn vectoren met een *grootte* en een *richting* in een gegeven assenstelsel. De grootte van de vector is onafhankelijk van het gekozen assenstelsel. Bij rotatie van het assenstel bijvoorbeeld, zal de ligging van de vector t.o.v. dit assenstelsel veranderen maar de grootte van de vector niet. Daarom wordt de grootte van de vector ook wel een *invariant* genoemd. Een vector heeft daarmee één invariant. De stijfheidsrelatie (1) geldt voor een gekozen x - y -assenstelsel. We gaan nu eens onderzoeken hoe deze relatie verandert indien we het assenstelsel laten roteren.

Door het roteren van het x - y assenstelsel zullen de componenten van de vector F en u een andere waarde krijgen. In figuur 2.5 wordt aangegeven hoe die componenten kunnen worden bepaald in het nieuwe $\bar{x}$ - $\bar{y}$ -assenstelsel.



Figuur 2.5 : Vectortransformatie door rotatie in een x - y -assenstelsel.

Uit figuur 2.5 volgt voor de vector F in het $\bar{x}-\bar{y}$ -assenstelsel dat geldt:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{\bar{x}} &= F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha \\ \bar{F}_{\bar{y}} &= -F_x \sin \alpha + F_y \cos \alpha\end{aligned}$$

In matrixnotatie levert dit:

$$\bar{F} = R \cdot F \quad \text{met: } R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

De matrix R is in dit verband een *rotatiematrix* waarmee deze *transformatie* wordt beschreven. Voor de verplaatsing geldt een identieke transformatieregel:

$$\bar{u} = R \cdot u \quad (3)$$

Omgekeerd geldt uiteraard ook dat de oorspronkelijke vector u uitgedrukt kan worden in een geroteerd assenstelsel met:

$$u = R^{-1} \cdot \bar{u}$$

Een bijzondere eigenschap van de rotatiematrix (2) is dat de inverse van deze matrix identiek is aan de getransponeerde. Daarom wordt bij transformaties veelvuldig gebruik gemaakt van de getransponeerde matrix aangezien het bepalen van een getransponeerde minder bewerkelijk is dan het bepalen van een inverse matrix:

$$u = R^T \cdot \bar{u} \quad (4)$$

Van de beide vectoren in de lineaire relatie (1) is nu bekend hoe zij transformeren. De grote vraag is nu hoe de matrix K vervolgens transformeert. Doel is om uiteindelijk in het geroteerde assenstelsel het verband te leggen tussen de geroteerde belasting en de geroteerde verplaatsing volgens:

$$\bar{F} = \bar{K} \cdot \bar{u} \quad (5)$$

We passen nu eerst (2) toe en combineren dit met (1) :

$$\bar{F} = R \cdot F = R \cdot K \cdot u \quad (6)$$

Met (4) kan dit vervolgens worden herschreven tot:

$$\bar{F} = R \cdot K \cdot u = R \cdot K \cdot R^T \cdot \bar{u} \quad (7)$$

Deze relatie is bijna de gevraagde relatie. Vergelijk (7) met (5) dan wordt duidelijk dat de stijfheidsrelatie in het geroteerde assenstelsel als volgt kan worden bepaald:

$$\bar{K} = R \cdot K \cdot R^T \quad (8)$$

Voor dit 2D-probleem in een x - y -assenstelsel zal deze relatie nader worden uitgewerkt¹.

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_{xx} &= k_{xx} \cos^2 \alpha + k_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + k_{yx} \sin \alpha \cos \alpha + k_{yy} \sin^2 \alpha \\ k_{xy} &= -k_{xx} \sin \alpha \cos \alpha + k_{xy} \cos^2 \alpha - k_{yx} \sin^2 \alpha + k_{yy} \sin \alpha \cos \alpha \\ k_{yx} &= -k_{xx} \sin \alpha \cos \alpha - k_{xy} \sin^2 \alpha + k_{yx} \cos^2 \alpha + k_{yy} \sin \alpha \cos \alpha \\ k_{yy} &= k_{xx} \sin^2 \alpha - k_{xy} \sin \alpha \cos \alpha - k_{yx} \sin \alpha \cos \alpha + k_{yy} \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Dit resultaat kan wat korter worden beschreven door over te gaan op de dubbele hoek notatie:

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

Waarna de transformatieregel ontstaat voor de componenten van de stijfheidsmatrix:

$$k_{xx} = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) + \frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\alpha + k_{xy} \sin 2\alpha$$

$$k_{yy} = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) - \frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy}) \cos 2\alpha - k_{xy} \sin 2\alpha$$

$$k_{xy} = -\frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy}) \sin 2\alpha + k_{xy} \cos 2\alpha$$

Dit resultaat komt exact overeen met de eerder gevonden transformatieregel voor spanningen in het x - y -vlak m.b.v. de directe methode. De transformatieregel voor een matrix kan worden gevonden met behulp van de transformatieregel voor vectoren. Merk hierbij op dat deze *verschillend* zijn voor een x - y of x - z assenstelsel. Het zal duidelijk zijn dat het vinden van de extreme waarde van de stijfheidscomponenten op precies dezelfde manier verloopt als bij de directe methode voor de hoofdspanningen. De *extreme waarden* voor de stijfheidscomponenten worden de *hoofdwwaarden* genoemd. Deze treden op voor twee verschillende waarden van de hoek α die de kracht F maakt met de horizontale as in C:

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx} - k_{yy})}$$

Met als hoofdwwaarden (de grootste en de kleinste stijfheid van het vakwerk):

$$k_1, k_2 = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\right]^2 + k_{xy}^2}$$

Als we dit toepassen op het gegeven vakwerk voorbeeld met de onderstaande stijfheidsrelatie

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

¹ Deze formules gelden voor een x - y -assenstelsel. Onderzoek zelf de uitkomsten voor een x - z -assenstelsel.

Dan vinden we voor de hoek α met de grootste en kleinste hoofdwaarde voor de stijfheid:

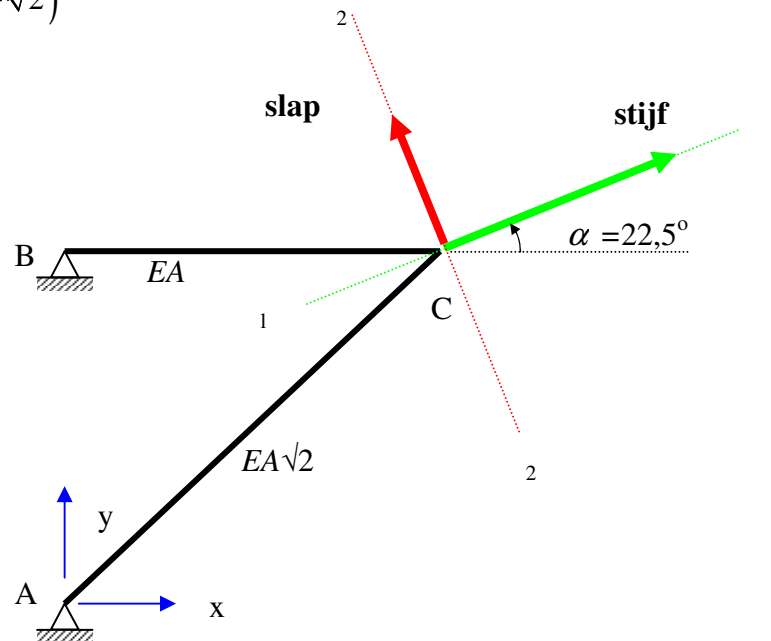
$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow$$

twee mogelijke oplossingen α :

$$\alpha_1 = 22,5^\circ, \alpha_2 = 112,5^\circ$$

$$k_1 = \frac{EA}{l} \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$k_2 = \frac{EA}{l} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$



Figuur 2.6 : Hoofdrichtingen voor de stijfheid

Als we de constructie belasten met alleen een kracht in een van de hoofdrichtingen dan zal de constructie in C ook alleen in deze richting verplaatsen, zie figuur 2.7. Immers F en u hebben per definitie dezelfde richting als dit een hoofdrichting is. De constructie reageert het meest stijf bij belasten in de 1-1 richting en het minst stijf bij belasten in de 2-2 richting.

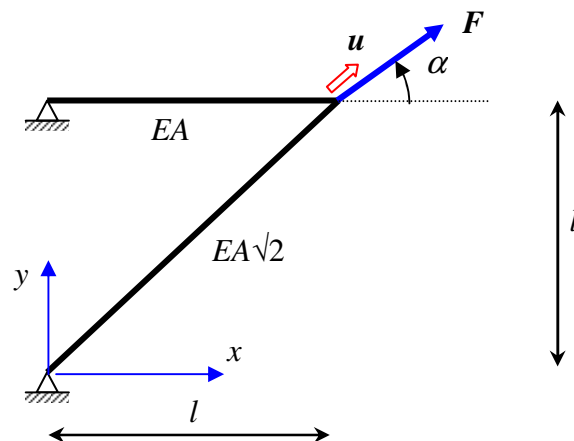


Figure 2.7 : Belasting en verplaatsing hebben dezelfde richting

2.2.1 Tensoren

In wetenschappelijke publicaties wordt de matrixnotatie niet veel gebruikt. De standaard notatie is veelal gebaseerd op de tensornotatie. De hiervoor gehanteerde vectornotatie kan kort worden weergegeven in deze notatie met:

$$\text{vector: } u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad \text{tensor: } u_i \text{ met: } i = x, y, z$$

Ook matrices kunnen compacter worden genoteerd:

$$\text{matrix: } K = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{tensor: } K_{ij} \text{ with: } i, j = x, y, z$$

Tensoren worden onderscheiden door de orde. Op dit moment kunnen we volstaan met de volgende twee tensoren:

- Een *eerste orde tensor*, hetgeen een vector is met:
 - een grootte (lengte)
 - richting
 - transformatieregels voor de componenten met betrekking tot de rotatie van het assenstelsel

De belasting F en de verplaatsing u uit het voorbeeld zijn daarom 1^e orde tensoren.

- Een *tweede orde tensor* is een tensor die een *lineaire relatie* legt tussen twee 1^e orde tensoren zoals b.v. voor het stijfheidsprobleem $F = K u$. De *transformatieregel* van de tweede orde tensor K volgt uit de transformatieregel voor de eerste orde tensor volgens $R \cdot K \cdot R^T$.

Als we een tweede orde tensor kunnen identificeren dan weten we dus op voorhand dat deze transformeert volgens de transformatieregels voor 2^e orde tensoren. De spanningsmatrix en rekmatrix uit het voorgaande zijn daarom 2^e orde tensoren en mogen kort worden gepresenteerd als σ_{ij} en ε_{ij} . In de mechanica komen vaker 2^e orde tensoren voor. De buigstijfheid EI_{ij} is een 2^e orde tensor. Ook de buigende momenten m_{ij} in platen kunnen met een 2^e orde tensor worden beschreven. Bij rotaties zullen deze grootheden allemaal op dezelfde wijze transformeren.

2.2.2 Bijzondere wiskundige eigenschappen van tensoren

Een *eerste orde tensor* kan worden gezien als een vector met een grootte. Zoals eerder gemeld is de richting gebonden aan de keuze van het assenstelsel, de grootte van de vector is echter invariant. Het invariant zijn van de 1^e orde tensor F levert voor het gehanteerde stijfheidsvoorbeeld in 2D:

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\bar{F}_x^2 + \bar{F}_y^2}$$

Een *tweede orde tensor* beschrijft het lineaire verband tussen twee eerste orde tensoren. Het is zeer waarschijnlijk dat de beide vectoren niet dezelfde richting zullen hebben.

In het voorgaande kwamen we echter bij de hoofdspanningen de bijzondere situatie tegen dat de spanning op een oppervlak dezelfde richting heeft als de normaal op het oppervlak. Twee vectoren die dezelfde richting hebben kunnen we wiskundig relateren aan elkaar met behulp van een scalar λ :

$$F = \lambda u$$

De relatie tussen de beide eerste orde tensoren is echter bekend, er geldt dus:

$$F = K \cdot u = \lambda u$$

In deze vergelijking staat links een matrix K en rechts een vector. We kunnen links en rechts pas bewerkingen uitvoeren als beide expressies matrices zijn. Door invoering van de eenheidsmatrix I kan het rechterlid in matrixvorm worden geschreven:

$$K \cdot u = \lambda \cdot I \cdot u \Leftrightarrow (K - \lambda I) \cdot u = 0$$

Door het rechterlid nu naar links te verplaatsen ontstaat de welbekende uitdrukking van een *eigenwaarde probleem*. Een *niet-triviale* oplossing van dit stelsel vergelijkingen kan alleen worden gevonden indien de *determinant* van het stelsel gelijk is aan nul. De waarden van λ waarvoor dit geldt noemen we de *eigenwaarden*. Bij iedere eigenwaarde hoort een oplossing van de vector u . Deze noemen we de *eigenvector*.

Als we dit toepassen op ons stijfheidsprobleem dan vinden we voor het eigenwaarde probleem:

$$\begin{bmatrix} k_{xx} - \lambda & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = 0$$

Dit homogene stelsel vergelijkingen heeft een niet-triviale oplossing indien de determinant nul is. Dit levert:

$$\text{Det} = (k_{xx} - \lambda)(k_{yy} - \lambda) - k_{xy}k_{yx} = 0 \quad \text{met: } k_{xy} = k_{yx}$$

Aangezien de niet-diagonaal elementen gelijk zijn ontstaat het onderstaande *karakteristieke polynoom*:

$$\begin{aligned} (k_{xx} - \lambda)(k_{yy} - \lambda) - k_{xy}^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \lambda^2 - (k_{xx} + k_{yy})\lambda + (k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2) &= 0 \end{aligned}$$

Oplossen levert:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\right]^2 + k_{xy}^2} \quad (9)$$

Voor iedere eigenwaarde λ_i kan een eigenvector u^i worden gevonden. Deze eigenvectoren zijn onafhankelijk van elkaar en staan loodrecht op elkaar. De eigenwaarden zijn altijd dezelfde ongeacht de keuze van het assenstelsel. Dit betekent dat het karakteristieke polynoom onafhankelijk is van het gekozen assenstelsel. De constanten in dit polynoom worden aangegeven met I_i waarvoor geldt:

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0 \quad \text{met: } I_1 = k_{xx} + k_{yy} \quad \text{en} \quad I_2 = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2$$

Deze constanten zijn de *invarianten* van deze 2^e orde tensor. De eigenvectoren die behoren bij de eigenwaarden vormen een basis voor de getransformeerde matrix:

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Vanuit een wiskundig standpunt gezien houdt dit in dat als het x-y-assenstelsel wordt getransformeerd naar een assenstelsel dat is gebaseerd op de eigenvectoren u^i , de matrix $\mathbf{K}$ zal transformeren naar de hierboven weergegeven matrix $\bar{\mathbf{K}}$.

Formule (9) voor het bepalen van de eigenwaarden is identiek aan de eerder gevonden uitdrukking voor de bepaling van de hoofdspanningen. Een *eigenwaarde* is dus wiskundig synoniem met een *hoofdwaarde* van een tweede orde tensor. Een *eigenvector* is daarmee synoniem voor een *hoofdrichting* van een 2^e orde tensor. Met deze aanpak kunnen eenvoudig de hoofdwaarden en hoofdrichtingen worden gevonden, het levert geen informatie voor de getransformeerde 2^e orde tensor t.g.v. een willekeurige rotatie.

2.2.3 Generalisatie naar 3D

De gepresenteerde aanpak kan ook worden toegepast in 3D. Het eigenwaarde probleem is precies hetzelfde, alleen de orde van het karakteristieke polynoom neemt met één toe. Voor een 2^e orde spannings tensor in 3D ziet het eigenwaardeprobleem er als volgt uit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \lambda & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = 0$$

Dit eigenwaardeprobleem heeft drie eigenwaarden (=hoofdspanningen) en drie eigenvectoren (=hoofdrichtingen). De eigenwaarden volgen uit het oplossen van het karakteristiek polynoom:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

met:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} - \sigma_{xx} \sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy} \sigma_{zx}^2 - \sigma_{zz} \sigma_{xy}^2 + 2 \sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{zx}$$

Deze 2^e orde tensor in 3D heeft drie invarianten die dus onafhankelijk zijn van het gekozen assenstelsel. Voor een speciale keuze van het assenstelsel dat juist samenvalt met de drie hoofdrichtingen, geldt voor de waarde van de invarianten:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Een aardige toepassing van de eigenschap van invarianten is dat b.v. de som van de diagonaalelementen van de oorspronkelijke spanningsmatrix gelijk moet zijn aan de som van de drie hoofdspanningen.

2.3 Grafische transformaties, cirkel van Mohr

Met de transformatie regels kan op een analytische wijze worden onderzocht hoe de componenten van een 2^e orde tensor in het x-y assenstelsel:

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}$$

wijzigen indien het assenstelsel over een hoek α wordt geroteerd:

$$\begin{aligned} k_{xx} &= k_{xx} \cos^2 \alpha + k_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + k_{yx} \sin \alpha \cos \alpha + k_{yy} \sin^2 \alpha \\ k_{xy} &= -k_{xx} \sin \alpha \cos \alpha + k_{xy} \cos^2 \alpha - k_{yx} \sin^2 \alpha + k_{yy} \sin \alpha \cos \alpha \\ k_{yx} &= -k_{xx} \sin \alpha \cos \alpha - k_{xy} \sin^2 \alpha + k_{yx} \cos^2 \alpha + k_{yy} \sin \alpha \cos \alpha \\ k_{yy} &= k_{xx} \sin^2 \alpha - k_{xy} \sin \alpha \cos \alpha - k_{yx} \sin \alpha \cos \alpha + k_{yy} \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

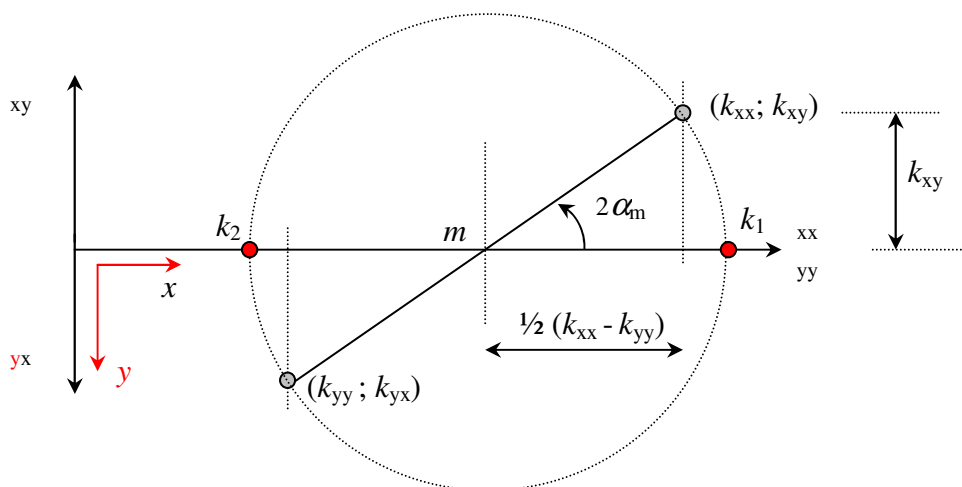
De extreme waarden die deze componenten kunnen aanemen volgen uit:

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} (k_{xx} + k_{yy}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy}) \right]^2 + k_{xy}^2} \quad (2)$$

Waarbij de minimum en maximum waarden optreden voor hoeken α_m :

$$\tan 2\alpha_m = \frac{k_{xy}}{\frac{1}{2} (k_{xx} - k_{yy})} \quad (3)$$

Mohr ontdekte dat met de hierboven gegeven formules (2) en (3) een bijzondere grafische weergave kan worden geconstrueerd. Voor een gekozen assenstelsel zoals in figuur 2.8 is weergegeven kunnen de componenten van de 2e orde tensor worden weergegeven als punten in het vlak dat wordt opgespannen door de weergegeven assen. Op de horizontale as worden de diagonaal-elementen xx en yy uitgezet en op de verticale as worden de niet-diagonaalelementen xy en yx uitgezet volgens de afspraak dat de *eerste index* van de *verticale as* samenvalt met de *positieve verticale richting* van het gekozen assenstelsel.



Figuur 2.8 : Cirkel van Mohr, definitie van het assenstelsel

De componenten van de tensor worden paarsgewijs als punten uitgezet. Dit levert twee punten $(k_{xx}; k_{xy})$ en $(k_{yy}; k_{yx})$ waarbij op de horizontale as de diagonaal elementen k_{xx} en k_{yy} worden uitgezet, in het algemeen dus k_{ii} . Op de verticale as komen de niet-diagonaal termen k_{xy} en k_{yx} waarbij in dit geval een positieve waarde van k_{yx} naar beneden wordt uitgezet omdat deze richting samenvalt met de positieve richting van het gehanteerde assenstelsel. Hoewel de termen k_{xy} en k_{yx} in waarde identiek zijn is hun betekenis wel richtingsgebonden en wordt de één omlaag en de ander omhoog uitgezet. Zorgvuldigheid is op dit punt essentieel in verband met de interpretatie van de uiteindelijke richtingen die de getransformeerde componenten hebben.

Mohr ontdekte dat de hoofdwwaarden k_1 en k_2 symmetrisch lagen t.o.v. een punt m op de horizontale as. Dit punt is het middelpunt van een cirkel die getrokken kan worden door de punten die gevormd worden door de componenten van de tensor. De straal r van de cirkel is eenvoudig uit figuur 2.8 af te leiden:

$$m = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \quad \text{en} \quad k_1 = m + r$$

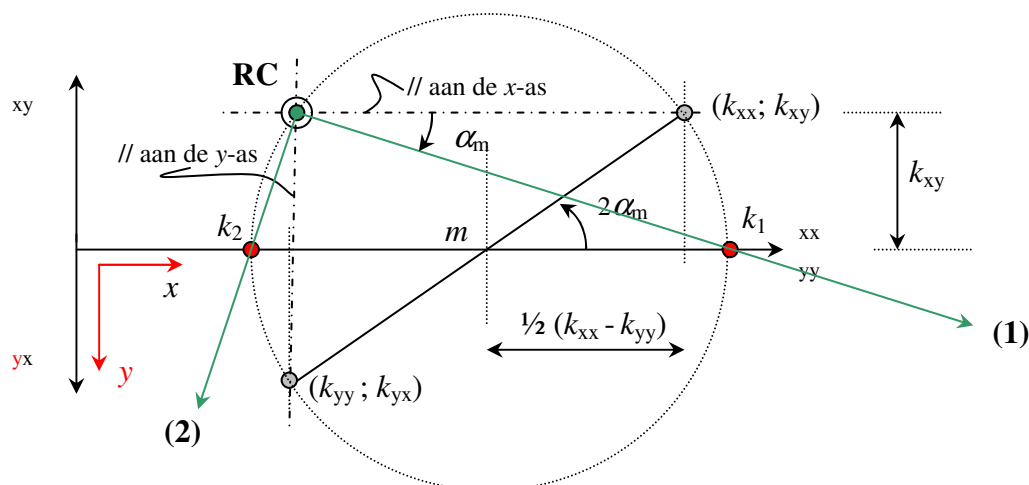
$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\right)^2 + k_{xy}^2} \quad k_2 = m - r$$

Met de kennis uit het voorgaande is het mogelijk om zowel het middelpunt m als de straal r van deze cirkel te koppelen aan de twee invarianten van deze 2e orde tensor in 2D:

$$m = \frac{1}{2} I_1 \quad \text{met: } I_1 = k_{xx} + k_{yy}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2} I_1\right)^2 - I_2} \quad \text{met: } I_2 = k_{xx}k_{yy} - k_{xy}^2$$

De *hoofdwwaarden* zijn hiermee verklaard. De *hoofdrichtingen* kunnen ook grafisch worden bepaald. Hiervoor is echter wel een hulppunt op de cirkel nodig dat we het *richtingencentrum* RC zullen noemen. In oudere literatuur wordt dit ook vaak de *pool* van de cirkel genoemd.



