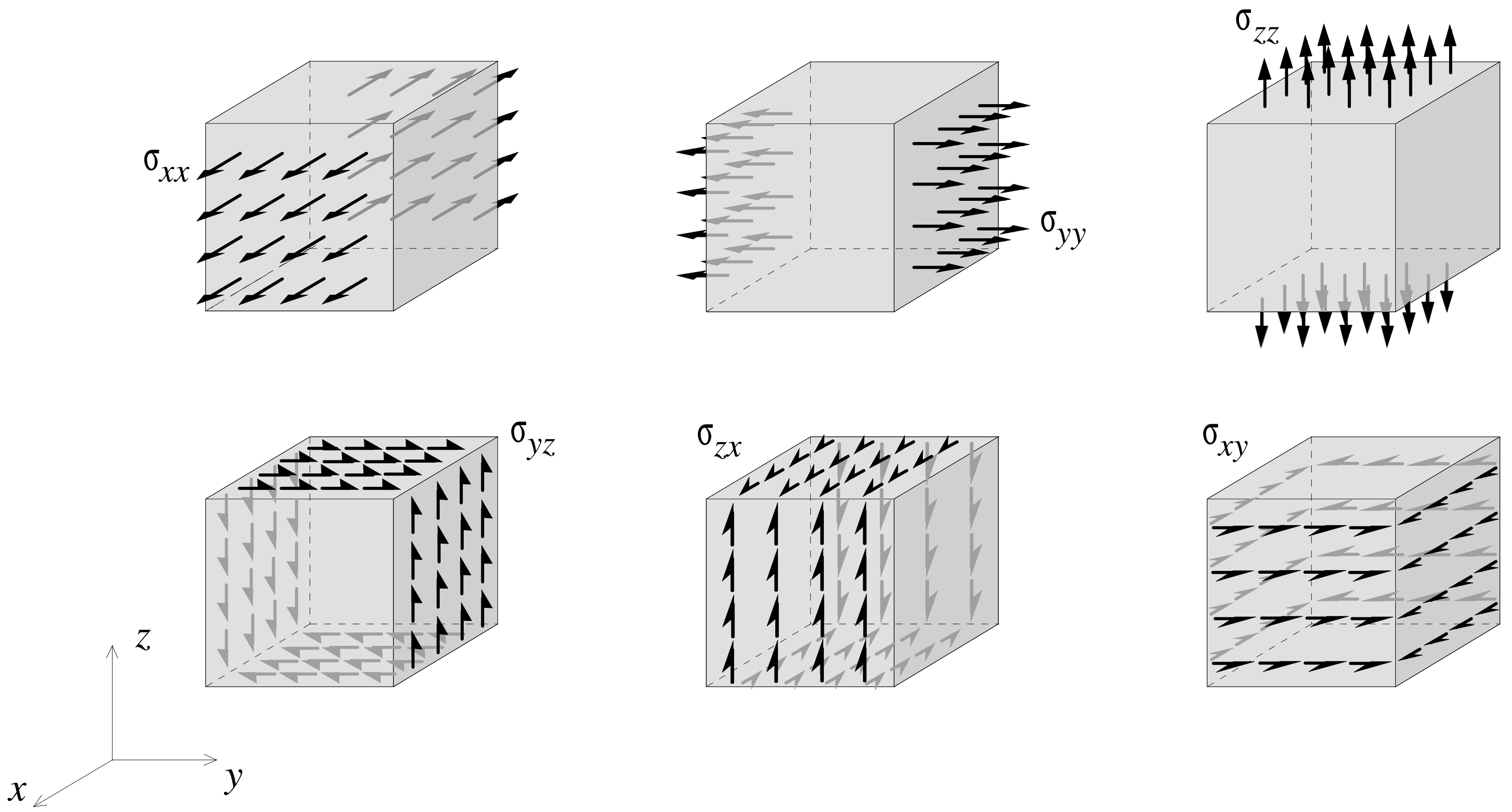