Figuur 2.9 : Cirkel van Mohr, definitie van het richtingencentrum RC

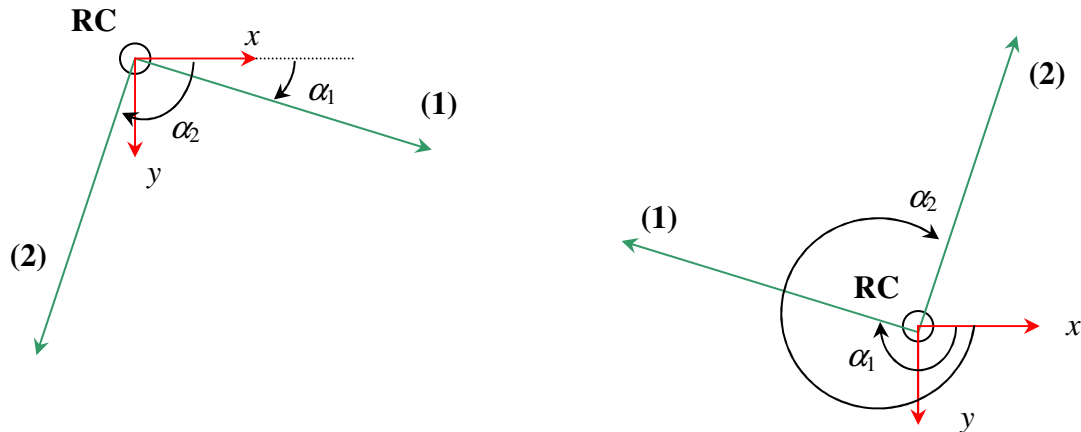
Het richtingencentrum RC van de cirkel kan als volgt worden gevonden:

- Trek een lijn evenwijdig aan de x -as door het punt $(k_{xx}; k_{xy})$
- Trek een lijn evenwijdig aan de y -as door het punt $(k_{yy}; k_{yx})$
- Op het snijpunt van deze lijnen ligt op de cirkel het *richtingencentrum* RC

Met het RC kunnen eenvoudig de hoofdrichtingen worden gevonden:

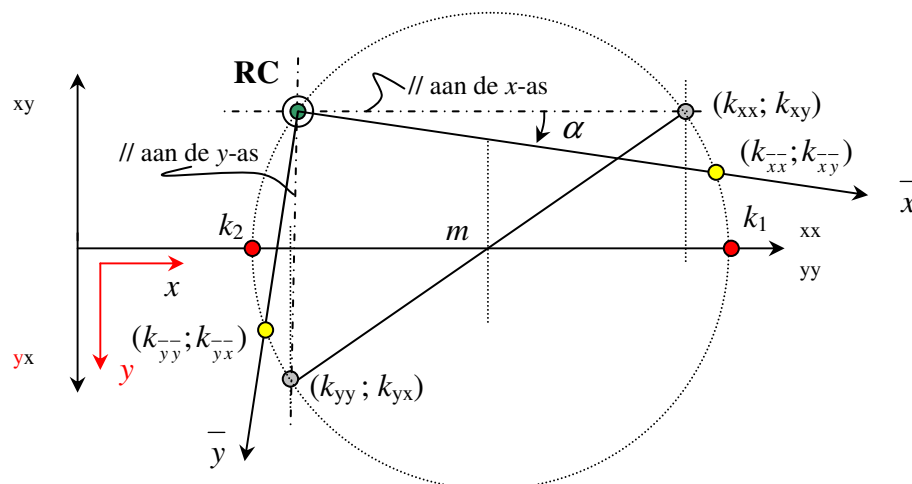
- Trek vanuit het RC een lijn door hoofdw waarde k_1 , dit is hoofdrichting (1)
- Trek vanuit het RC een lijn door hoofdw waarde k_2 , dit is hoofdrichting (2)

Met wat elementaire wiskunde is in te zien dat de inwendige hoek $\mathbf{RC} - k_1 - (k_{xx}, k_{xy})$ gelijk is aan twee maal de middelpuntshoek $m - k_1 - (k_{xx}, k_{xy})$. In figuur 2.9 is deze aangegeven als de hoek α_m . De richting (1) is of van RC naar punt k_1 of van k_1 naar RC. Als (1) vastligt dan volgt de richting van (2) uit de gekozen oriëntatie van het assenstelsel. De hoofdrichtingen (1) en (2) uit figuur 2.10 moeten dus dezelfde oriëntatie hebben als de x en y -as.



Figuur 2.10 : Correcte keuze van de hoofdrichtingen

Het richtingencentrum RC werkt als een soort punaise met daaraan verbonden het assenstelsel. Als we het oorspronkelijke assenstelsel in het RC *vastpinnen* en laten *draaien* over een hoek α dan zullen de tensorcomponenten, weergegeven door de twee tensorpunten, over de cirkel gaan *wandelen* naar een nieuwe, *getransformeerde positie*. In figuur 2.11 deze *grafische toepassing* van de analytische *2^e orde tensortransformatieformules* (1) m.b.v. de cirkel van Mohr weergegeven.



Figuur 2.11 : Tensor transformatie m.b.v. de cirkel van Mohr

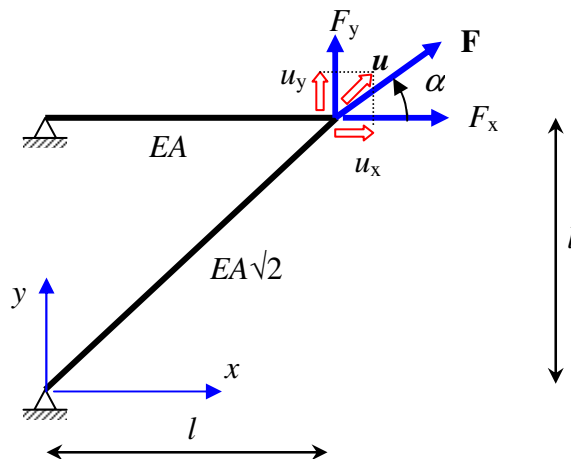
De grafische methode van Mohr wordt het meest toegepast op 2D problemen. Hoewel er 3D toepassingen van zijn is het niet erg zinvol deze nog te bespreken in een tijd waar veel van deze transformaties met behulp van computeralgoritmen worden uitgevoerd. Toch blijft begrip van de grafische methode noodzakelijk aangezien het een snelle controle kan leveren voor gevonden numerieke uitkomsten. In een aantal bijzondere situaties is de grafische methode ook krachtiger dan de analytische methode. Hierop zal in de voorbeelden terug worden gekomen.

2.4 Toepassingen van de cirkel van Mohr

Met een aantal voorbeelden zal de toepassing van de grafische methode van Mohr worden toegelicht. Als eerste wordt het al eerder gebruikte stijfheidsvoorbeeld grafisch uitgewerkt. Vervolgens zullen van een *vlakspanningstoestand* de *hoofdspanningen* en *hoofdrichtingen* worden bepaald. Ten slotte zal nog gekeken worden naar een rekvoorbeeld.

2.4.1 Voorbeeld, stijfheidstensor

Het in paragraaf 2.2 beschreven stijfheidsprobleem uit figuur 2.12 resulteerde in een



Figuur 2.12 : Stijfheidsprobleem

stijfheidsmatrix waarvan we nu weten dat dit een 2^e orde tensor is. In het x - y -assenstelsel geldt:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

De stijfheidstensor kan grafisch worden uitgezet als twee punten waardoor een cirkel moet worden getrokken. Deze cirkel is de cirkel van Mohr. Om deze cirkel te kunnen tekenen doorlopen we het volgende stappenplan dat wordt toegelicht met figuur 2.13:

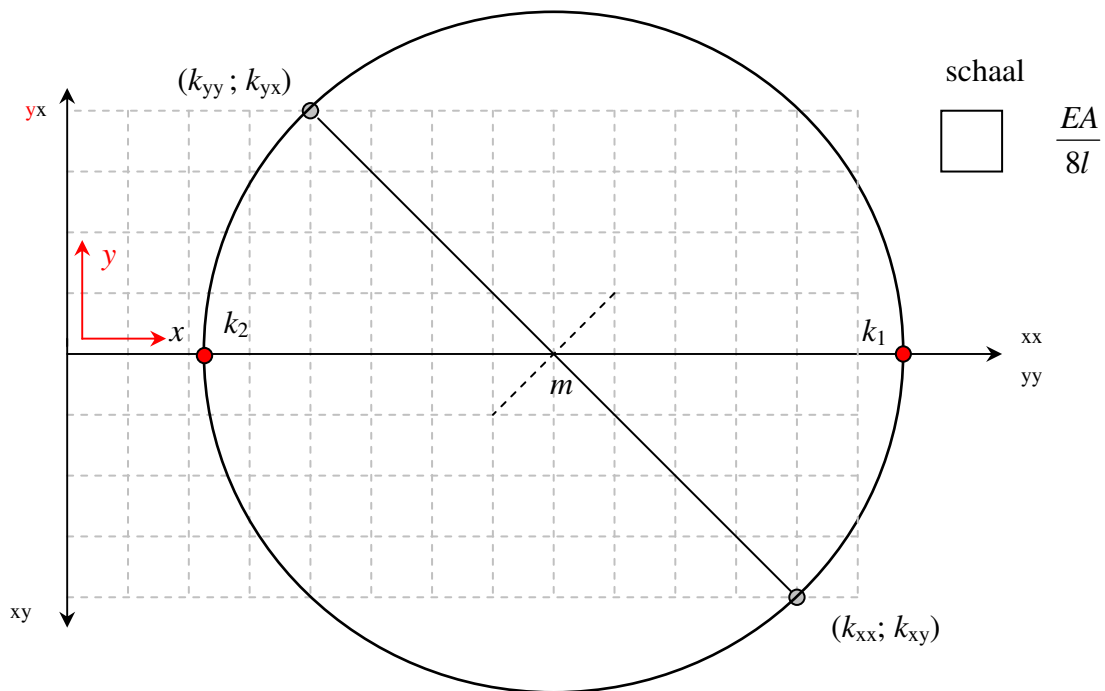
- 1) Teken de horizontale as waarop de diagonaalelementen xx - en yy - worden uitgezet,
- 2) Teken in de oorsprong het gehanteerde x - y assenstelsel,
- 3) Geef de positieve yx -as de richting van de y -as,
- 4) Teken de positieve richting van de xy -as in de tegengestelde richting,



Figuur 2.13 : Definitie van het assenstelsel voor de cirkel van Mohr

Vervolgens gaan we verder met het weergeven van de tensorcomponenten als punten in dit assenstelsel. Daartoe moeten de volgende stappen worden doorlopen, zie ook figuur 2.14:

- 5) Zet de tensorcomponenten paarsgewijs als punten $(k_{xx}; k_{xy})$ en $(k_{yy}; k_{yx})$ uit,
- 6) Trek een verbindingslijn tussen deze punten,
- 7) Zet halverwege deze lijn een loodlijn uit, de *middelloodlijn*,²
- 8) Waar deze middelloodlijn de horizontale as snijdt, bevindt zich het middelpunt m van de cirkel,
- 9) Teken een cirkel met middelpunt m door de punten $(k_{xx}; k_{xy})$ en $(k_{yy}; k_{yx})$.



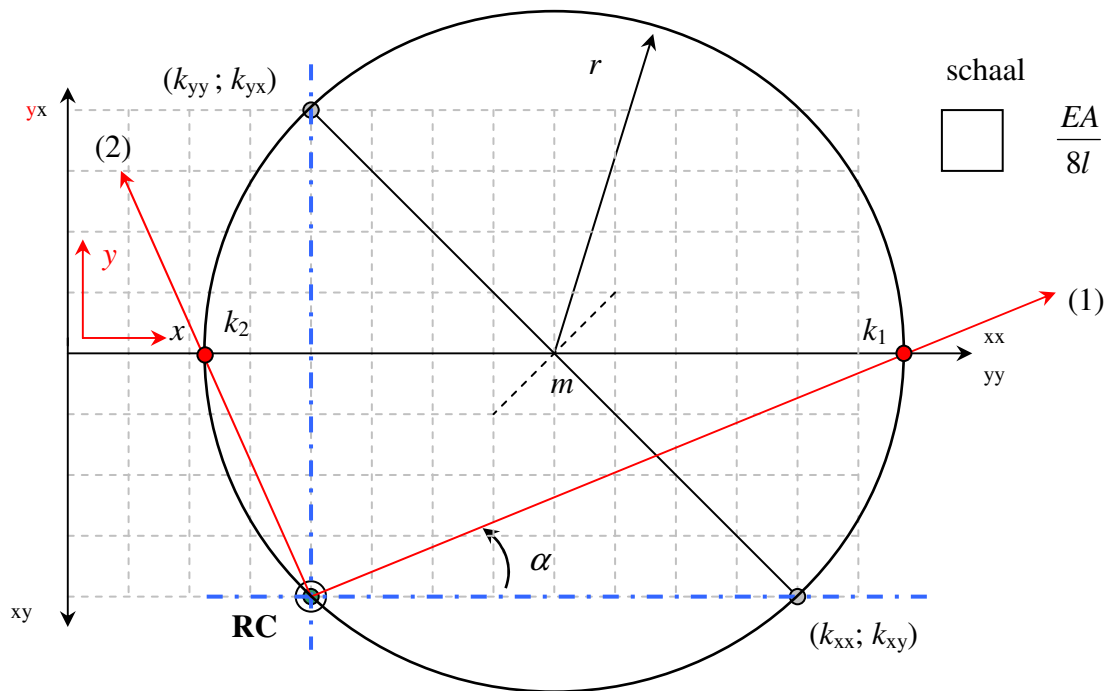
Figuur 2.14 : Cirkel van Mohr met de hoofdwwaarden

In deze figuur is de stijfheidstensor k_{ij} met $(i = x, y)$ weergegeven als twee punten op de cirkel van Mohr. De hoofdwwaarden k_1 en k_2 (eigenwaarden) van deze 2^e orde tensor zijn direct weer te geven. De daarbij behorende hoofdrichtingen (eigenvectoren) zijn echter pas te bepalen nadat eerst het richtingencentrum RC is bepaald.

² Strikt genomen is voor dit voorbeeld deze stap niet nodig aangezien de verbindingslijn halverwege in m , de horizontale as al snijdt. Dit is in het algemeen echter niet zo.

Om dit richtencentrum RC te bepalen vervolgen we ons stappenplan met de volgende drie stappen die in figuur 2.15 worden getoond:

- 10) Trek een lijn evenwijdig aan de x -as door het punt $(k_{xx}; k_{xy})^3$.
- 11) Trek een lijn evenwijdig aan de y -as door het punt $(k_{yy}; k_{yx})$.
- 12) Het snijpunt van deze lijnen op de cirkel is het *richtingencentrum* RC.



Figuur 2.15 : Richtingencentrum RC en hoofdrichtingen

Om hoofdrichting (1) te vinden trekken we een lijn vanuit het RC door de meest positieve hoofdwaarde, k_1 en om hoofdrichting (2) te vinden trekken we een lijn vanuit het RC door hoofdwaarde k_2 . Let er daarbij op dat de eerder genoemde oriëntatie van het (1)-(2) assenstelsel gelijk is aan het oorspronkelijke x - y -assenstelsel.

Uit figuur 2.15 blijkt dat indien het oorspronkelijke x - y -assenstelsel wordt gerooteerd over een hoek α van:

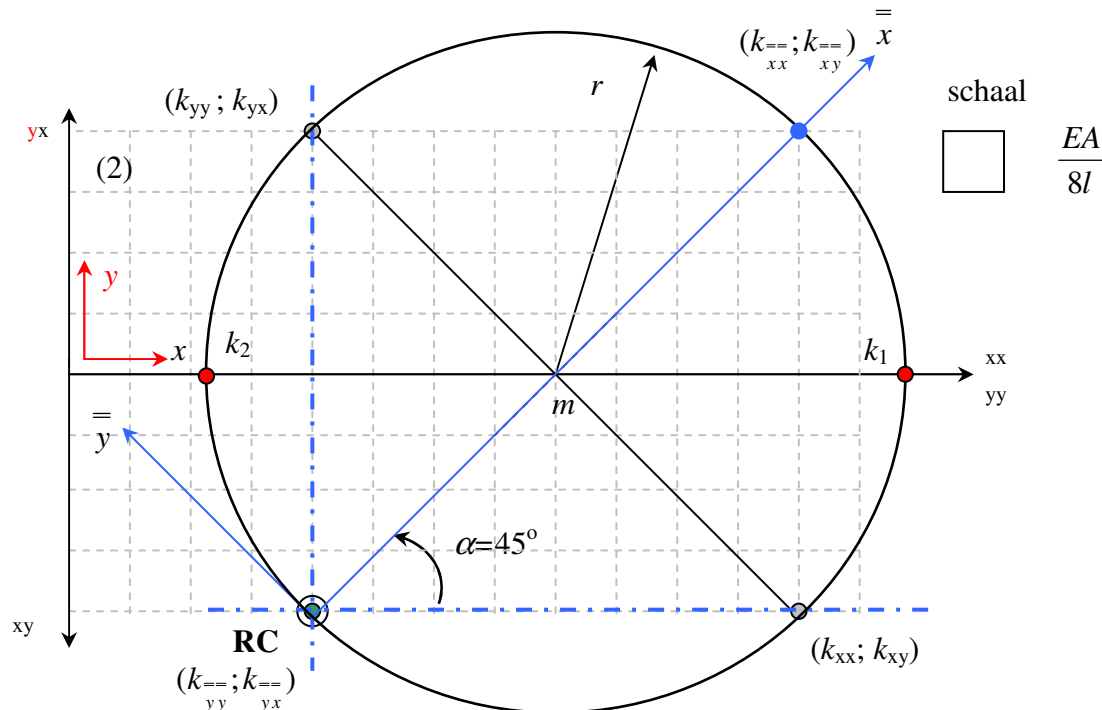
$$\alpha = 22,5^\circ$$

We eindigen in het hoofdassenstelsel aangegeven met (1)-(2). Kennelijk is dit een bijzondere ligging van het gerooteerde assenstelsel waarbij de oorspronkelijke tensorpunten door rotatie van het assenstelsel over de cirkel naar de hoofdwaardenpunten k_1 en k_2 zijn *gewandeld*. Het bijzondere van deze ligging van het assenstelsel is gelegen in het feit dat deze beide punten op de horizontale as liggen en daardoor een tensor vormen die bestaat uit alleen een diagonaalmatrix. Dit is uiteraard volstrekt in overeenstemming met de eerder gevonden resultaten.

De cirkel van Mohr is met het RC, de hoofdwaarden en de hoofdrichtingen compleet en met deze cirkel kan nu voor iedere oriëntatie van het assenstelsel de getransformeerde 2^e orde stijfheidstensor worden bepaald.

³ In stap 10 end 11 wordt in zijn algemeenheid altijd een lijn getrokken evenwijdig aan de eerste index van het betreffende tensorpunt. In dit voorbeeld betreft het de x - en de y -as.

Als laatste stap in dit voorbeeld zal eens gekeken worden naar de stijfheid indien we het assenstelsel roteren over een hoek van 45° . Figuur 2.16 laat dit zien.



Figuur 2.16 : Tensortransformatie over een hoek van 45 graden

Het nieuwe assenstelsel wordt aangegeven met $\bar{x} - \bar{y}$. De ligging wordt verkregen door rotatie van 45 graden van het oorspronkelijke assenstelsel om het richtingencentrum RC. De snijpunten van dit geroteerde assenstelsel met de cirkel zijn de getransformeerde tensorcomponenten en deze geven we aan in het nieuwe assenstelsel met:

$$\begin{pmatrix} k_{\bar{x}\bar{x}}; k_{\bar{x}\bar{y}} \\ k_{\bar{y}\bar{y}}; k_{\bar{y}\bar{x}} \end{pmatrix}$$

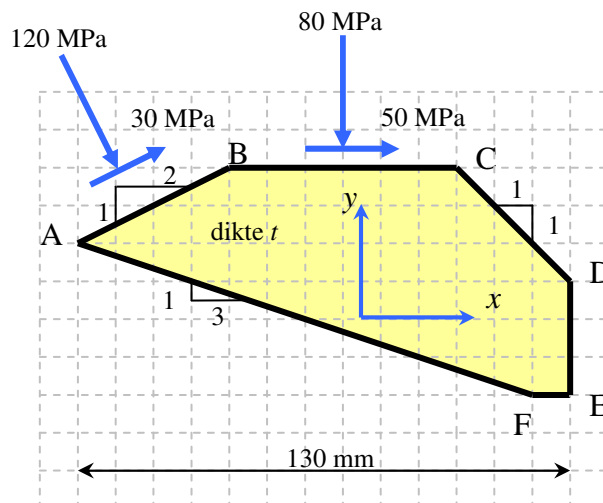
De waarden van deze punten lezen we af op de horizontale en verticale assen. De diagonaalelementen op de horizontale as en de niet diagonaalelementen op de verticale as waarbij goed gelet moet worden op het verschil in de indices xy en yx . Het punt rechtsboven heeft een yx index maar is getekend aan de negatieve zijde van de xy -as (bovenzijde) en daardoor is de waarde negatief. Hetzelfde geldt voor het punt linksonder dat een yx index heeft en daarmee aan de negatieve zijde ligt van de yx -as.

$$\begin{pmatrix} k_{\bar{x}\bar{x}}; k_{\bar{x}\bar{y}} \\ k_{\bar{y}\bar{y}}; k_{\bar{y}\bar{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3EA}{2l}; -\frac{EA}{2l} \\ \frac{EA}{2l}; -\frac{EA}{2l} \end{pmatrix}$$

In dit bijzondere geval valt een van de twee tensorpunten samen met het RC. Het stappenplan is een ijzersterke steun om zonder fouten de juiste waarden en tekens te vinden na transformatie. Het juist interpreteren van, met name de verticale assen, is daarbij de grootste foutgevoeligheid.

2.4.2 Voorbeeld, spanningstensor

De cirkel van Mohr kan ook worden gebruikt voor het bepalen van de hoofdspanningen in een proefstuk in een homogene vlakspanningstoestand. Hoofdspanningen (normaalspanningen) treden op op die vlakken waar per definitie de schuifspanningen nul zijn, zie hiervoor de eerdere afleiding van de tensortransformatieregels. In de onderstaande figuur is een voorbeeld gegeven van een proefstuk waarvan op twee vlakken de normaal- en schuifspanningen bekend zijn. Het proefstuk heeft een constante dikte t . Het proefstuk wordt belast in een zgn. homogene vlakspanningstoestand hetgeen inhoudt dat we aannemen dat in ieder punt de spanningstoestand hetzelfde is en dat alle spanningen op vlakken met de normaal in de z -richting, gelijk zijn aan nul.

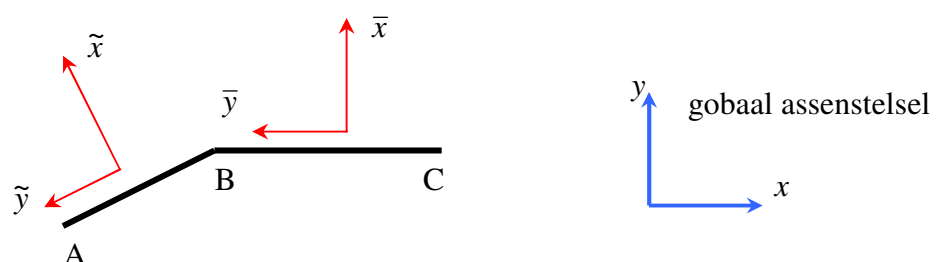


Figuur 2.17 : Spanningen op een proefstuk

Gegeven : - op vlakje AB werkt een drukspanning van 120 N/mm^2 en een Schuifspanning van 30 N/mm^2 . Op vlak BC werkt een drukspanning van 80 N/mm^2 en een schuifspanning van 50 N/mm^2 .

De spanningen op alle overige vlakken kunnen worden bepaald met behulp van de cirkel van Mohr. De spanningen op de vlakken AB en BC kunnen als twee punten op de cirkel van Mohr worden weergegeven. Hiermee is deze cirkel bepaald en kan door roteren van het assenstelsel voor iedere willekeurige richting de bijbehorende normaal- en schuifspanning worden afgelezen. Op deze manier kunnen we de spanningen vinden op de vlakken AF, FE, ED en CD. Essentieel daarbij is de juiste ligging van het richtingencentrum **RC**, dat als een soort punaise werkt waarom het assenstelsel draait over de cirkel.

De twee vlakken waarvan de spanningen bekend zijn staan niet loodrecht op elkaar. Hierdoor vormen deze vier spanningscomponenten niet een complete tensor. In feite betreft het hier twee halve 2^e orde tensoren, ieder t.o.v. een eigen oriëntatie van het assenstelsel.



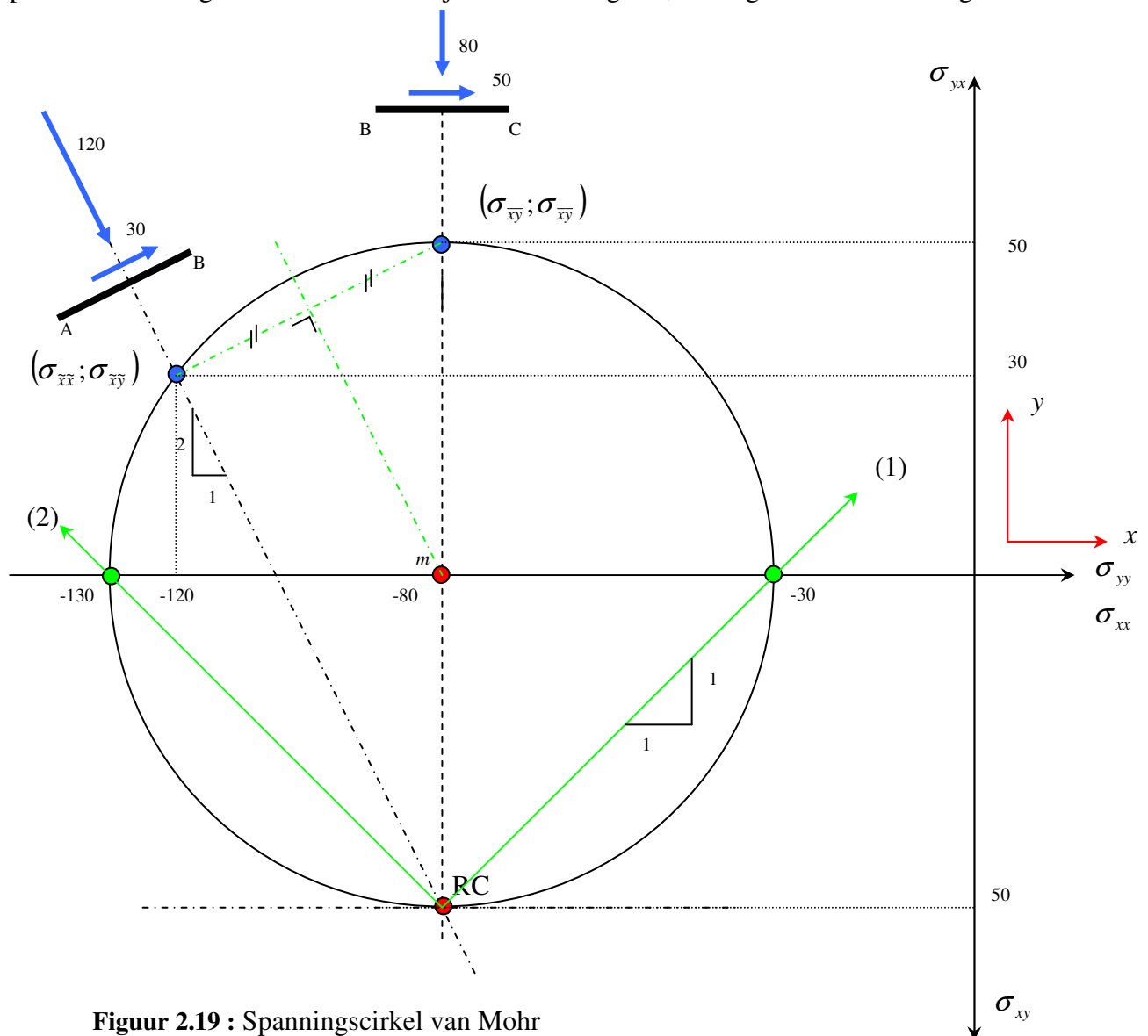
Figuur 2.18 : Lokaal assenstelsel voor de vlakken AB en BC

Met behulp van de lokale assenstelsels per vlakje, kunnen we de spanningen op de vlakken AB en BC als twee punten weergeven die op de cirkel moeten liggen:

$$AB \quad (\sigma_{\bar{x}\bar{x}}; \sigma_{\bar{x}\bar{y}}) = (-120; -30)$$

$$BC \quad (\sigma_{\bar{x}\bar{x}}; \sigma_{\bar{x}\bar{y}}) = (-80; -50)$$

Aangezien de normaalspanningen negatief zijn (druk) verwachten we een cirkel die links ligt van de oorsprong van het assenstelsel. Beide schuifspanningen zijn ook negatief waardoor de beide punten aan de negatieve verticale as-zijde worden uitgezet, in dit geval is dat omhoog.



Figuur 2.19 : Spanningscirkel van Mohr

Het middelpunt van de cirkel kan worden gevonden met de eerder beschreven stappen 6-8:

- 6) Trek een lijn door beide spanningspunten.
- 7) Teken de middelloodlijn van deze lijn.
- 8) Waar de middelloodlijn de horizontale as snijdt ligt het middelpunt m van de cirkel.

De cirkel kan nu worden geconstrueerd met middelpunt m en door de beide spanningspunten.

Het richtingencentrum **RC** kan worden gevonden met stappen 10-12:

- 10) Trek een lijn evenwijdig aan de eerste index ($\tilde{x}$ – as) door het spanningspunt $(\sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}; \sigma_{\tilde{x}\tilde{y}})$.
- 11) Trek een lijn evenwijdig aan de eerste index ($\bar{x}$ – as) door het spanningspunt $(\sigma_{\bar{x}\bar{y}}; \sigma_{\bar{y}\bar{y}})$.
- 12) Op het snijpunt van deze twee lijnen en op de cirkel, ligt het richtingencentrum **RC**.

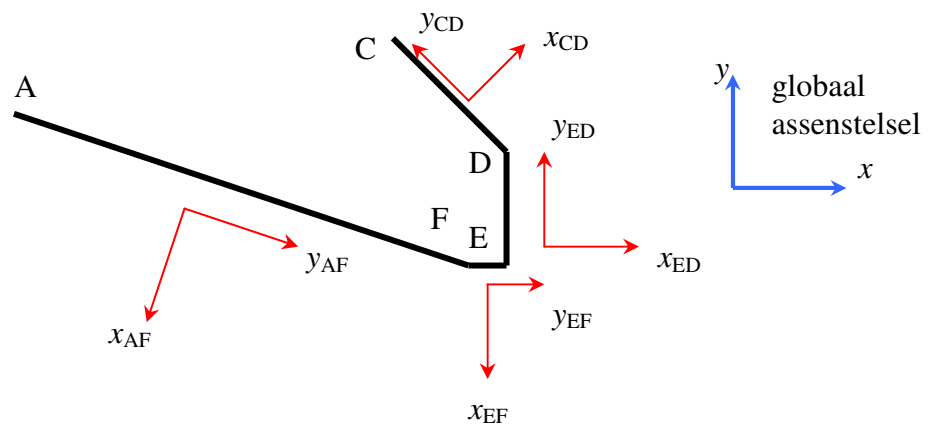
De hoofdrichtingen (1) en (2) worden gevonden door vanuit het RC lijnen te trekken door de hoofdspanningspunten σ_1 and σ_2 op de horizontale as. Dit is weergegeven in figuur 2.19. De oriëntatie van het 1-2-assenstelsel is hetzelfde als dat van het globale assenstelsel.

De hoofdspanningen kunnen uit de cirkel worden afgelezen:

$$\sigma_1 = -30 \text{ N/mm}^2$$

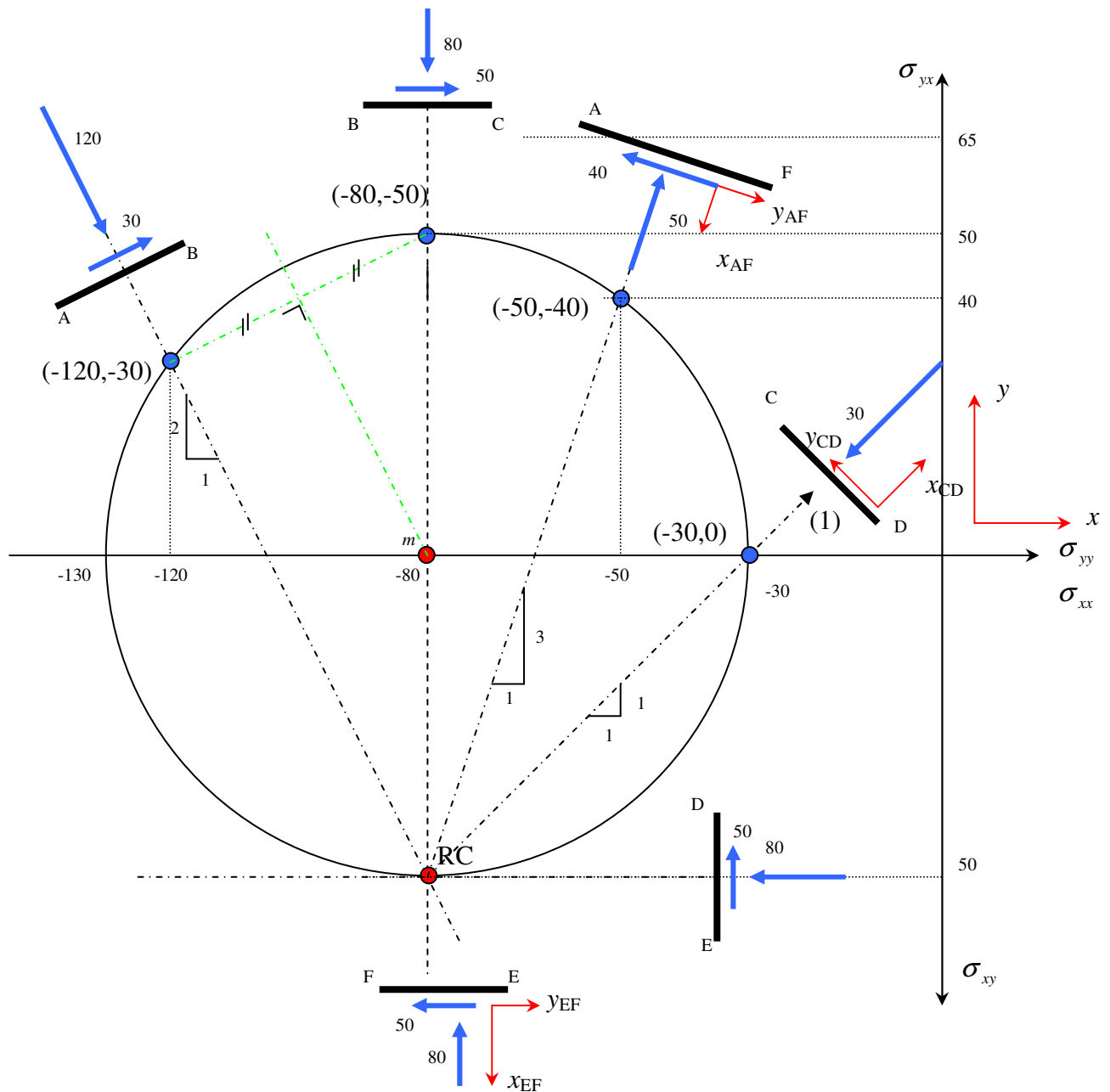
$$\sigma_2 = -130 \text{ N/mm}^2$$

Om de spanningen op de overige vlakken te vinden wordt per vlak een lokaal assenstelsel gekozen waarbij de lokale x -as samenvalt met de uitwendige normaal van het betreffende vlak. Vervolgens wordt vanuit het **RC** een lijn getrokken evenwijdig aan deze lokale x -as en waar deze lijn de cirkel snijdt wordt het spanningspunt afgelezen. Alleen in de bijzondere situatie dat er slechts een snijpunt is valt het **RC** samen met het spanningspunt. In alle andere situaties is het spanningspunt altijd het andere snijpunt met de cirkel. De gebruikte definities van de lokale assenstelsel zijn weergegeven in figuur 2.20.



Figuur 2.20 : Lokaal assenstelsel per vlak

De toepassing van de beschreven procedure wordt toegelicht met figuur 2.21.



Figuur 2.21 : Spanningen op alle vlakken

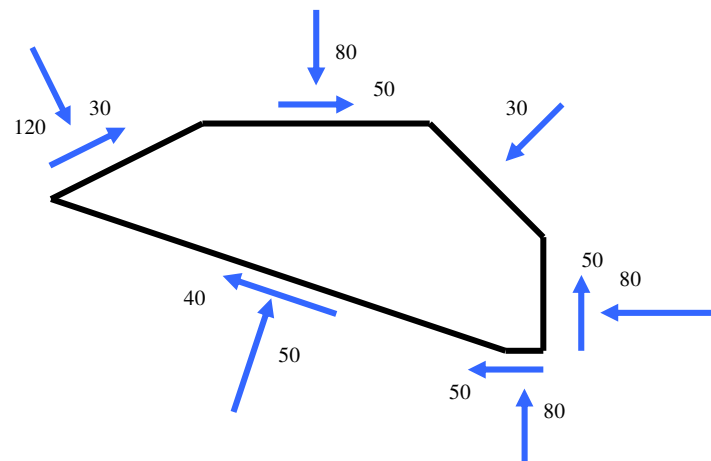
De uiteindelijk gevonden spanningen zijn in de rechter figuur verzameld met de werkelijke richting van deze spanningen.

Opdracht :

Controleer het evenwicht van het proefstuk.

Op de website is een animatie van een soortgelijk spanningsprobleem te downloaden.

Alle stappen worden in het programma visueel getoond, voorzien van de informatie uit het stappenplan.

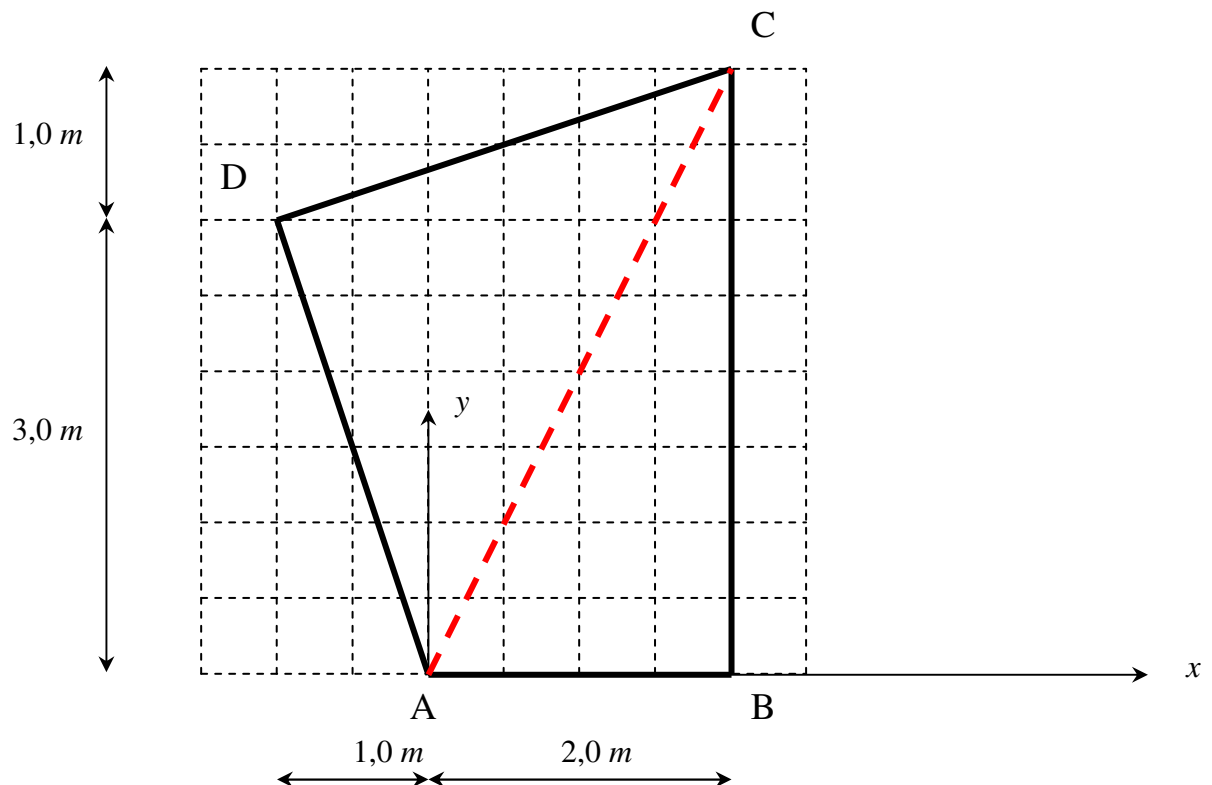


2.4.3 Voorbeeld, rektensor

De cirkel van Mohr kan ook worden toegepast voor het bepalen van hoofdrekken. Om dit te demonstreren wordt teruggegrepen op een eerder behandelde voorbeeld uit paragraaf 1.2 waar het verplaatsingsveld was gegeven van een proefstuk in een vlakke spanningstoestand:

$$u_x = 0,2 \times 10^{-4} + 0,3 \times 10^{-4} x$$

$$u_y = 2 \times 10^{-4} x + 1,8 \times 10^{-4} y$$



Figuur 2.22 : Rek voorbeeld

De rektensor kan worden bepaald uit het gegeven verplaatsingsveld en daarmee kan de cirkel van Mohr worden geconstrueerd. Vervolgens kan voor iedere vezelrichting de rek worden bepaald met behulp van de cirkel.

De rektensor was al eerder bepaald in paragraaf 1.2 en volgt uit:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \quad \text{met: } i, j = x, y$$

Waarmee de componenten van de rektensor kunnen worden gevonden:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,3 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 1,8 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 2,0 \times 10^{-4} = 1,0 \times 10^{-4}$$

Deze complete tensor kan worden weergegeven met twee rek-punten die op de rekcirkel van Mohr moeten liggen. Aangezien beide punten afkomstig zijn uit dezelfde tensor liggen deze punten diametraal t.o.v. het middelpunt m van de cirkel. De punten zijn:

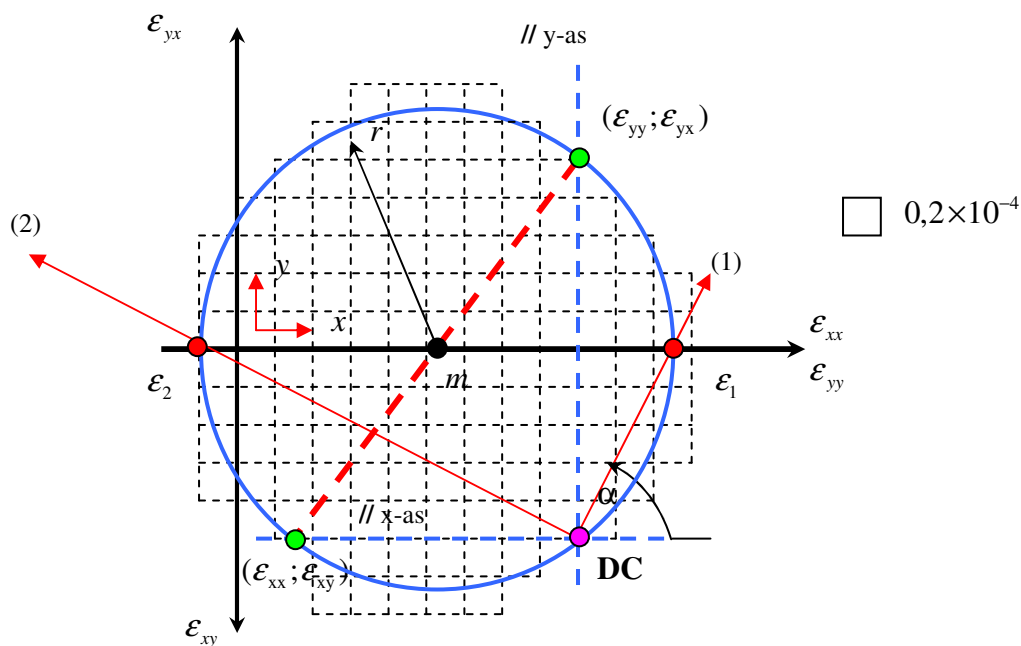
$$(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}) = (0,3 \times 10^{-4}; 1,0 \times 10^{-4})$$

$$(\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{yx}) = (1,8 \times 10^{-4}; 1,0 \times 10^{-4})$$

Let op:

De richtingen in de rekcirkel zijn de richtingen van de vezels waarvan de rek wordt bepaald. Dit ter onderscheiding van de richtingen in de spanningscirkel waar de richting gelijk is aan de normaal van het vlak waarop de spanningen werken.

De rekcirkel is in figuur 2.23 weergegeven, loop zelf de stappen na om deze te vinden.



Figuur 2.23 : Rekcirkel van Mohr

De hoofdrekken en de hoofdrichtingen voor de rekken kunnen worden afgelezen:

$$\varepsilon_1 = 2,3 \times 10^{-4} \quad \text{en} \quad \tan \alpha = \frac{2}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = 63^\circ$$

$$\varepsilon_2 = -0,2 \times 10^{-4}$$

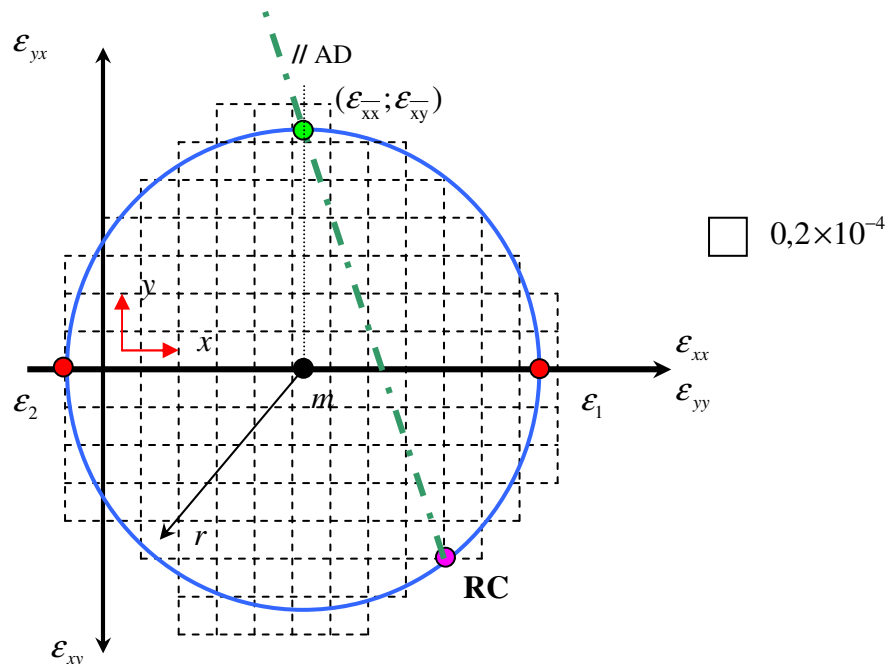
Vezels evenwijdig aan AC hebben dezelfde richting als hoofdrichting (1). De rek in deze vezels is daarom gelijk aan de hoofdrek ε_1 .

Opdracht:

Controleer met het gegeven verplaatsingsveld m.b.v. de verplaatsingen in A en C de rek in vezels evenwijdig aan AC. Het antwoord kan worden gevonden in de APPENDIX.

De rek voor een willekeurige vezel kan worden gevonden door vanuit het **RC** een lijn te trekken evenwijdig aan de vezelrichting. Daar waar deze lijn de cirkel snijdt wordt het rek-punt afgelezen. Alleen in de bijzondere situatie dat er slechts een snijpunt is valt het **RC** samen met het rek-punt. In alle andere situaties is het rek-punt altijd het andere snijpunt met de cirkel. Op de horizontale as wordt de rek in de vezel afgelezen.