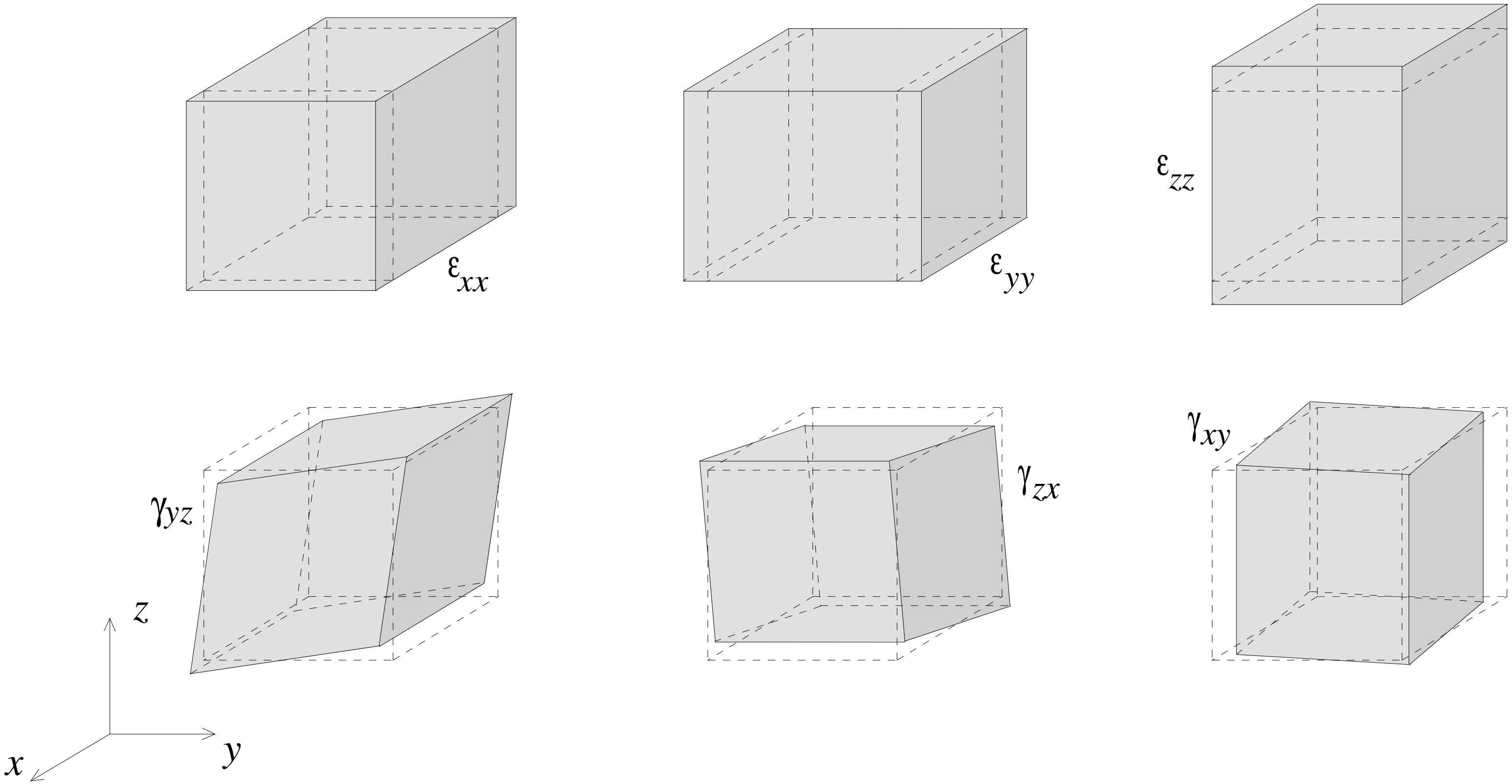
COLLEGE ONDERWERPEN