Op de verticale as wordt de helft van de afschuifvervorming afgelezen. Als we bijvoorbeeld willen weten hoeveel de oorspronkelijk rechte hoek ADC verandert t.g.v. de afschuifvervorming dan kunnen we kijken naar de afschuifvervorming van vezel AD of DC. In figuur 2.24 is de richting van vezel AD weergegeven in de cirkel van Mohr.



Figuur 2.24 : Rek in vezel AD

De locale $\bar{x}$ - as van vezel AD wordt gekozen in de richting van vezel AD. Met dit lokale $\bar{x} - \bar{y}$ - assenstelsel kunnen de rekpunten inclusief het teken eenduidig worden afgelezen:

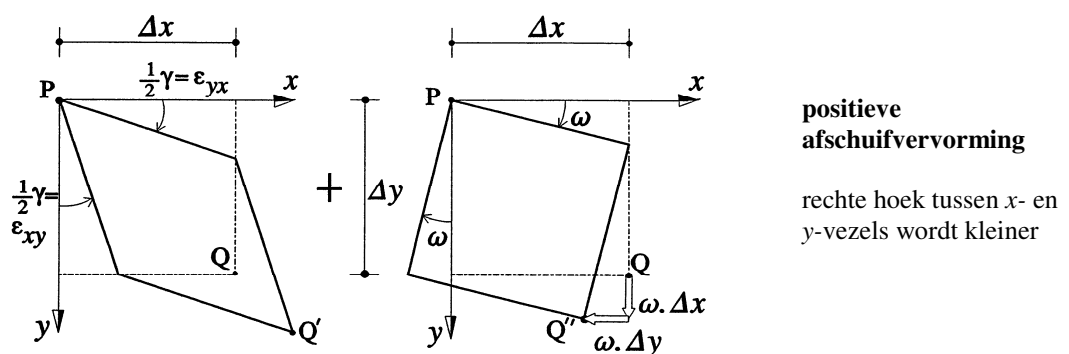
$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} = 1,05 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} = -1,25 \times 10^{-4}$$

De verandering van de rechte hoek ADC is afschuifvervorming die per definitie gelijk is aan:

$$\gamma_{\bar{x}\bar{y}} = 2\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} = -2,5 \times 10^{-4}$$

Het minteken is hier niet zo relevant aangezien het om een verandering van de rechte hoek gaat. Met behulp van de definitie uit figuur 2.25 (links) is echter wel op te maken dat de hoek ADC groter wordt ten gevolge van de negatieve afschuifvervorming.

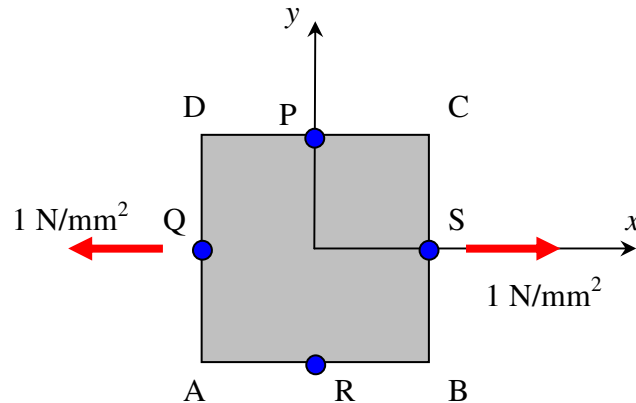


Figuur 2.25 : Afschuifvervorming

3. Vraagstukken

Met de gepresenteerde theorie kunnen de volgende opgaven worden gemaakt.

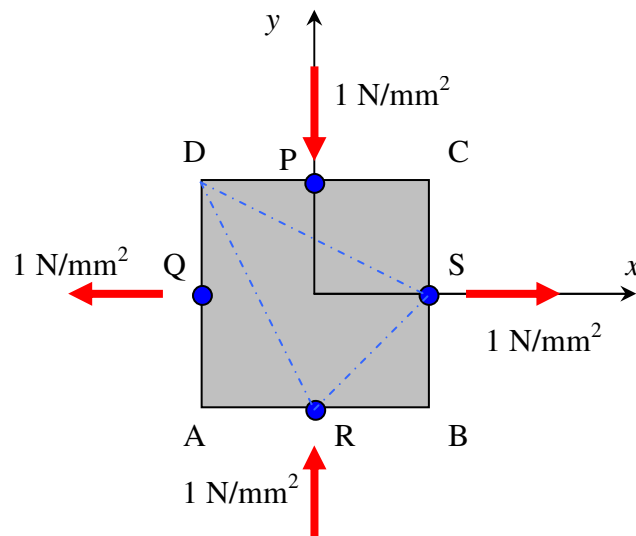
Opgave 1



Figuur 3.1 : Spanningsituatie, opgave 1

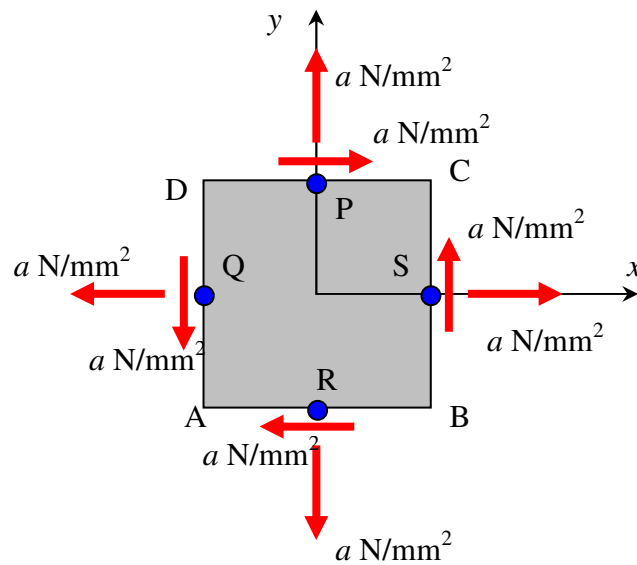
- Construeer de cirkel van Mohr voor dit probleem,
- Bepaal de spanningen op vlakken die een hoek van 45° maken met de x -as,
- Controleer het evenwicht van het deel PQRS.

Opgave 2

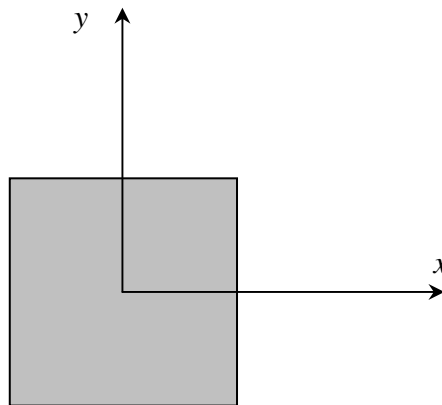


Figuur 3.2 : Spanningsituatie opgave 2

- Construeer de cirkel van Mohr voor dit probleem,
- Bepaal de hoofdspanningen en de hoofdrichtingen,
- Bepaal de spanningen op vlak PS,
- Bepaal de spanningen op de vlakken van deel DSR,
- Controleer het evenwicht van het deel DSR.

Opgave 3**Figuur 3.3 :** Spanningsituatie opgave 3

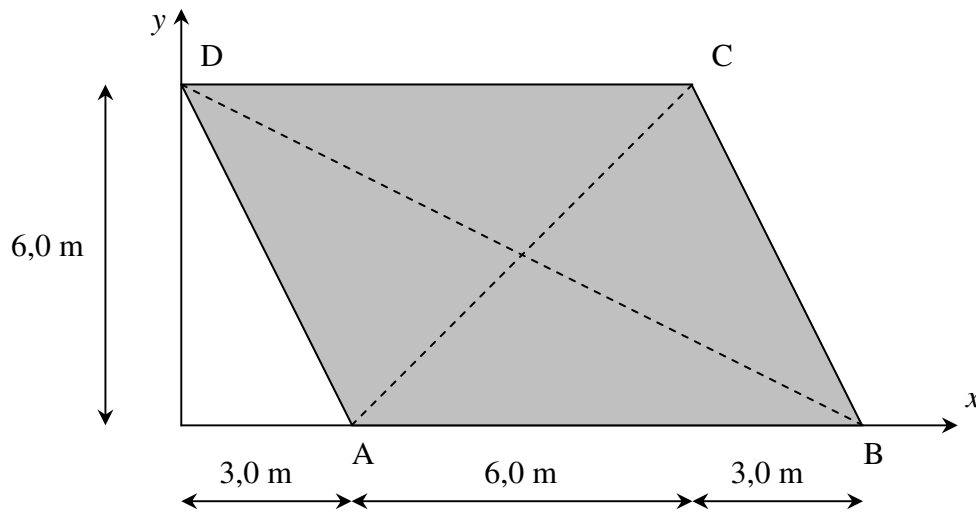
- Construeer de cirkel van Mohr voor dit probleem,
- Bepaal de hoofdspanningen en de hoofdrichtingen,
- Bepaal de spanningen op de vlakken PA en CR,
- Controleer het evenwicht van het deel APCR.

Opgave 4**Figuur 3.4 :** Proefstuk en assenstelsel van opgave 4

Van het proefstuk uit figuur 3.4 zijn de spanningen gegeven in het aangegeven assenstelsel:

$$\sigma_{xx} = 8 \text{ MPa}; \quad \sigma_{yy} = -2 \text{ MPa}; \quad \sigma_{xy} = 0$$

- Construeer de cirkel van Mohr voor dit probleem,
- Bepaal de vlakken met de maximale schuifspanning,
- Bepaal de vlakken zonder normaalspanning en geef voor deze vlakken de schuifspanning weer zoals deze in werkelijkheid werkt op het beschouwde vlak.

Opgave 5**Figuur 3.5 : Rekprobleem**

In figuur 3.5 is een proefstuk afgebeeld waarvan de volgende rekken zijn gegeven in het aangegeven assenstelsel:

$$\varepsilon_{xx} = 0; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0; \quad \varepsilon_{yy} = -10^{-3}$$

- Construeer de rekcirkel van Mohr en gebruik als schaal: $1 \text{ cm} = 0,1 \times 10^{-3}$,
- Geef duidelijk de positie aan van het richtingencentrum RC,
- Bepaal de hoofdrekken en de hoofdrichtingen,
- Bepaal de verandering van de lengte van vezels AC, BD en AD.

ANTWOORDEN

Voor alle vlakken waar de spanningen worden bepaald is een lokaal x - y -assenstelsel aangehouden waarbij de lokale x -as samenvalt met de uitwendige normaal van het beschouwde vlak.

Opgave 1: spanning op PS : $\sigma_{xx} = \frac{1}{2} \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{xy} = -\frac{1}{2} \text{ N/mm}^2$

Opgave 2: spanning op PS : $\sigma_{xx} = 0 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{xy} = -1 \text{ N/mm}^2$
 spanning op RS : $\sigma_{xx} = 0 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{xy} = 1 \text{ N/mm}^2$
 spanning op DS : $\sigma_{xx} = -\frac{3}{5} \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{xy} = -\frac{4}{5} \text{ N/mm}^2$
 spanning op DR : $\sigma_{xx} = \frac{3}{5} \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{xy} = -\frac{4}{5} \text{ N/mm}^2$

Opgave 3 : hoofdrichting evenwijdig aan AC en BD;
 hoofdspanningen : $\sigma_1 = 2a$; $\sigma_2 = 0$;
 spanning op CR : $\sigma_{xx} = \frac{1}{5}a \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{xy} = \frac{3}{5}a \text{ N/mm}^2$
 maximum schuifspanning op vlakken evenwijdig aan de x - en y -as.

Opgave 4 : vlakken onder een hoek van 45° : $\sigma_{xx} = 3 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{xy} = -5 \text{ N/mm}^2$
 vlakken $x-2y = C$: $\sigma_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{\tilde{x}\tilde{y}} = 4 \text{ N/mm}^2$
 vlakken $x+2y = C$: $\sigma_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{\tilde{x}\tilde{y}} = -4 \text{ N/mm}^2$

Opgave 5 : $\Delta l^{AC} = -3\sqrt{2} \text{ mm}$; $\Delta l^{BD} = -1,2\sqrt{5} \text{ mm}$; $\Delta l^{AD} = -2,4\sqrt{5} \text{ mm}$;

4. Lineair elastische spanning – rek relatie

De relatie tussen spanning en rek wordt ook wel de constitutieve relatie genoemd. Veelal is de relatie afhankelijk van het type materiaal. Daarom wordt er ook gesproken over materiaalmodellen als in feite de constitutieve relatie wordt bedoeld. Materiaalmodellen kunnen vrij gecompliceerd zijn aangezien materialen tal van verschillen vertonen in hun gedrag bij belasten ervan onder verschillende condities. Denk bijvoorbeeld alleen al aan bros of ductiel gedrag of aan composietmaterialen. De materialen die in civieltechnische constructies worden toegepast vertonen ook deze complexiteit. Denk daarbij aan beton, al dan niet gewapend of aan grond dat al dan niet cohesie kan vertonen zoals bij klei of bestaat uit los gepakt zand. Ook asfalt dat bestaat uit verschillende fracties waarbij delen bestaan uit bitumen die een viskeuze gedrag vertonen en delen die steenachtig zijn en meer het gedrag vertonen van beton. Materiaalmodellen worden toegepast in met name computerapplicaties waarbij het gedrag, duurzaamheid en de veiligheid van constructies worden getoetst. Op het gebied van materiaalmodellen en rekentechnieken (computational mechanics) wordt veel onderzoek verricht met als doel betere voorspellingen te kunnen doen ten aanzien van de prestatie-eisen die gesteld worden aan constructies om zo de natuurlijke resources minimaal te belasten.

Het meest eenvoudige model waartoe we ons beperken in deze cursus bestaat uit een direct verband tussen de rektensor en de spanningstensor waarbij uitgegaan wordt van een lineair elastische relatie zoals in figuur 4.1 wordt beschreven.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{lineaire relatie}} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- 2^e orde rektensor
- afgeleid uit het verplaatsingsveld
- materiaal onafhankelijk

- 2^e orde spanningstensor
- afgeleid uit het evenwicht
- materiaal onafhankelijk

Figuur 4.1: Spanning – rek relatie

De gezochte relatie bestaat uit $9 \times 9 = 81$ componenten. Vanwege symmetrie resteren dan echter 36 onafhankelijke componenten die moeten worden bepaald. De spanningstensor en rektensor is echter ook symmetrisch. Er is in feite een relatie nodig tussen 6 rekken en 6 spanningen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \sigma_{ij} = A_{klij} \varepsilon_{ij}$$

De relatie tussen de beide 2^e orde tensoren is per definities een 4^e orde tensor die symmetrisch⁴ moet zijn waarmee het aantal onbekenden reduceert tot 21. Voor lineair elastische materialen zal worden aangetoond dat we echter kunnen volstaan met slechts 2 parameters.

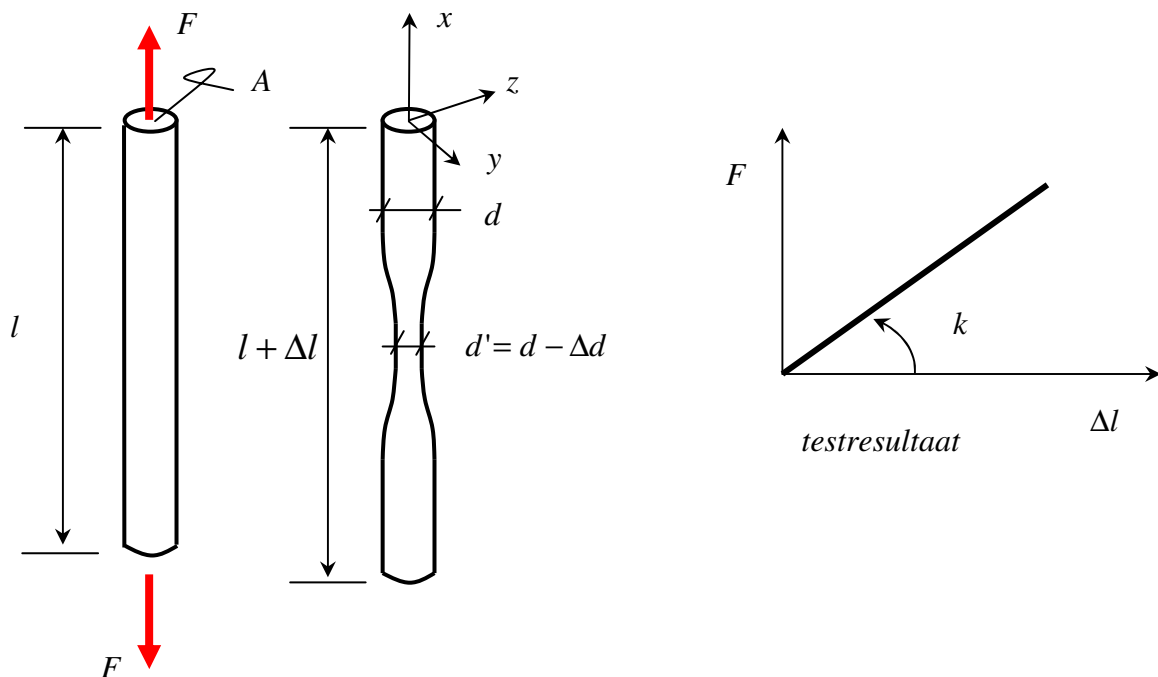
⁴ Maxwell-Betti theorema

4.1 één-assige trekproef

Met behulp van een één-assige trekproef is de spanning-rek relatie te bepalen voor een materiaal. Voor een *lineair elastisch materiaalgedrag* staat deze relatie bekend als de wet van Hooke:

$$\sigma = E \times \varepsilon \quad \text{N/mm}^2$$

De constante E noemen we de *elasticiteitsmodulus*. Amerikanen duiden deze aan als Young's modulus. Aangezien de rek een dimensieloze parameter is moet de elasticiteitsmodulus de dimensie hebben van een spanning.



Figuur 4.2 : één-assige trekproef

De trekproef levert een lineaire relatie tussen de aangebrachte kracht en de gemeten verlenging van de staaf, zie figuur 4.2. De helling van het kracht-verplaatsingsdiagram is de rekstijfheid k :

$$F = k \times \Delta l$$

De uitdrukking voor de rekstijfheid is te vinden door gebruik te maken van:

$$F = \sigma \times A \quad \text{en} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Hiermee ontstaat:

$$F = \frac{EA}{l} \times \Delta l$$

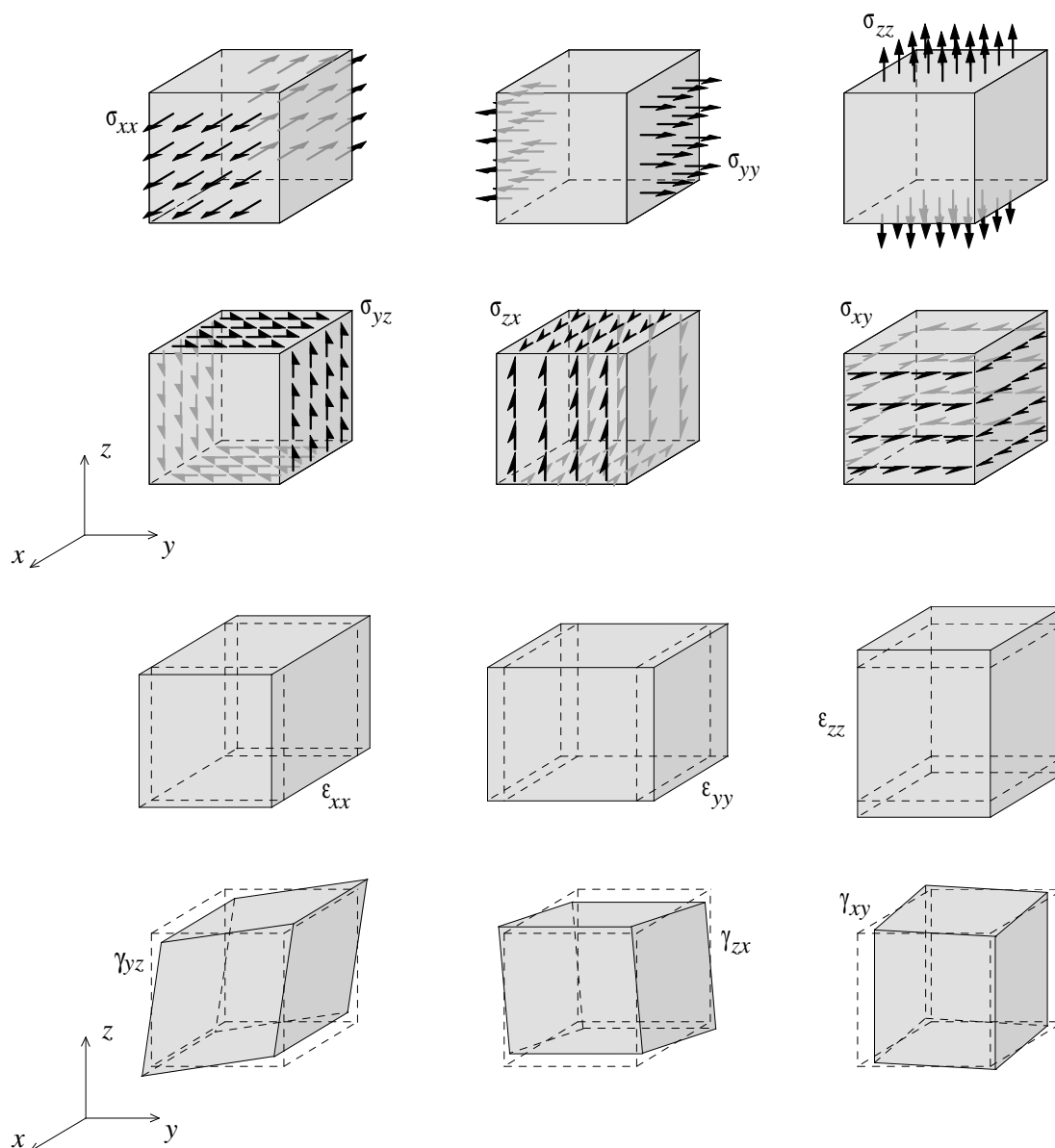
Naast de verlenging van de staaf ten gevolge van de aangebrachte trekkracht wordt bij de één-assige trekproef ook een verandering van de diameter waargenomen. De diameter neemt over een zekere afstand aanzienlijk af. Deze *insnoering* houdt in dat er ook vervormingen optreden in richtingen die loodrecht staan op de trekrichting.

De mate van insnoering blijkt uit observaties en metingen evenredig te zijn met de mate van verlenging:

$$\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} = \text{constant} = \nu$$

Deze constante staat bekend als de dwarscontractie-coëfficiënt ν en in de Angelsaksische wereld aangeduidt met Poisson's ratio. Als de trekstaaf een cirkelvormige doorsnede heeft blijft ook na insnoering de doorsnede de cirkelvorm behouden. De insnoering in zowel de y - als z - richting is daarmee gelijk en alleen afhankelijk van de mate van verlenging in de x -richting.

Met dit experimentele resultaat in gedachten zullen we proberen de spanning-rek relatie af te leiden voor een drie-assige spanningstoestand. In figuur 4.3 zijn zes spanningssituaties voor normaalspanningen en schuifspanningen getekend met daaronder de zes vervormings-modes.



Figuur 4.3 : Spanningen en reken.

Uit de figuren blijkt dat de vervorming ten gevolge van normaalspanningen ontkoppeld zijn van die ten gevolge van afschuiving. Daarom worden de beide vervormingstypen afzonderlijk bekeken om zo de totale relatie tussen spanningen en rekken te bepalen.

4.2 Normaalspanningen versus rekken

Uit de één-assige trekproef met normaalspanning σ_{xx} volgt:

Rek in de trekrichting:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

Rek in richtingen loodrecht op de trekrichting:

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

In het algemeen volgt hieruit voor de normaalrekken:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu\sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu\sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E}\end{aligned}$$

In matrixvorm levert dit:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

De inverse spanning-rek relatie wordt hiermee:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu \\ \nu & (1-\nu) & \nu \\ \nu & \nu & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

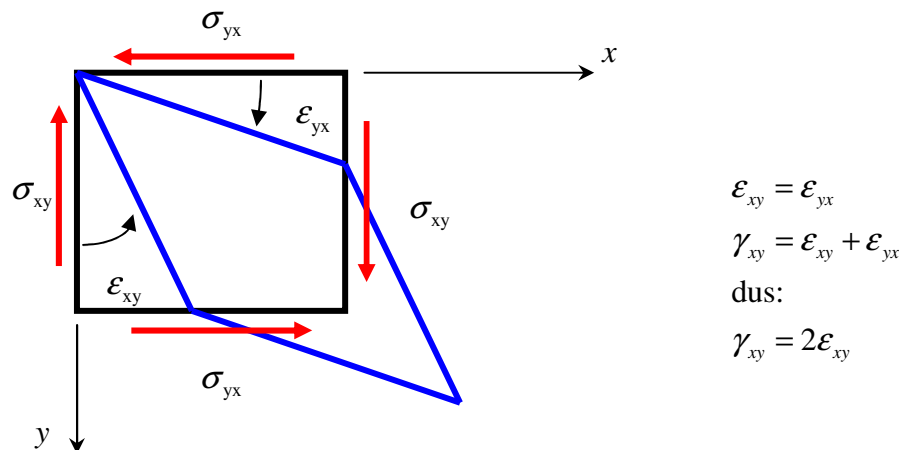
Uit deze laatste uitdrukking volgt dat een positief definitie spanning-rek relatie alleen mogelijk is voor waarden van de dwarskrachtcontractie coëfficiënt die liggen tussen $-1 < \nu < 0.5$. Metalen zitten rond de 0,3 terwijl beton een iets lagere waarde heeft rond de 0,2. Ga eens na wat het inhoudt indien de dwarskrachtcoëfficiënt negatief wordt?

4.3 Schuifspanningen versus afschuifvervorming

De constitutieve relatie die het verband legt tussen de schuifspanning en de afschuifvervorming wordt beschreven met:

$$\sigma_{xy} = G \times \gamma_{xy}$$

Hierin is G de afschuifmodulus en kan worden beschouwd als een materiaaleigenschap met de dimensie van een spanning. In figuur 4.4 is de afschuifvervorming nog eens weergegeven.



Figuur 4.4 : Schuifspanning en afschuifvervorming in 2D

Met de definitie voor de afschuifvervorming γ wordt deze constitutieve relatie:

$$\sigma_{xy} = G \times 2\epsilon_{xy}$$

$$\sigma_{yz} = G \times 2\epsilon_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = G \times 2\epsilon_{zx}$$

De inverse relatie wordt hiermee:

$$\epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{2G}$$

Als de “materiaaleigenschap” G bekend is, is de gevraagde relatie tussen schuifspanning en afschuifvervorming bekend. Het blijkt dat voor lineair elastische materialen de afschuifmodulus afhankelijk is van alleen de elasticiteitsmodulus E en de dwarscontractie-coëfficiënt ν :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Het bewijs hiervoor is opgenomen in APPENDIX 2.

4.4 Complete spanning-rek relatie in 3D

De complete spanning-rek relatie kan worden gevonden door de delen samen te voegen:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}$$

De inverse relatie is hiermee ook bekend:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{bmatrix}$$

Met een dwarskrachtcontractie coëfficiënt die ligt tussen $-1 < \nu < 0.5$.

4.5 Spanning-rek relatie voor vlakspanningstoestand

In het geval van een vlakspanningstoestand kan het gevonden resultaat worden gereduceerd tot:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) & \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) & \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{2G} & \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad \text{met : } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

In dit geval zijn alle spanningen op het z-vlak op nul gesteld vanwege het feit dat we te maken hebben met een vlakspanningstoestand in het x-y vlak..

In matrixnotatie is dit ook als volgt weer te geven:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

De hoofdrichtingen voor de spanningen of de rekken zijn te bepalen met de eerder afgeleide formules.

- Voor de hoofdspanningsrichting wordt zo gevonden:

$$\tan 2\alpha_{\text{spanning}} = \frac{\sigma_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} \quad (\text{i})$$

- Voor de hoofdrekrichting geldt:

$$\tan 2\alpha_{\text{rek}} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})} \quad (\text{ii})$$

Met de gevonden spanning-rek relatie kan de hoofdrekrichting worden uitgedrukt in de spanningen volgens:

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha_{\text{rek}} &= \frac{\frac{\sigma_{xy}}{2G}}{\frac{1}{2E}((1+\nu)\sigma_{xx} - (1+\nu)\sigma_{yy})} = \frac{1}{2G} \times \frac{E}{1+\nu} \times \frac{\sigma_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} = \\ &= \frac{2(1+\nu)}{2E} \times \frac{E}{1+\nu} \times \frac{\sigma_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} = \frac{\sigma_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})} = \tan 2\alpha_{\text{spanning}} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de expressies (i) en (ii) leiden tot dezelfde richtingen. Voor een lineair elastisch materiaal geldt daarom dat de hoofdrekrichting samenvalt met de hoofdspanningsrichting. Door deze eigenschap moet het richtingencentrum in de rekcirkel relatief gezien op dezelfde plek liggen als dat in de spanningscirkel.

Opdracht:

Controleer dit zelf aan de hand van een van de voorbeelden.

4.6 Spanning-rek relatie in de hoofdrichtingen

De spanning-rek relatie geldt voor iedere oriëntatie van het assenstelsel en dus ook voor de hoofdrichtingen. Aannemende dat de x -as samenvalt met de hoofdrichting (1) en de y -as samenvalt met hoofdrichting (2) geldt voor een vlakspanningssituatie voor de spanningstensor:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Merk op dat de schuifspanningen per definitie nul zijn op vlakken met de normaal in de hoofdrichtingen. Hiermee kunnen de eerder afgeleide spanning-rek relaties worden vereenvoudigd tot:

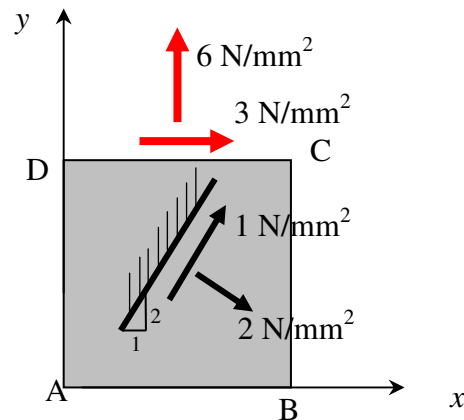
$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) & \sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) & \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \end{aligned}$$

5. Vraagstukken

5.1 Opgave 1

In figuur 5.1 is een homogene spanningstoestand gegeven van een proefstuk waarvan op twee vlakken de spanningen bekend zijn.

materiaalgegevens :
 $E = 2 \text{ GPa}$; $\nu = 0,5$



Figuur 5.1 : Opgave 1

Vragen:

- Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen en bepaal de spanningen op een x -vlakje en teken hoe deze spanningen op het vlakje daadwerkelijk werken.
- Teken de cirkel van Mohr voor de rekken en bereken de relatieve lengteverandering van AB. Bepaal ook de verandering van de rechte hoek DAB.

5.2 Opgave 2

Het proefstuk van figuur 5.2 wordt belast in een homogene vlakspanningstoestand ten gevolge van spanningen op de drie zijvlakken ABC. Van deze spanningen zijn alleen de twee schuifspanningen bekend op de vlakken AB en AC.

Daarnaast is als extra gegeven bekend dat de rek van vezels evenwijdig aan CD gelijk is aan $-1,5 \times 10^{-3}$.

materiaalgegevens :
 $E = 5 \text{ GPa}$; $\nu = 0,25$

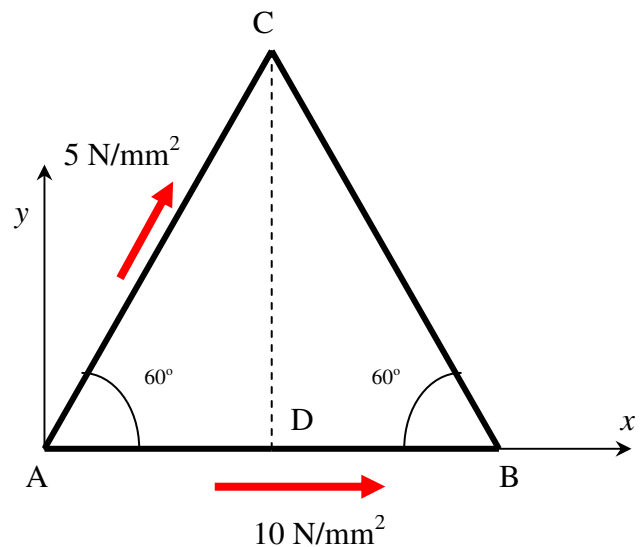


Figure 5.2 : Opgave 2

Vragen:

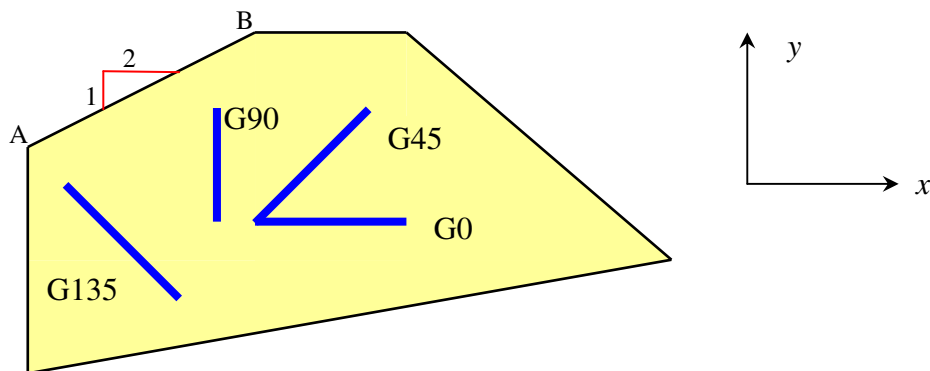
- Bepaal de spanningen op de x - en y -vlakken,
- Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen,
- Teken de cirkel van Mohr voor de rekken en controleer de gegeven rek voor vezels evenwijdig aan CD.

Hint :

Gebruik de spanning-rek relatie en het gegeven dat ADC een rechte hoek is.

5.3 Opgave 3

Een proefstuk verkeert in een homogene spanningstoestand. De rekken in een aantal specifieke richtingen kunnen worden bepaald met rekopnemers d.m.v. rekstroken die op het materiaal zijn aangebracht. De richtingen van de rekstroken worden aangeduid met G0, G45, G90 en G135. De getallen geven de hoek aan van de rekstrook met de aangegeven x -as in figuur 5.3.



Figuur 5.3 : Proefstuk met aangebrachte rekstroken

Tijdens de metingen blijkt het aflezen van G45 niet mogelijk i.v.m. kortsluiting in het circuit. Er zijn alleen maar meetresultaten van de overige rekstroken:

$$G0 = -4.0 \times 10^{-4}$$

$$G45 = ??$$

$$G90 = 6.0 \times 10^{-4}$$

$$G135 = 5.0 \times 10^{-4}$$

Uit een materiaalanalyse is verder bekend:

$$E = 37500 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.25$$

$$f_y = 35 \text{ N/mm}^2$$

Vragen:

- Bepaal de spanningstensor voor deze spanningsituatie in het gegeven assenstelsel en bepaal de hoofdspanningen en de hoofdrichtingen.
- Laat zien met de cirkel van Mohr voor de spanningen en rekken dat de resultaten consistent zijn met de gepresenteerde theorie.
- Bepaal de afschuifvervorming in het proefstuk.

Extra vraag na het lezen van hoofdstuk 6:

- Bepaal de veiligheidsfactor voor deze spanningstoestand op basis van het von Mises criterium.

ANTWOORDEN

- Opgave 1: spanning : $\sigma_{xx} = 4 \text{ N/mm}^2$;
 hoofdspanningen : $\sigma_1 = (5 + \sqrt{10}) = 8,16 \text{ N/mm}^2$;
 $\sigma_2 = (5 - \sqrt{10}) = 1,84 \text{ N/mm}^2$
 $\varepsilon_1 = 3,62 \times 10^{-3}$
 $\varepsilon_2 = -1,12 \times 10^{-3}$
 afschuifvervorming : $\gamma = 4,5 \times 10^{-3}$
- Opgave 2: spanningen : $\sigma_{xx} = -10 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_{xy} = -10 \text{ N/mm}^2$;
 $\sigma_{yy} = -10 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_1 = 0 \text{ N/mm}^2$;
 $\sigma_2 = -20 \text{ N/mm}^2$
 $\varepsilon_1 = +1 \times 10^{-3}$
 $\varepsilon_2 = -4 \times 10^{-3}$
- Opgave 3: spanningstensor : $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -10 & -12 \\ -12 & 20 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$
 $\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} = -8,0 \times 10^{-4}$
 $\sigma_1 = 24,21 \text{ N/mm}^2$;
 $\sigma_2 = -14,21 \text{ N/mm}^2$
 $\gamma^2 \times \frac{1}{6} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} - \frac{1}{3} f_y^2 \leq 0$
 $\gamma = 1,04$

6. Bezijken

Met de definitie van spanningen en rekken en de relatie tussen spanningen en rekken kan gezocht worden naar een bezwijkmodel van een lineair elastisch materiaal. Aangezien iedere reksituatie vertaald kan worden naar een spanningssituatie is de spanningssituatie het vertrekpunt in dit hoofdstuk voor het zoeken naar een criterium waarmee bezijken kan worden gemodelleerd. Er wordt gezocht naar een model waarmee een grens voor de spanningen in het materiaal kan worden bepaald, dit noemen we een *materiaalmodel*. De meeste modellen zijn gebaseerd op plasticiteit waarbij de vervormingen in het materiaal zo groot worden dat het materiaal plastisch gaat vervormen. Er bestaan ook modellen waarbij viscositeit wordt meegenomen, deze zgn. visco-plastische modellen worden in dit hoofdstuk niet beschreven. Ter introductie van materiaalmodellen beperken we ons in dit hoofdstuk tot twee modellen, von Mises en Tresca.

Belangrijke grondslag voor deze modellen is de eenduidige beschrijving van de spanningstoestand. Het zal duidelijk zijn uit de voorgaande hoofdstukken dat een beschrijving van de spanningstoestand in de hoofdspanningsruimte hiervoor bij uitstek geschikt is. Iedere spanningstensor zal daarom eerst getransformeerd moeten worden naar de hoofdspanningstensor waarna deze wordt getoetst met het materiaalmodel. De definitie van een bezwijkmodel kan vervolgens worden beschreven met:

Iedere combinatie van hoofdspanningen die een zekere grenswaarde overschrijdt leidt tot bezijken.

De *grenswaarde* kan daarin worden voorgesteld als een functie, een *vloeicriterium*. Als een spanningstoestand de vloeifunctie bereikt kan het materiaal niet meer belasting op dit punt voor zijn rekening nemen, naburige delen zullen additionele belasting moeten opnemen en zo kan de belasting worden gespreid waardoor de constructie nog niet hoeft te bezijken. Dit proces kan zich verder voortzetten en pas nadat op voldoende plaatsen in de constructie de maximale capaciteit is bereikt, zal bezijken van de constructie optreden. Hiervoor is een *constructiemodel* nodig. Bij de toepassing van de bezwijkmodellen is het dus erg belangrijk om het onderscheid te maken tussen het bezijken van het *materiaal* en het bezijken van de *constructie*. In dit hoofdstuk zal alleen ingegaan worden op het materiaalgedrag. Bij het onderwerp “plasticiteit en bezijken” zal ingegaan worden op het constructiemodel voor het beschrijven van het bezijken van de gehele constructie.

6.1 Hoofdspanningsruimte

Iedere 3D spanningstensor in het x - y - z -assenstelsel :

$$\sigma_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Kan worden beschreven als een tensor in de hoofdspanningsruimte, 1-2-3-assenstelsel door middel van een transformatie:

$$\sigma_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

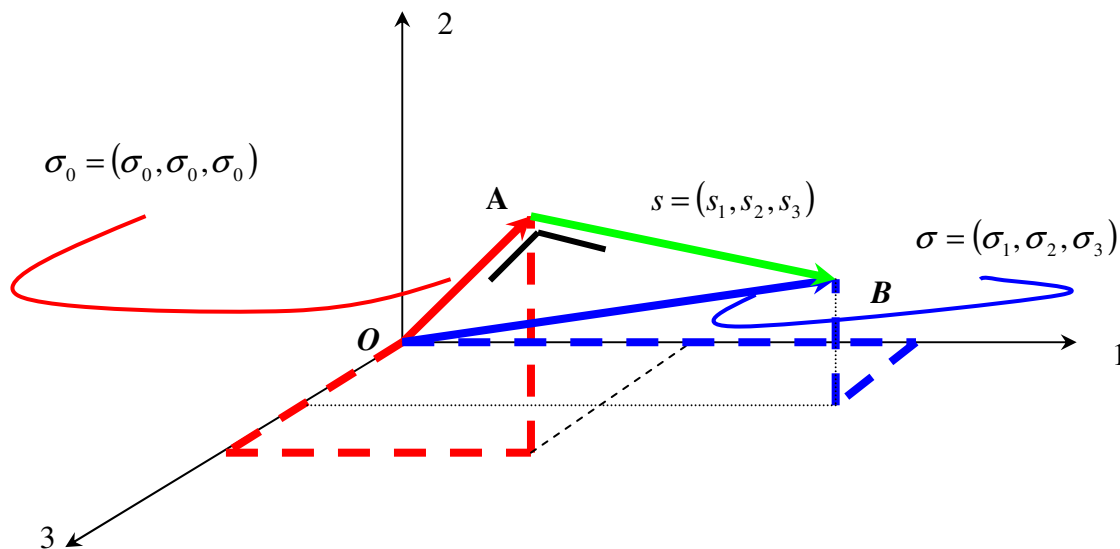
De standaard formules van paragraaf 2.3.1 kunnen worden gebruikt voor deze transformatie. De hoofdspanningstensor kan vervolgens worden gesplitst in een isotroop en een deviator deel (zie 1.1.2) met:

$$\sigma_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_o \end{bmatrix} \quad \text{met: } \sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

De isotrope spanning is gerelateerd aan spannings-invariant I_1 zoals in paragraaf 2.3.1 is beschreven. De deviatorspanning in de 1-2-3-ruimte kan worden beschreven met:

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_o \\ \sigma_2 - \sigma_o \\ \sigma_3 - \sigma_o \end{bmatrix}$$

De decompositie van de hoofdspanningstensor in een isotrope spanning en een deviatorspanning is in figuur 6.1. grafisch voorgesteld.



Figuur 6.1 : Isotrope- en deviatorspanning in de hoofdspanningsruimte

De drie hoofdspanningscomponenten kunnen worden voorgesteld door middel van de optelling van de isotrope spanning en de deviatorspanning. Met een eenvoudig inproduct kan worden aangetoond dat de deviatorspanning loodrecht staat op de isotrope spanning:

$$\begin{aligned} \sigma_o \cdot s &= \begin{bmatrix} \sigma_o \\ \sigma_o \\ \sigma_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_o \\ \sigma_2 - \sigma_o \\ \sigma_3 - \sigma_o \end{bmatrix} = \sigma_o \sigma_1 - \sigma_o^2 + \sigma_o \sigma_2 - \sigma_o^2 + \sigma_o \sigma_3 - \sigma_o^2 = \\ &= \sigma_o \times (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 3\sigma_o^2 = \sigma_o \times 3\sigma_o - 3\sigma_o^2 = 0 \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat de hoek tussen beide vectoren 90 graden moet zijn waarmee is aangetoond dat de vectoren loodrecht op elkaar staan. De lengten van de vectoren kunnen eenvoudig uit figuur 6.1 worden gevonden met:

$$|OB|^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

$$|OA|^2 = 3\sigma_0^2$$

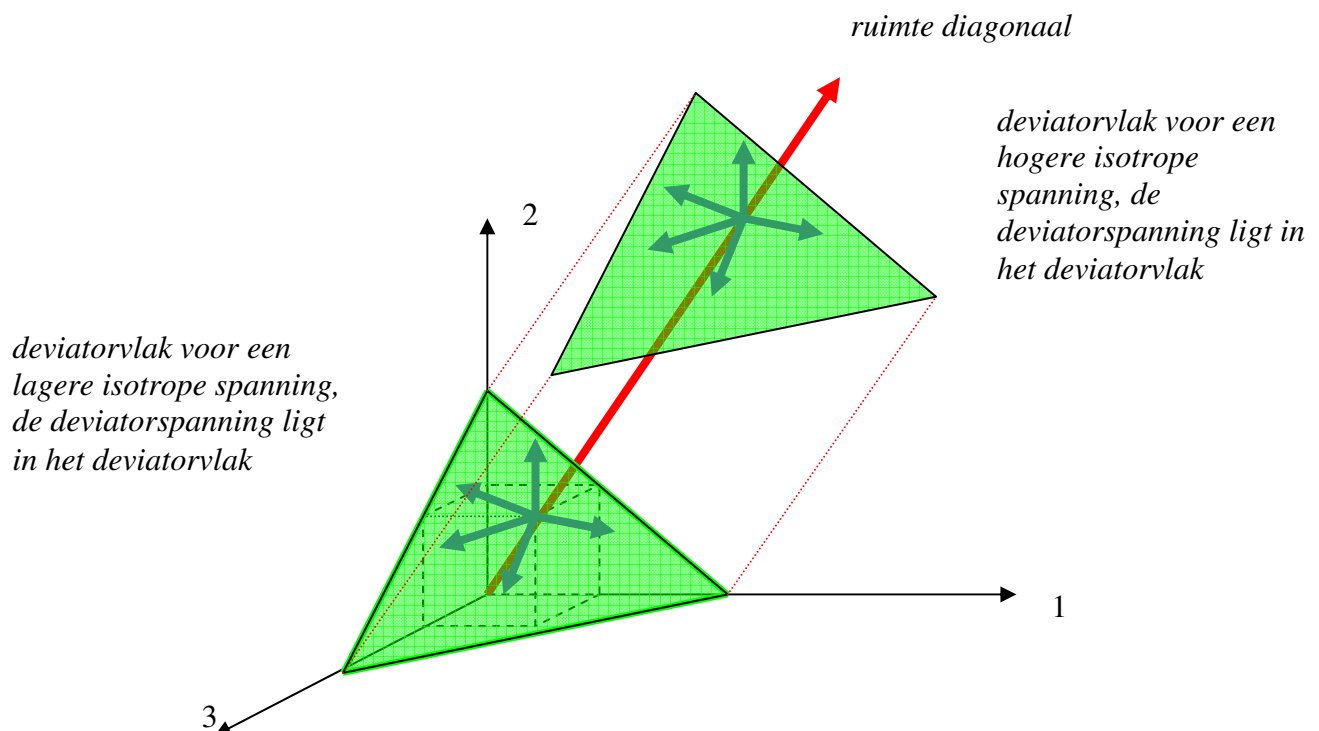
dus:

$$|AB|^2 = |OB|^2 - |OA|^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 3\sigma_0^2$$

Dit resultaat zal verderop gebruikt worden bij het vinden van een vloeicriterium.