SPANNINGEN



REKKEN



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \qquad i, j = x, y, z$$

SPANNINGEN EN REKKEN

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad en \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Verband tussen spanning en rek ?
4^e orde tensor (9x9=81 onbekende elementen)

SPANNINGEN EN REKKEN

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \text{ of } \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

6 REKKEN

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \text{ of } \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

6 SPANNINGEN

MATERIAALGEDRAG

6*6 = 36 onbekende elementen
matrix is symmetrisch >> 21 onbekende elementen

---

aeolotropie : het materiaal heeft in verschillende richtingen verschillende eigenschappen

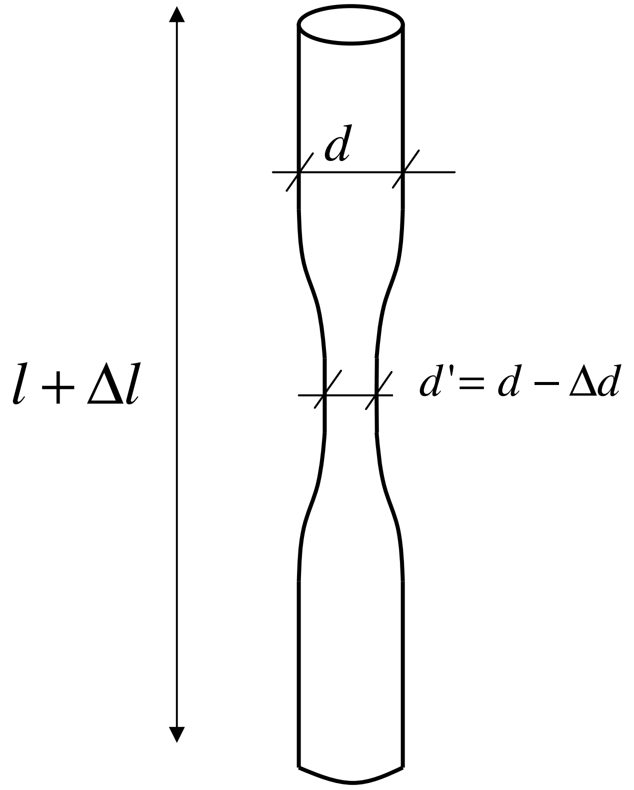
orthotropie : het materiaal heeft verschillende eigenschappen in 3 onderling loodrechte richtingen

anisotropie : aeolotropie en orthotropie

isotropie : het materiaal heeft in alle richtingen dezelfde eigenschappen

---

homogeen : het materiaal heeft in ieder punt dezelfde eigenschappen



REK = Specifieke verlenging

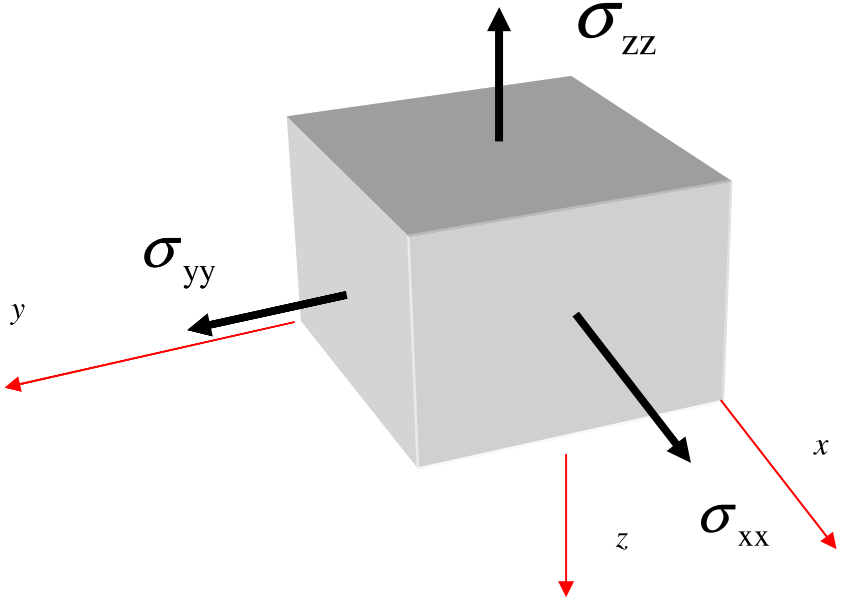
Lengte-richting : $\varepsilon_l = \dfrac{\Delta l}{l}$