6.2 Von Mises failure model

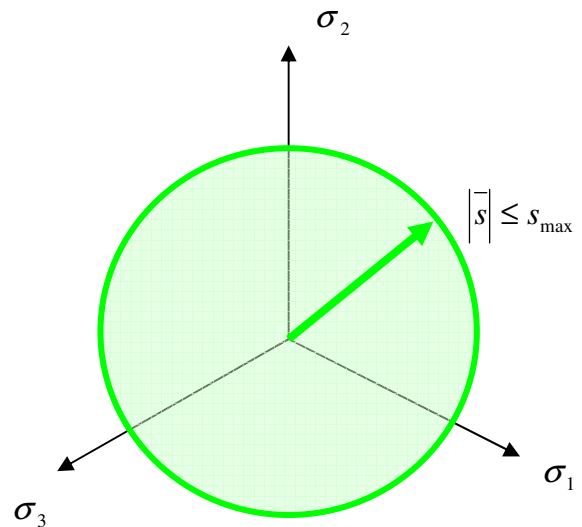
Von Mises postuleert dat bezwijken optreedt, indien de deviatorspanning een grenswaarde overschrijdt. Deze aanname is gebaseerd op waarnemingen waarbij gebleken is dat proefstukken onafhankelijk van de isotrope spanning bezwijken bij spanningssituaties met vergelijkbare deviatorspanning. Met name metalen vertonen dit gedrag. Illustratief is een massief kogeltje op grote diepte in de oceaan dat niet zal bezwijken onder de alzijdige druk maar wel heel eenvoudig bezwijkt in een bankschroef. Voor ingenieurstoepassingen nam von Mises daarom aan dat een materiaalmodel onafhankelijk moest zijn van de isotrope spanning. Bezwijken is daarmee het gevolg van louter en alleen de gedaanteverandering ten gevolge van de deviatorspanning. Bij gelijke isotrope spanning σ_0 zal conform figuur 6.1 de deviatorspanning in een vlak loodrecht op de ruimtediagonaal liggen. Dit vlak wordt het *deviatorvlak* of ook wel π -vlak genoemd. Een grafische weergave van dit uitgangspunt is in figuur 6.2. weergegeven.



Figuur 6.2 : Bezwijken bij overschrijding van de grenswaarde voor de deviatorspanning

Iedere spanningssituatie met een isotrope spanning σ_0 levert een punt op in een deviatorvlak op afstand $\sigma_0\sqrt{3}$ van de oorsprong, loodrecht op de ruimtediagonaal. Bij variatie van de spanningssituatie voor gelijkblijvende isotrope spanning, zal het spanningspunt in dit deviatorvlak moeten liggen.

De grootte van de deviatorspanning is begrensd, het materiaal bezwijkt immers op een te hoge deviatorspanning. Deze grens kan visueel worden weergegeven als een cirkel in het deviatorvlak. Vanuit de ruimte diagonaal richting de oorsprong levert dit een cirkel op in de 1-2-3-ruimte die is weergegeven in figuur 6.3.



Figuur 6.3 : Von Mises criterium

Een eenvoudig bezwijkcriterium kan nu worden opgesteld door de lengte van de deviatorspanning te begrenzen:

$$|\bar{s}| \leq s_{\max}$$

Dit criterium staat bekend als het bezwijkcriterium van von Mises.

Een uitdrukking voor de lengte van de deviatorspanning was eerder in paragraaf 6.1 al gevonden:

$$|\bar{s}| = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 3\sigma_0^2}$$

Deze lengte is volgens von Mises begrensd:

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 3\sigma_0^2 \leq s_{\max}^2$$

Deze uitdrukking kan volledig worden herschreven in hoofdspansingen:

$$\begin{aligned} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 3 \times \left[\frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 &\leq s_{\max}^2 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{1}{3} [2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1] &\leq s_{\max}^2 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] &\leq s_{\max}^2 \end{aligned}$$

De uiteindelijke vergelijking in hoofdspansingen is de vergelijking van von Mises:

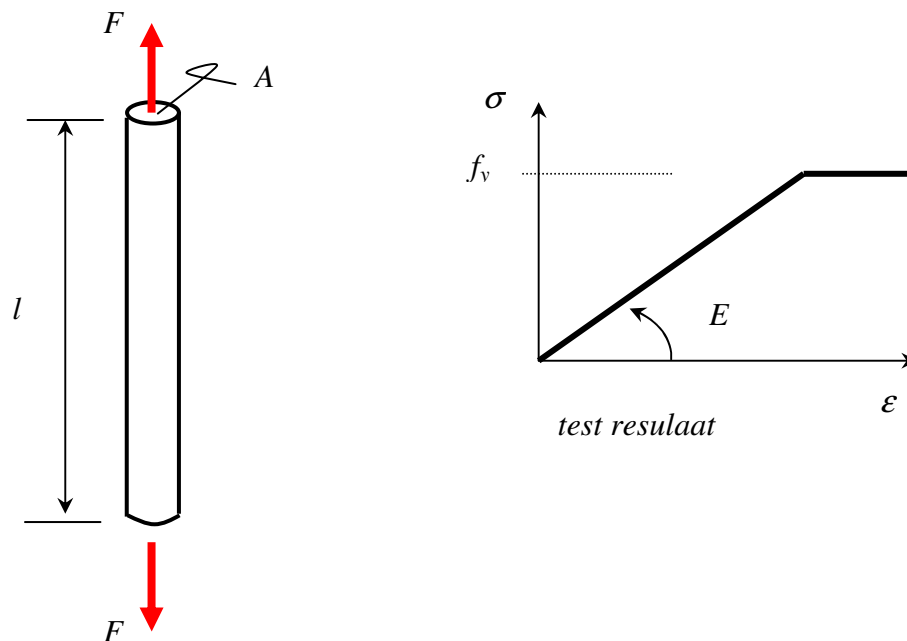
$$\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq s_{\max}^2 \quad (\text{von Mises criterium})$$

De constante $s_{\max}$ is een materiaalparameter die moet worden bepaald met behulp van experimenten. Het ligt voor de hand dat deze parameter iets te maken zal hebben met de vloeispanning van het materiaal. Dit model is een zogenaamd “1-parameter model”.

Op het gebied van materiaalmodellen wordt veel onderzoek verricht en moderne materiaalmodellen bestaan veelal uit veel meer parameters maar de grondslag van deze modellen voert terug op de hier beschreven aanpak. Dit voorbeeld laat tevens zien dat experimenteel onderzoek moet worden gecombineerd met numeriek onderzoek teneinde betere voorspellingen te kunnen opstellen voor bezwijkgedrag van materialen en uiteindelijk constructies.

6.2.1 Von Mises vloeicriterium gebaseerd op een éénassige trekproef

De parameter $s_{\max}$ in het von Mises criterium kan met een eenvoudige trekproef worden bepaald.



Figuur 6.4 : één-assige trekproef

De uitgeoefende kracht veroorzaakt een normaalspanning σ in de doorsnede. Deze spanning neemt toe totdat de elastische grens f_y wordt bereikt. Deze spanning wordt de vloeispanning genoemd en geeft het einde aan van het elastische traject in het spannings-rek diagram. De overige spanningen op het materiaal zijn nul. De hoofdspanningtensor is daarmee:

$$\sigma_1 = f_y; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = 0;$$

Met het resultaat van dit “experiment” kan vervolgens de parameter $s_{\max}$ in het von Mises criterium worden bepaald volgens:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] &\leq s_{\max}^2 \\ \frac{1}{3} [(f_y)^2 + (f_y)^2] &= s_{\max}^2 \quad \Leftrightarrow \\ s_{\max}^2 &= \frac{2}{3} f_y^2 \end{aligned}$$

Het resultaat van de parameter wordt vervolgens in het criterium gesubstitueerd en levert:

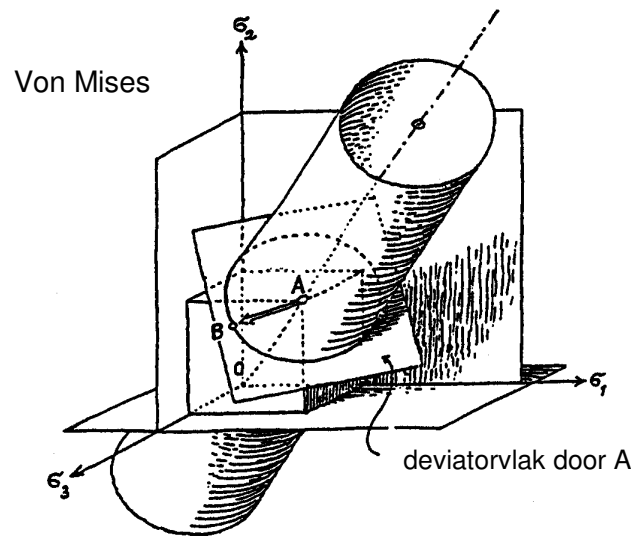
$$\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{2}{3} f_y^2$$

In de gangbare literatuur wordt deze versie van het von Mises criterium meestal iets anders gepresenteerd:

$$\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{1}{3} f_y^2$$

Voor de oorsprong van deze weergave wordt verwezen naar bijlage 7.3.

Het von Mises criterium kan in de 1-2-3-ruimte worden weergegeven als een buis met de ruimte-diagonaal als as zoals is afgebeeld in figuur 6.5



Figuur 6.5 : Von Mises criterium in de hoofdspanningsruimte

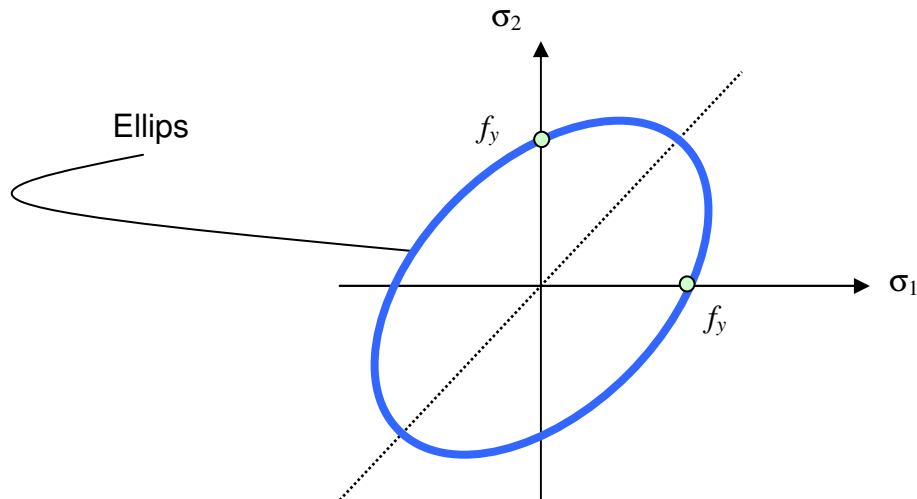
Uit deze figuur kan worden opgemaakt dat zolang een hoofdspanningstensor (spanningspunt) binnen de buis ligt, er geen sprake is van bezwijken. Duidelijk wordt ook dat de grootte van de isotrope spanning er niet toe doet, de diameter van de buis blijft immers constant. Dat is zelfs het geval voor zowel positieve als negatieve waarden voor de isotrope spanning. Als we dit even op ons laten inwerken dan is eenvoudig te begrijpen dat als de isotrope spanning wel een invloed heeft op het bezwijken, er gedacht zou kunnen worden aan modellen waarbij de buis geen constante diameter heeft. Er ontstaat dan iets conisch, of te wel een trechter. Dergelijke modellen zouden interessant kunnen zijn voor materialen die sterk afwijkend gedrag hebben voor positieve en negatieve isotrope spanningen, denk daarbij aan beton of grond.

Het hier gepresenteerde model met constant diameter is goed geschikt voor ductiele materialen zoals metalen en vormt de grondslag voor de materiaalmodellen die gebruikt worden bij staal- en aluminiumconstructies.

In appendix 7.3 is een alternatieve afleiding gegeven voor het von Mises criterium gebaseerd op een arbeid en energiebeschouwing. Deze afleiding is de gebruikelijke afleiding voor het criterium maar de sterk visueel georiënteerde afleiding uit dit hoofdstuk verdient onze educatieve voorkeur als eerste kennismaking met deze materie.

6.2.2 Von Mises criterium voor een vlakspanningstoestand

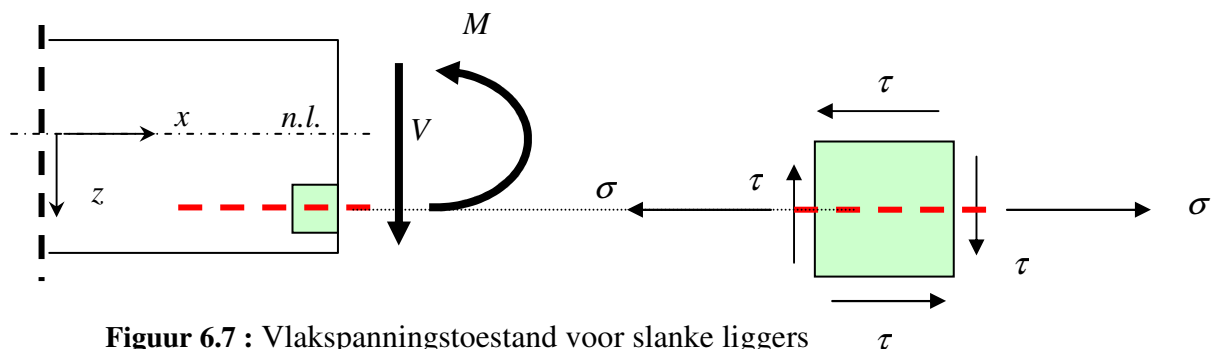
Het von Mises criterium kan worden toegepast voor een vlakspanningstoestand. Voor een vlakspanningstoestand moet gelden dat één van de hoofdspansingen gelijk is aan nul. Uit figuur 6.5 valt op te maken dat het doorsnijdingsvlak met een van de 1-2, 2-3 of 3-1 vlakken resulteert in een ellips zoals is weergegeven in figuur 6.6 voor een doorsnijding met het 1-2-vlak.



Figuur 6.6 : Von Mises criterium voor een vlakspanningstoestand

6.2.3 Von Mises criterium voor liggers

In paragraaf 1.1.1 is de spanningstoestand voor slanke liggers al toegelicht waarvoor gebruik wordt gemaakt van het zogenaamde vezelmodel. Het betreft hier een bijzondere vlakspanningstoestand. In figuur 6.7 is deze spanningstoestand nogmaals geschetst.



Figuur 6.7 : Vlakspanningstoestand voor slanke liggers

Op een bepaalde afstand z vanaf de neutral lijn worden de spanningen op een klein stukje materiaal nader bekeken. Dit kleine stukje materiaal wordt als een homogene vlakspanning beschouwd. Met de eerder afgeleide transformatieformules kunnen de hoofdspansingen voor deze spanningstoestand worden uitgedrukt in de normaalspanning σ en de schuifspanning τ :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_3 = 0$$

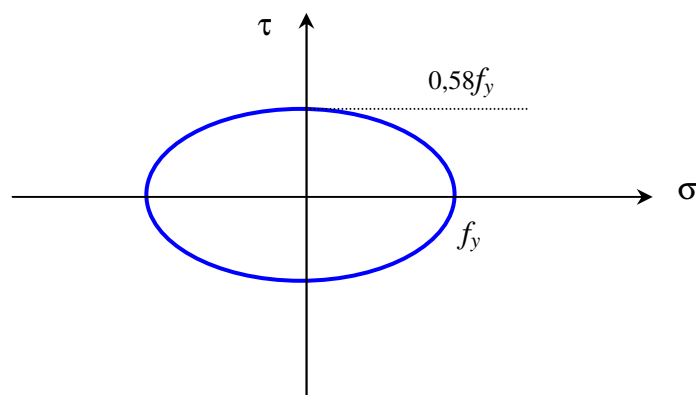
Het von Mises criterium kan nu worden toegepast:

$$\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{1}{3} f_y^2$$

Door de uitdrukking voor de hoofdspansingen in te vullen ontstaat het von Mises yield criterion voor liggers uitgedrukt in de normaalspanning σ en de schuifspanning τ :

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq f_y$$

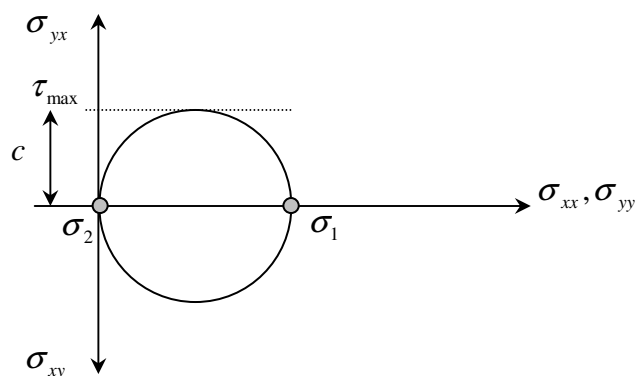
Deze formule staat in deze vorm ook bekend als het Huber-Hencky vloeicriterium. In feite is het echter een bijzondere toepassing van het von Mises criterium. De presentatie met de normaalspanning en de schuifspanning op de assen is in figuur 6.8 afgebeeld. Uit de figuur valt op te maken dat de maximale schuifspanning in slanke liggers op 58% van de vloeigrens f_y zit.



Figuur 6.8 : Huber-Hencky vloeicriterium

6.3 Tresca's bezwijkcriterium

Tresca veronderstelde dat bezwijken wordt veroorzaakt door het overschrijden van de maximale schuifsterkte c in een materiaal. Voor een één-assige spanningstoestand (twee hoofdspansingen gelijk aan nul) kan dit inzichtelijk worden gemaakt met behulp van een cirkel van Mohr zoals in figuur 6.9 is weergegeven. De maximale schuifspanning is gelijk in dit geval aan de straal van de cirkel.



Figuur 6.9 : Cirkel van Mohr voor een één-assige spanningstoestand

De enige hoofdspansing die ongelijk is aan nul zal gelijk zijn aan de opgelegde vloeispanning. Indien de vloeispanning wordt aangeduidt met f_y , dan is de maximum schuifspanning en daarmee de parameter c in het criterium van Tresca bepaald met:

$$c = \frac{1}{2} f_y$$

Een vlakspanningstoestand levert voor de cirkel van Mohr dat in het 1-2-vlak:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2c$$

Opschalen naar een ruimtelijke spanningstoestand levert dat iedere mogelijke cirkel is begrensd:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2c$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| \leq 2c$$

(zes vlakken in de 1-2-3-ruimte)

$$|\sigma_3 - \sigma_1| \leq 2c$$

In figuur 6.10 wordt de begrenzing van deze vlakken voor de 1-2, 2-3, en 1-3 cirkel toegelicht.

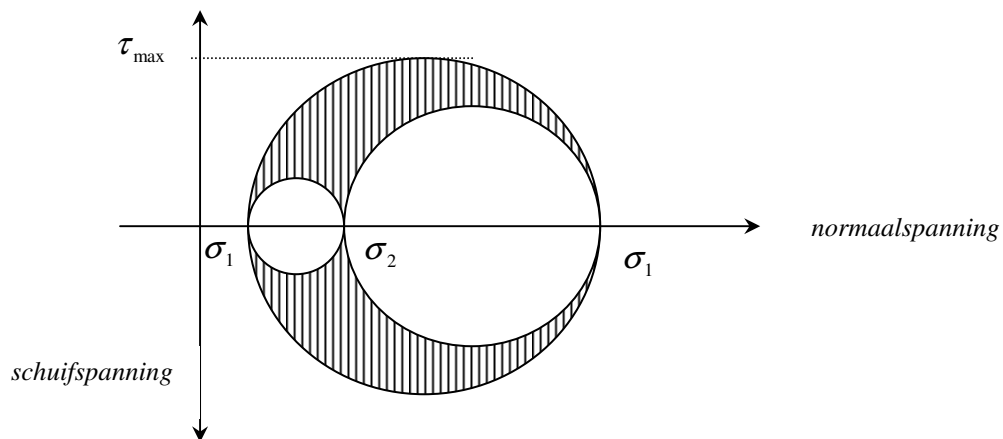
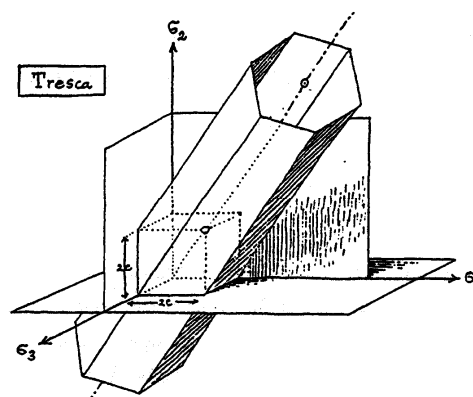


Figure 6.10 : Tresca's circles

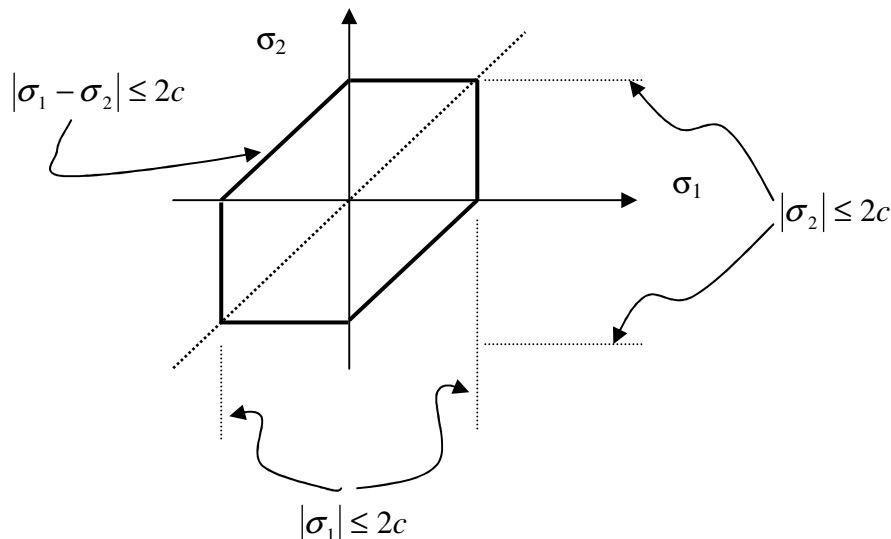
In deze voorstelling zijn alle hoofdspansingen ongelijk aan nul. Tresca's criterium stelt nu dat de grootste cirkel maatgevend zal zijn want de grootste schuifspanning die deze cirkel oplevert zal de maximale schuifspanning zijn in het materiaal en deze is bepalend. In de 1-2-3 hoofdruimte levert het criterium van Tresca een hexagon op zoals in figuur 6.11 is weergegeven.



Figuur 6.11 : Tresca's hexagon in de 1-2-3 hoofdspansingsruimte

6.3.1 Tresca voor een vlakspanningstoestand

Uit figuur 6.11 kan worden opgemaakt dat ook het criterium van Tresca ongevoelig is voor de grootte van de isotrope spanning. De hexagon verandert immers niet langs de ruimtediagonaal. Alle spanningscombinaties die binnen de hexagon vallen zullen daarom niet leiden tot bezwijken. Voor een vlakspanningstoestand kan in de hoofdspanningruimte van de vlakspanning gekeken worden naar het vloeicriterium zoals dat eerder ook is gedaan voor het von Mises criterium. Een voorbeeld van Tresca met de doorsnijding van het 1-2 –vlak is in figuur 6.12 gegeven.



Figuur 6.12 : Tresca's criterium in het 1-2 hoofdspanningvlak

De zes grenslijnen uit de algemene formulering kunnen in deze figuur worden herkend aangezien de derde hoofdspanning gelijk moet zijn aan nul (vlakspanningstoestand).

6.3.2 Tresca voor slanke liggers

Ook voor Tresca kan net als bij het von Mises criterium gekeken worden naar een uitdrukking van het criterium in termen van de normaalspanning en schuifspanning :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_3 = 0$$

ingevuld in Tresca :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2c$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| \leq 2c$$

$$|\sigma_3 - \sigma_1| \leq 2c$$

levert :

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq f_y$$

Deze formule levert een grensfunctie voor de combinatie van een normaal spanning en een schuifspanning. In figuur 6.13 is deze functie afgebeeld.

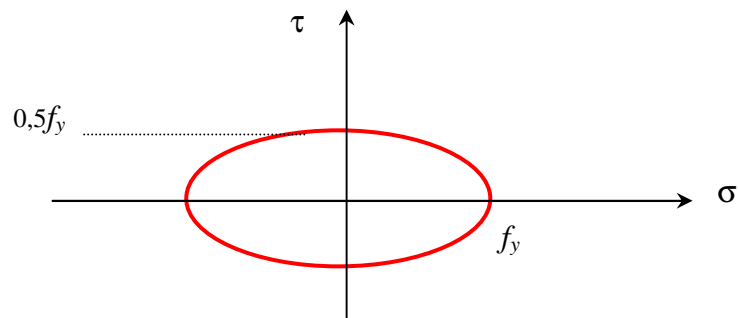


Figure 6.13 : Tresca's criterion for beams in terms of σ and τ .

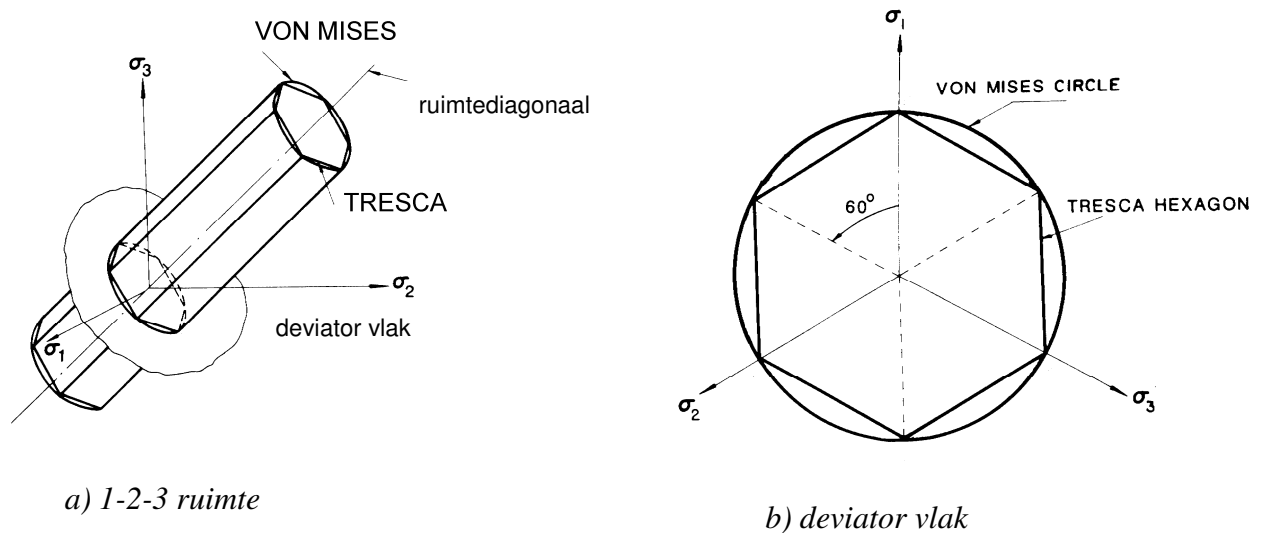
De gelijkenis met von Mises is groot, ondanks de hexagon in 3D ontstaat voor een vlakspanning in een slanke ligger, een vloeiende functie die slecht een geringe afwijking vertoont met het criterium van von Mises. Volgens Tresca is de maximale schuifspanning begrensd met:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{1}{4}} f_y = 0.5 f_y$$

Dit is geen opmerkelijk resultaat want dat kwam ook al naar voren in figuur 6.9.

6.4 Von Mises versus Tresca

De twee gepresenteerde modellen starten met verschillende aannamen. Von Mises is gebaseerd op bezwijken door een te grote deviatorspanning, Tresca hanteert een maximum schuifspanningscriterium. Het von Mises model resulteert in alle presentaties in een continue functie waarmee de vloeicontour kan worden beschreven. Bij Tresca ontstaat een Hexagon en is een beschrijving met zes afzonderlijke vlakken noodzakelijk. Als de modellen in de ruimtelijke spanningstoestand worden vergeleken ontstaat figuur 6.14:



Figuur 6.14 : Von Mises versus Tresca, ruimtelijke spanningstoestand

Ook voor een vlakspanningstoestand kunnen de modellen worden vergeleken. In figuur 6.15 zijn zowel de normale vlakspanning in b.v. het 1-2-vlak als de bijzondere vlakspanningstoestand voor een slanke ligger afgebeeld.

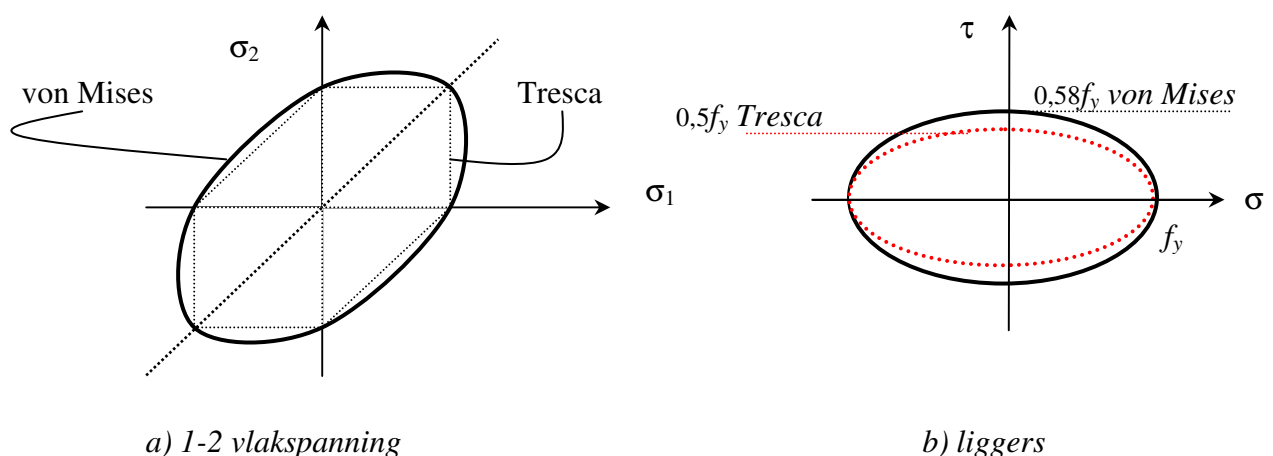


Figure 6.15 : Von Mises versus Tresca, vlakspanningstoestand

Tresca's model past precies binnen het model van von Mises. Dat dit ook anders kan bewijst appendix 7.4 maar het feit blijft dat de verschillen gering zijn. Von Mises komt iets beter overeen voor metalen en dit model is ook eenvoudiger in computercode te implementeren waardoor dit een veelgebruikt model is, von Mises controles zitten in bijna alle programma's.

6.4.1 Voorbeeld

Van een gegeven spanningstensor is bekend:

$$\sigma_{xyz} = \begin{bmatrix} 25 & 50 & 0 \\ 50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Het materiaal heeft een vloeispanning $f_y = 250 \text{ N/mm}^2$.

Vraag : Bepaal de veiligheid voor de spanningstoestand volgens het criterium van von Mises en volgens Tresca.
U mag aannemen dat alle spanningscomponenten proportioneel veranderen bij verhogen of verlagen van de spanning.

Antwoord : Beide modellen gebruiken de hoofdspanning als vertrekpunt:

$$\sigma_3 = -50 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_2 = 0 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_1 = 125 \text{ N/mm}^2$$

Volgens Tresca moet gelden:

$$\gamma \times |\sigma_1 - \sigma_2| \leq 250 \quad \gamma \times 125 \leq 250 \Rightarrow \gamma = 2,0$$

$$\gamma \times |\sigma_2 - \sigma_3| \leq 250 \quad \gamma \times 50 \leq 250 \Rightarrow \gamma = 5,0$$

$$\gamma \times |\sigma_3 - \sigma_1| \leq 250 \quad \gamma \times 175 \leq 250 \Rightarrow \gamma = 1,43 \quad \boxed{\text{laagste veiligheid}}$$

Volgens von Mises moet gelden:

$$\gamma^2 \times \frac{1}{6} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} - \frac{1}{3} f_y^2 \leq 0$$

$$\frac{\gamma^2}{6} \{ 125^2 + 50^2 + 175^2 \} \leq \frac{250^2}{3} \Rightarrow \gamma = 1,60$$

Opmerking:

Het von Mises criterium is een kwadratisch criterium voor de spanningen:

$$\frac{1}{6} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \leq \frac{1}{3} f_y^2$$

Als de spanningen proportioneel veranderen geldt:

$$\gamma \sigma_1$$

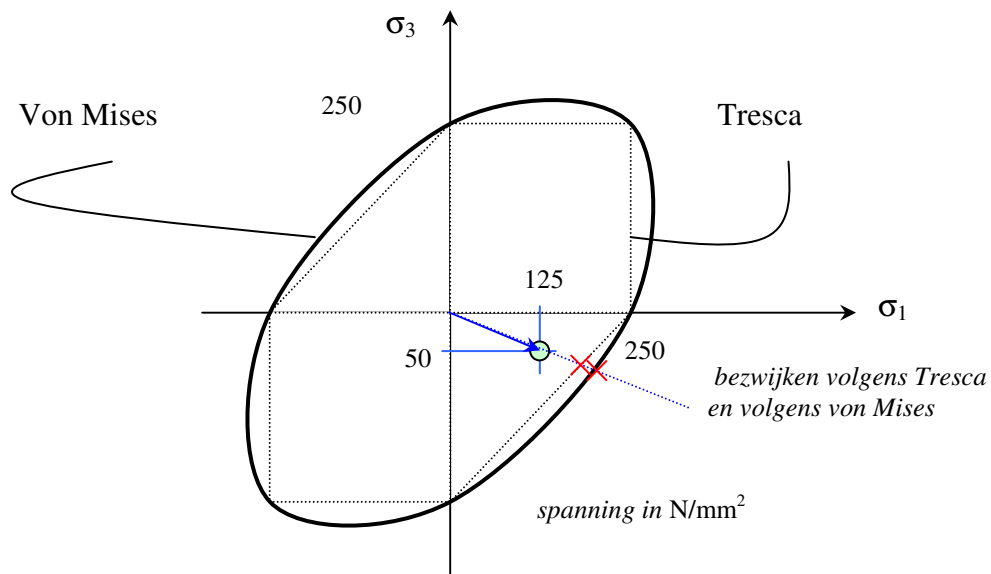
$$\gamma \sigma_2$$

$$\gamma \sigma_3$$

De finale toets levert dan:

$$\gamma^2 \times \frac{1}{6} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \leq \frac{1}{3} f_y^2$$

Dit resultaat kan ook worden gevonden door de spanningssituatie uit te zetten in het 1-3-vlak samen met de vloeicontouren voor Tresca en von Mises zoals in figuur 6.16 is gedaan.



Figuur 6.16 : Interpretatie van gevonden resultaat

De interpretatie van de gevonden veiligheid kan nu op een visuele wijze worden herkend in de ratio van de afstand van de oorsprong tot de vloeicontour en de lengte van de gegeven spanningsvector (125, -50) in het 1-3-vlak. Uit figuur 6.16 wordt ook direct duidelijk waarom de gevonden veiligheid volgens von Mises in dit geval groter is dan volgens Tresca.

Opdracht:

Beantwoord nu de laatste deelvraag van opdracht 5.3.

7. APPENDIX

7.1 Rekformulering

Bepaal de Taylorreeksontwikkeling voor de rek: $\epsilon_{xx} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2} - 1$.

Start door een generieke expressie te substitueren:

$$f(x, y) = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} = \sqrt{1+2x+x^2+y^2}$$

Voor het bepalen van de reeksontwikkeling zijn de partiële afgeleiden nodig:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 \times (2+2x)}{2\sqrt{1+2x+x^2+y^2}} = \frac{1+x}{\sqrt{1+2x+x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1 \times (2y)}{2\sqrt{1+2x+x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+2x+x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1 \times \sqrt{1+2x+x^2+y^2} - \frac{(1+x) \times (2+2x)}{2\sqrt{1+2x+x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{1+2x+x^2+y^2}\right)^2} = \frac{y^2}{(1+2x+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1 \times \sqrt{1+2x+x^2+y^2} - \frac{y \times (2y)}{2\sqrt{1+2x+x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{1+2x+x^2+y^2}\right)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+2x+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{0 - \frac{(1+x) \times (2y)}{2\sqrt{1+2x+x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{1+2x+x^2+y^2}\right)^2} = -\frac{y+xy}{(1+2x+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

De startwaarden van deze afgeleiden in het steunpunt (oorsprong 0,0) zijn:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 1; \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0;$$

De Taylorreeks benadering voor een kleine afstand x, y vanaf de oorsprong wordt hiermee:

$$T(x, y) = f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} y^2 \right) \Rightarrow$$

$$T(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2} y^2$$

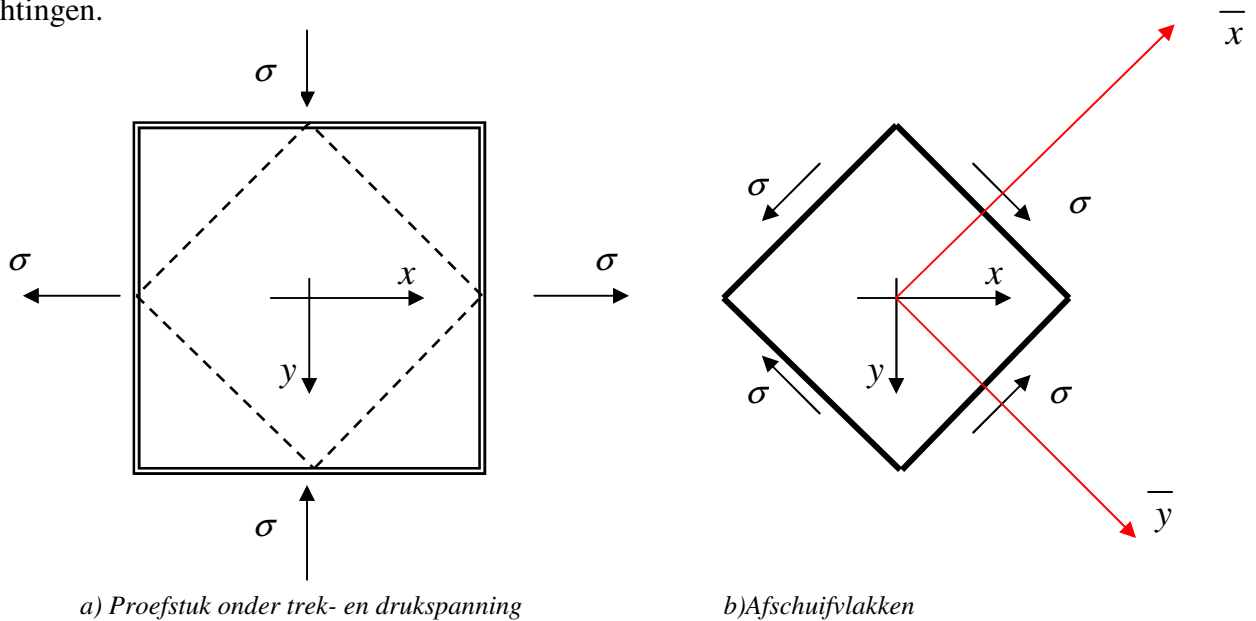
De uiteindelijke Taylor benadering voor de rekdefinitie is hiermee bepaald op:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2$$

7.2 Afschuifmodulus G

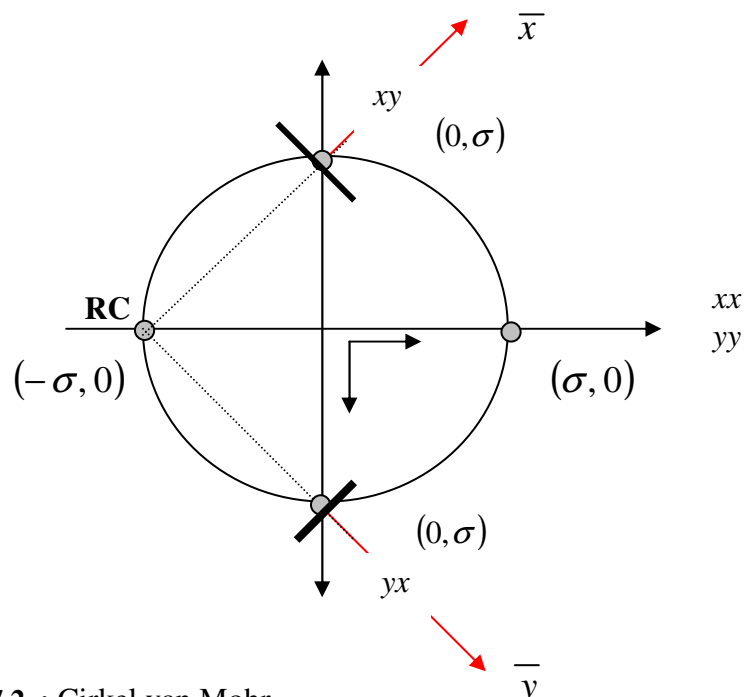
De afschuifmodulus G voor een lineair elastisch materiaal is alleen afhankelijk van de elasticiteitsmodulus E en de dwarscontractie coëfficiënt of constante van Poisson ν .

Deze afhankelijkheid wordt onderzocht door in een vlakspanningstoestand met twee afzonderlijke coördinaatstelsels dezelfde spanningssituatie te bekijken. In figuur 7.1a is een proefstuk gegeven met alleen de aangegeven normaalspanningen op de buitenvlakken in x - en y -richtingen.



Figuur 7.1 : Vlakspanningstoestand met alleen normaalspanningen

Voor vlakken onder 45° kan met behulp van de cirkel van Mohr aangetoond worden dat er een zuivere afschuifsituatie ontstaat zoals wordt toegelicht in figuur 7.1b en figuur 7.2.



Figuur 7.2. : Cirkel van Mohr

De rekken in het x - y -assenstelsel kunnen worden gevonden met de spannings-rekrelaties:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) = \frac{1+\nu}{E} \sigma \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = -\frac{1+\nu}{E} \sigma \\ \varepsilon_{xy} &= 0\end{aligned}$$

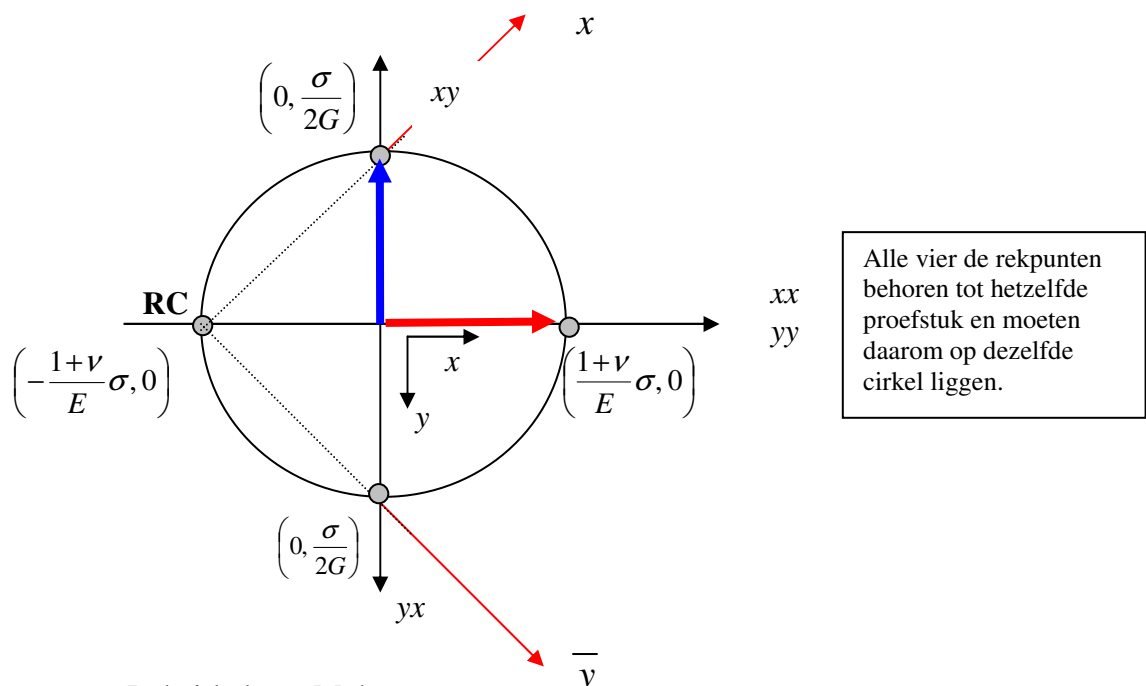
Met deze rekken kan een cirkel van Mohr voor de rekken worden getekend met twee punten op de horizontale as zoals is weergegeven in figuur 7.3. De afschuifvervorming in de rektensor voor het assenstelsel onder een hoek van 45° met de x -as, kan worden gevonden op basis van de constitutieve relatie voor de zuivere afschuifsituatie:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} = \frac{\sigma}{G} \quad \text{dus:} \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\sigma}{2G}$$

De (vezel)rekken in deze rektensor voor het assenstelsel onder 45° met de x -as, moeten nul zijn vanwege de afwezigheid van normaalspanningen op deze vlakken, zie ook figuur 7.1b en 7.2:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) = 0; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) = 0$$

Deze rekken leveren ook twee punten op in de rekcirkel, deze liggen op de verticale as zoals in figuur 7.3 is weergegeven.



Figuur 7.3 : Rekcirkel van Mohr

De eenduidige straal van de cirkel vereist dat geldt : $\frac{1+\nu}{E} \sigma = \frac{\sigma}{2G}$

Hieruit volgt de gevraagde relatie tussen E , G en ν .

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

7.3 Von Mises criterion based on deformation energy

The von Mises criterion can also be found in an alternative way. Von Mises stated that the amount of shape deformation energy for an alloy material is limited. He therefore claimed that not the volume change but the change of shape causes failure in a material. In this appendix the energy needed for the shape deformation will be investigated based on the earlier found stress strain relations.

7.3.1 Stains and stresses due to shape deformation

Any deformation can be split into two parts, a volume change and a change of shape. Most alloys can withstand a considerable change of volume before failure occurs. For normal engineering purposes we can therefore conclude that failure is independent of a change of volume. For a 2D situation an example of change in volume and change in shape is given in the graph below.

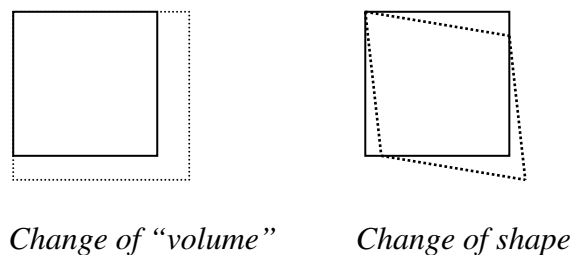


Figure 7.4 : Change in volume and shape

Change of volume is caused by the *isotropic* stress component or *hydrostatic* stress :

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

The change of shape or *distorsion* is caused by the *deviatoric* part of the stress tensor:

$$\begin{pmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ s_{xy} \\ s_{yz} \\ s_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 \\ \sigma_{yy} - \sigma_0 \\ \sigma_{zz} - \sigma_0 \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix}$$

The strains of fibres in x-, y- or z-directions can also be written as a part due to the deviatoric stress and a part due to the isotropic stress. For a fibre in x-direction holds:

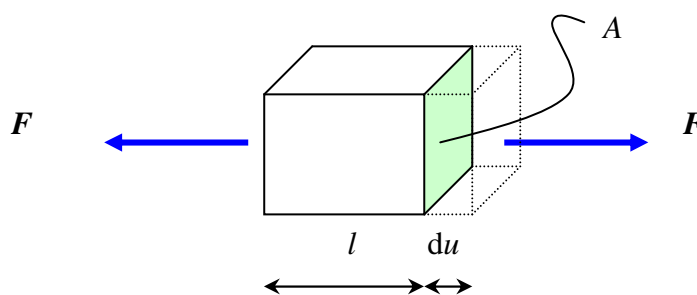
$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} + \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) = \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{E} = \boxed{\frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx}} - \frac{3\nu\sigma_0}{E} \\ &\text{deviatoric strain} \end{aligned}$$

The deviatoric strain tensor e_{ij} can thus be presented as:

$$\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} \\ \frac{\sigma_{xy}}{2G} \\ \frac{\sigma_{yz}}{2G} \\ \frac{\sigma_{zx}}{2G} \end{Bmatrix} \quad (\text{check this your self !})$$

7.3.2 Deformation energy

The amount of deformation energy can be calculated based on the deviatoric stress and deviatoric strain. An expression for the deformation energy can be found based on the simple model given in figure 7.5.



Work:

$$dW = F \times (du) = \sigma \times A \times d\left(\frac{\sigma \times l}{E}\right)$$

$$dW = \frac{A \times l}{E} \sigma d\sigma = \frac{V}{E} \times \sigma d\sigma$$

$$\frac{W}{V} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} \epsilon \sigma$$

Figure 7.5 : Deformation energy and Work

Per unit of volume V the force F produces an amount of work W . During the deformation of the material this amount of work will be stored in the material as *deformation energy*:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \sigma$$

The amount of deformation energy is therefore equal to the specified area in the stress-strain diagram.

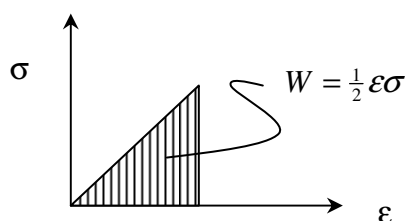


Figure 7.6 : Deformation energy

With the expressions for the deviatoric stress and deviatoric strain the *part* of the deformation energy which causes *distorsion* (change of shape) can be found with:

$$W = \frac{1}{2} e_{ij} s_{ij} \quad \Leftrightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} \\ \frac{\sigma_{xy}}{2G} \\ \frac{\sigma_{yz}}{2G} \\ \frac{\sigma_{zx}}{2G} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} - p \\ \sigma_{yy} - p \\ \sigma_{zz} - p \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{array} \right\}$$

$$W = \frac{1+\nu}{6E} \{ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \} + \frac{1+\nu}{E} \{ \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 \}$$

According to von Mises this amount of energy is bounded and can be regarded as a material limit. This limit is of course independent of the coordinate system and must be *invariant*. We can therefore choose to express this part of the deformation energy in terms of the *principal stresses*. The von Mises limit function then becomes:

$$W = \frac{1+\nu}{6E} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}$$

In order to find the limit value of this energy a simple uniaxial test can be used. If the material yields at a yield stress f_y the stored deformation energy which leads to distortion can be found with :

$$\sigma_1 = f_y \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\bar{W} = \frac{1+\nu}{E} (2f_y^2) = \frac{1+\nu}{3E} f_y^2$$

This is the limit value for the distortion energy. The von Mises criterion thus becomes:

$$\frac{1+\nu}{6E} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \leq \bar{W} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1+\nu}{6E} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \leq \frac{1+\nu}{3E} f_y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{6} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} - \frac{1}{3} f_y^2 \leq 0$$

This is exactly the same expression as found in paragraph 6.2.1.

7.4 Von Mises based on a shear test

The von Mises criterion

$$\frac{1}{3}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \leq s_{\max}^2$$

was tuned in section 6.2.1 with a uniaxial test. It is also possible to find the von Mises parameter $s_{\max}$ with a different test, e.g. a shear test as is seen in figure 7.7.

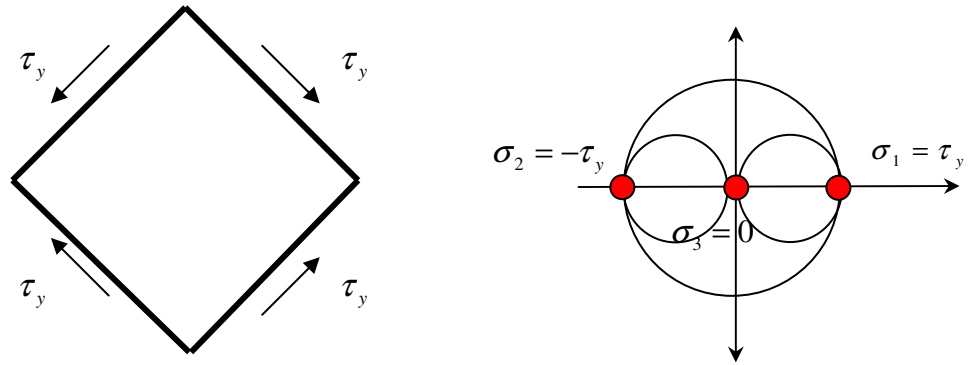


Figure 7.7 : Pure shear

From Mohr's stress circle the principal stresses can be found. The von Mises criterion thus becomes:

$$\frac{1}{3}((\tau_y + \tau_y)^2 + (-\tau_y)^2 + (-\tau_y)^2) = s_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad s_{\max}^2 = 2\tau_y^2$$

If the maximum shear stress is assumed as:

$$\tau_y = 0.5f_y$$

The von Mises criterion then becomes:

$$\frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \leq \frac{1}{4}f_y^2$$

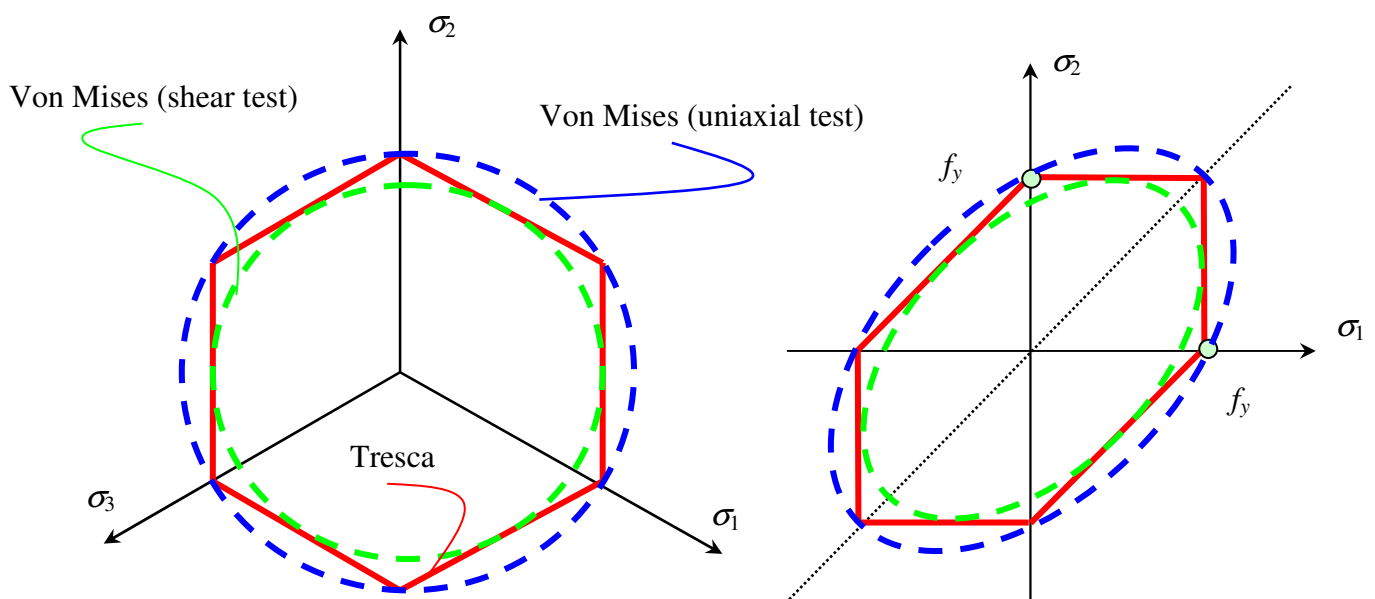


Figure 7.8 : Von Mises versus Tresca

7.5 Continuation of strain example from paragraph 2.5.3

The strain in fibres AC in the strain example of paragraph 2.5.3. can also be found in an alternative way.

The definition of the strain according to paragraph 1.2 is :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

In other words, the strain is the relative displacement projected to the original x -direction of the fibre. In the example the displacement field is given and the displacements in A en C can be found as:

$$u_x^A = 0,2 \times 10^{-4} \text{ m}; \quad u_y^A = 0 \text{ m}$$

$$u_x^B = 0,8 \times 10^{-4} \text{ m}; \quad u_y^B = 11,2 \times 10^{-4} \text{ m}$$

The strain in direction AC can be found by projecting all the displacements to the direction AC and calculate the relative displacement of C with respect to A in the direction AC. In the graph below this procedure is visualised.

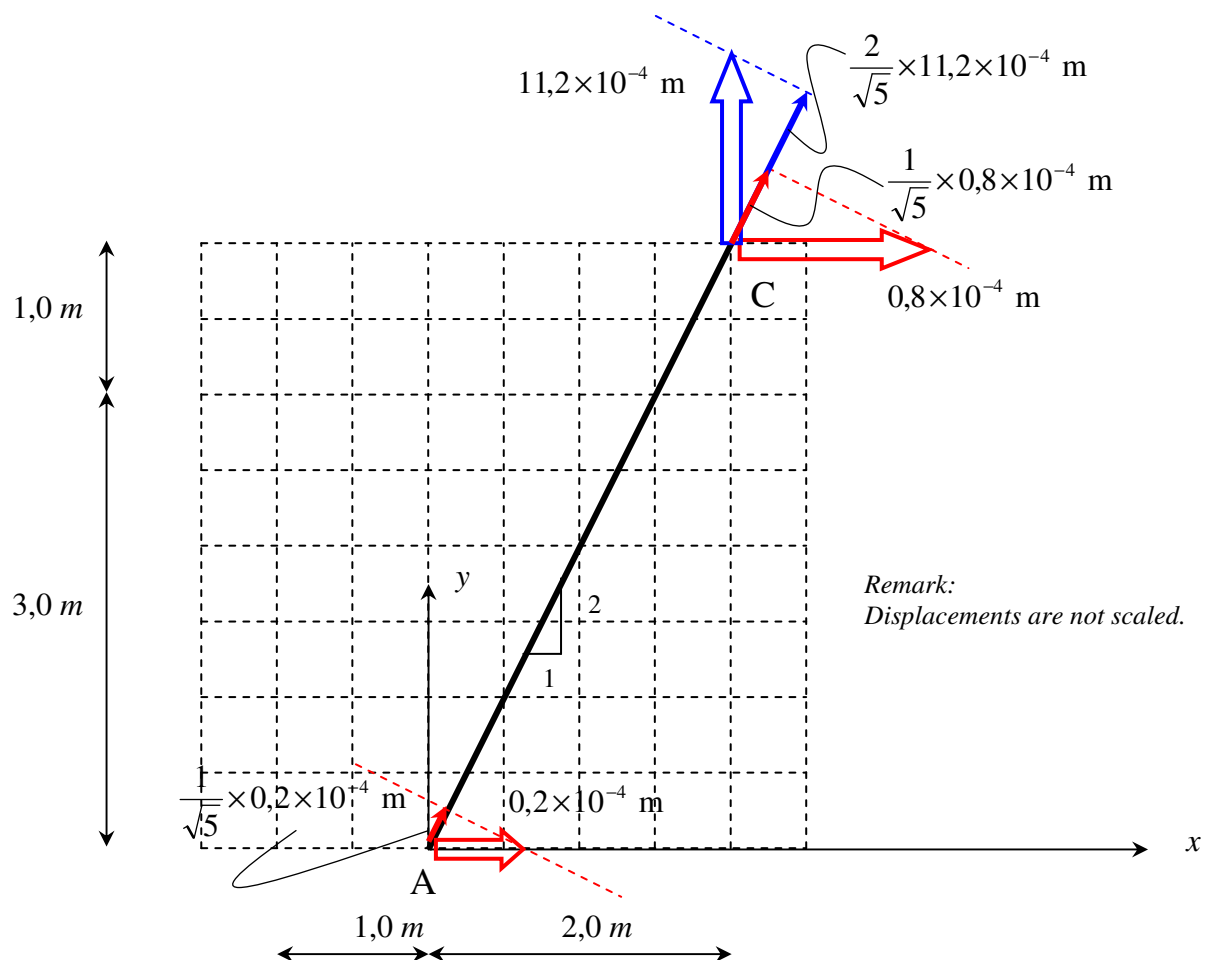


Figure 7.9 : Relative displacement of C in the direction AC

The relative displacement of C towards A in the original direction AC can be found as:

$$\Delta l^{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times 11,2 \times 10^{-4} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times 0,8 \times 10^{-4} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times 0,2 \times 10^{-4} = \frac{23}{\sqrt{5}} \times 10^{-4} \text{ m}$$

The strain of fibre AC thus becomes:

$$\epsilon^{AC} = \frac{\Delta l^{AC}}{\sqrt{20}} = 2,3 \times 10^{-4}$$

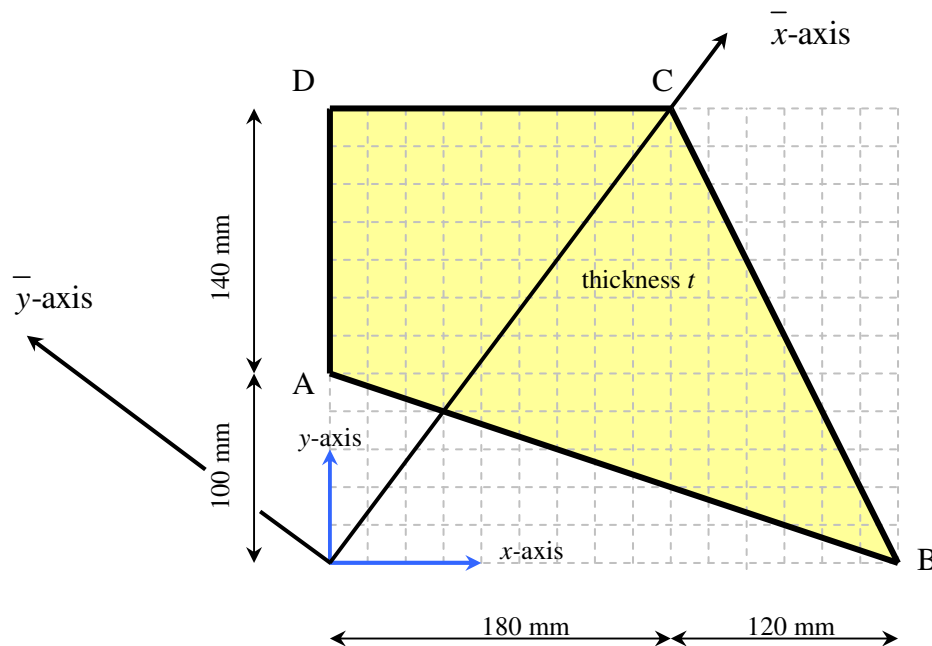
This result is in full agreement with the earlier found result in paragraph 2.5.3.

7.6 Example of an examination

A fictive homogeneous isotropic specimen is shown in the figure below. The thickness of the specimen is t . The specimen is loaded in a homogeneous plane stress situation. The displacement field is denoted in the $(\bar{x}, \bar{y})$ -coordinate system as:

$$u_{\bar{x}} = 4 \times 10^{-4} + 18 \times 10^{-4} \bar{x} - 20 \times 10^{-4} \bar{y}$$

$$u_{\bar{y}} = 4 \times 10^{-4} \bar{x} + 6 \times 10^{-4} \bar{y}$$



Given specifications : $E = 62500 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,25$ en $f_y = 240 \text{ N/mm}^2$.

Remark : Make use of the examinations formulas leaf.

Questions:

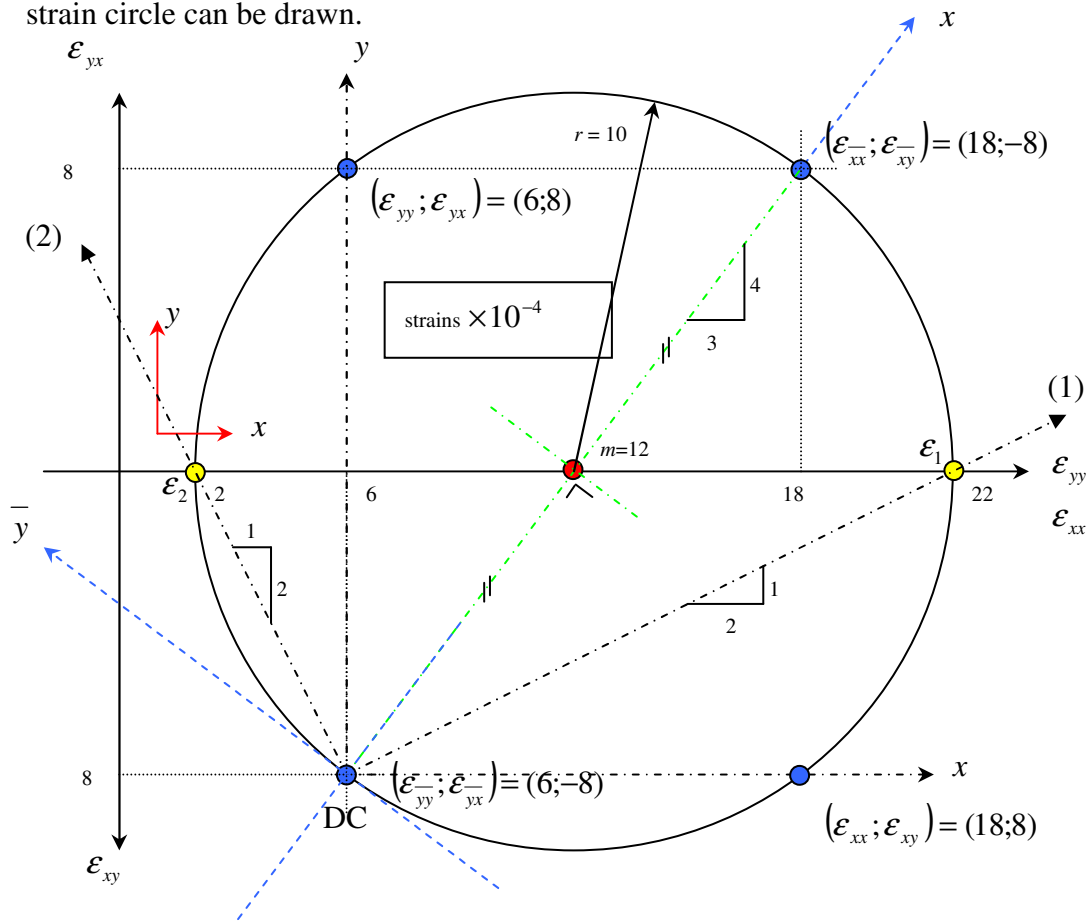
- Draw Mohr's strain circle using a scale of : $1 \text{ cm} \hat{=} 2 \times 10^{-4}$. Clearly show the Directional Centre DC and the principal directions. Specify all relevant values in the drawing.
- Derive from the circle the strains of fibres parallel to AD and DC.
- Compute the principal stresses and draw Mohr's stress circle. Use as scale: $1 \text{ cm} \hat{=} 10 \text{ N/mm}^2$. Clearly show the position of the Directional Centre DC and the principal directions!
- Derive from the stress circle the stresses on the faces AB, BC, CD and DA. Show in a separate graph of the specimen all stresses with the directions in which these stresses acts and the magnitude of these stresses.
- The material follows the von Mises yield criterion:
 - Describe the starting point of the governing equation of this yield criterion.
 - Calculate the safety of the plane stress situation according to von Mises.

Answer

- a) With the given displacement field the strain tensor can be found with:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 18 \times 10^{-4}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 6 \times 10^{-4}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -8 \times 10^{-4}$$

The tensor can be shown as two points in Mohr's graph for strains. Subsequently Mohr's strain circle can be drawn.



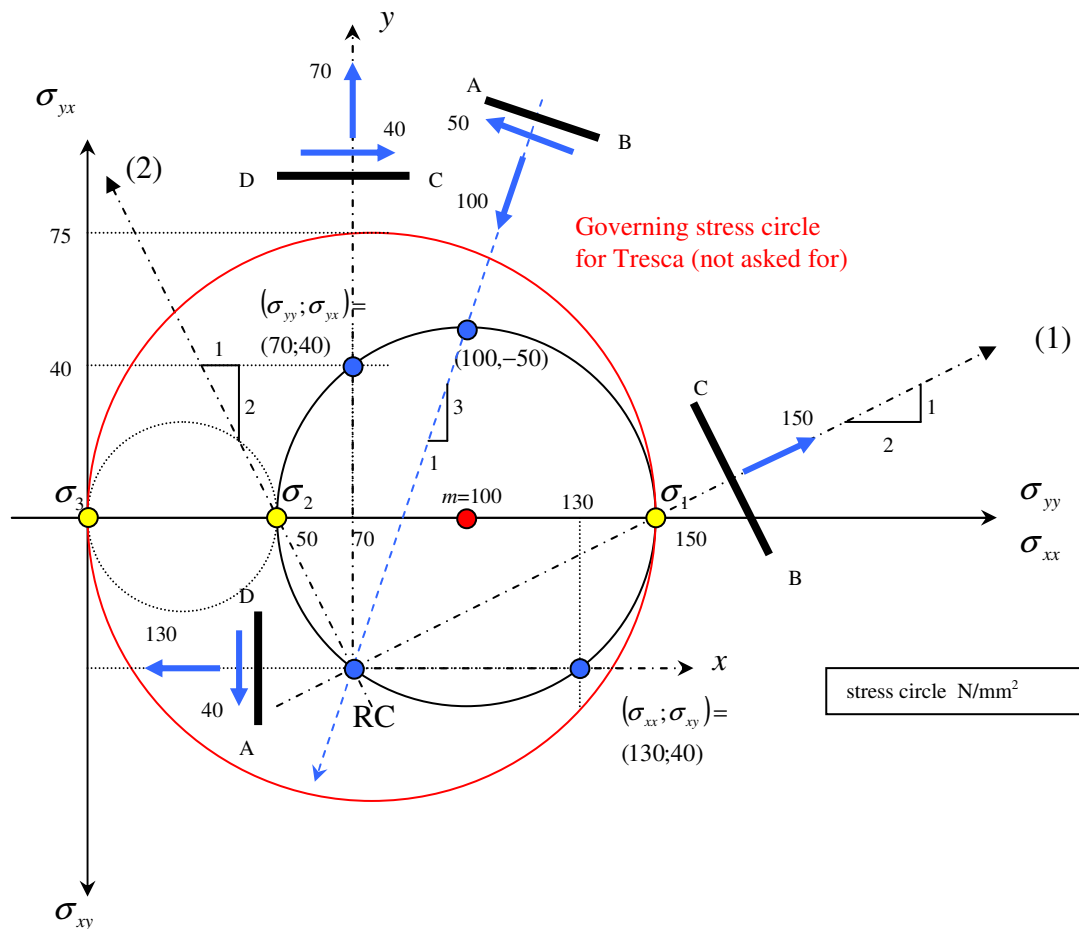
- b) Fibres parallel to AD and DC are fibres of the tensor in the x - y -coordinate system. From Mohr's strain circle the components of this tensor can be obtained by drawing a line through the DC parallel to the direction of the fibre. From this follows:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

- c) From the principal strains we can compute the principal stresses:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{62,5 \times 10^3}{1-0,25^2} (22 \times 10^{-4} + 0,25 \times 2 \times 10^{-4}) = 150 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) = \frac{62,5 \times 10^3}{1-0,25^2} (2 \times 10^{-4} + 0,25 \times 22 \times 10^{-4}) = 50 \text{ N/mm}^2$$



- d) Mohr's stress circle is shown above. For each face of the specimen a local coordinate system is shown. By default the local x-axis is chosen as the out of plane normal to the face. This is not necessary but convenient to avoid errors. Pay attention to the position of the DC. It's relative position in the stress circle is the same as in the strain circle.
- e) The principal stresses are : (0; 50; 150). The safety according to von Mises is:

$$\frac{\gamma^2}{6} [(150 - 50)^2 + (50 - 0)^2 + (0 - 150)^2] \leq \frac{1}{3} \times 240^2 \Rightarrow \gamma = 1,81$$

The safety according to Tresca is : $\gamma = 120/75 \Rightarrow \gamma = 1,60$ (maximum stress circle)

FORMULAS

Principal values for a second order tensor:

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\right]^2 + k_{xy}^2}$$

Stress-strain relations:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \end{cases} \text{ where } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Strains:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad i, j = x, y$$

Tresca:

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &\leq 2c \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &\leq 2c \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &\leq 2c \end{aligned}$$

Von Mises (based on tension or shear):

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) &\leq \frac{1}{3}f_y^2 \\ \frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) &\leq \tau_y^2 \end{aligned}$$