Dwars-richting : $\varepsilon_d = \dfrac{\Delta d}{d}$

Insnoering : $\dfrac{\dfrac{\Delta d}{d}}{\dfrac{\Delta l}{l}} = const = \nu$

dwarscontractie-coëfficiënt of de constante van Poisson

VERLENGING DOOR TREK IN EEN RICHTING VEROORZAAKT EEN VERKORTING IN EEN RICHTING LOODRECHT DAAROP



Normaalrekken - normaalspanningen

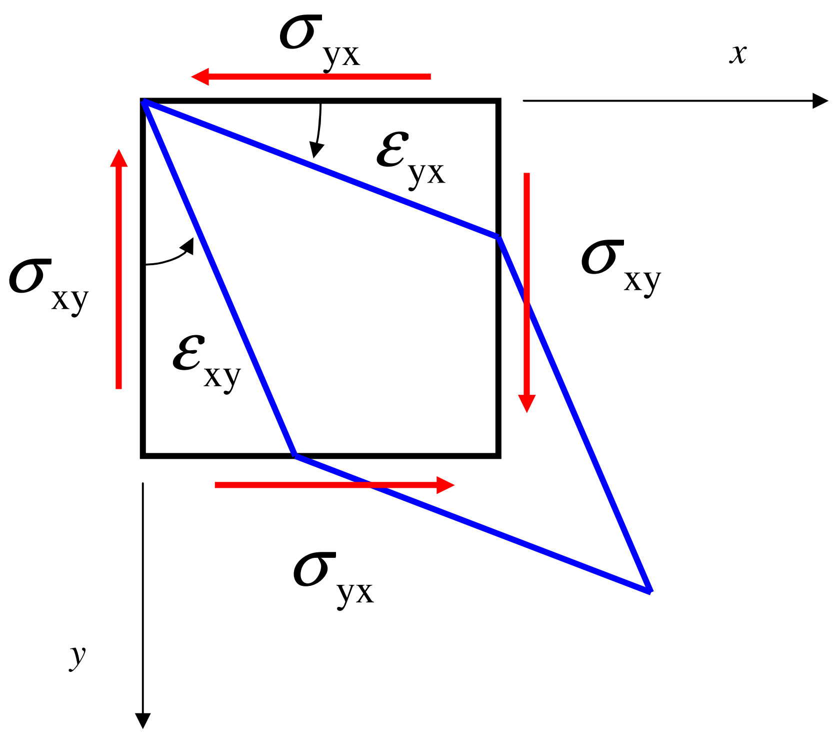
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}}$$

Afschuifhoek - schuifspanning

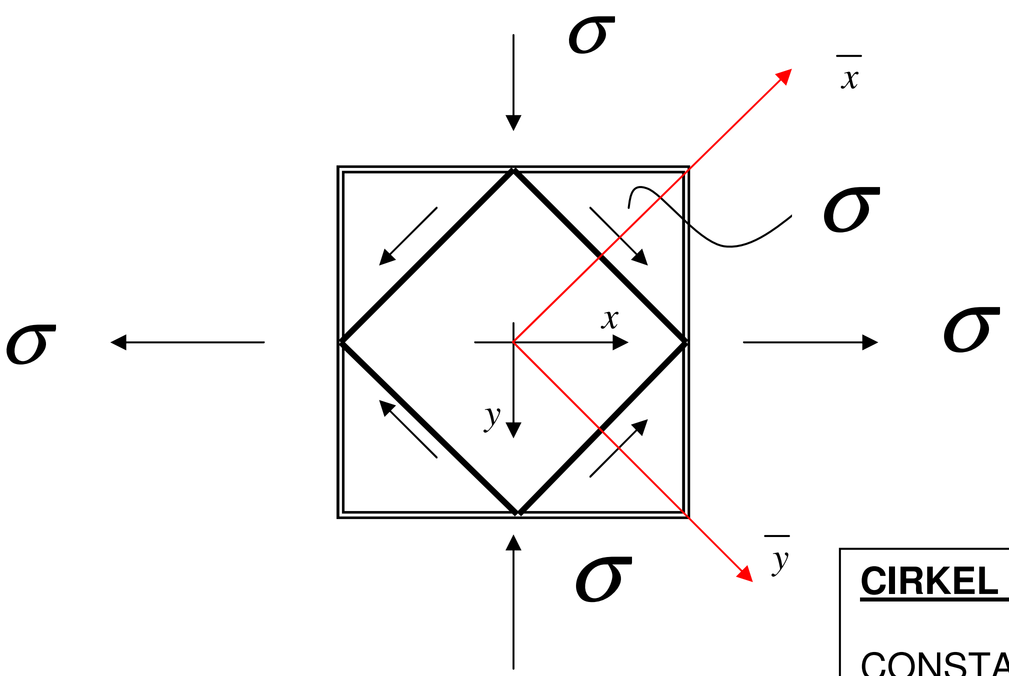


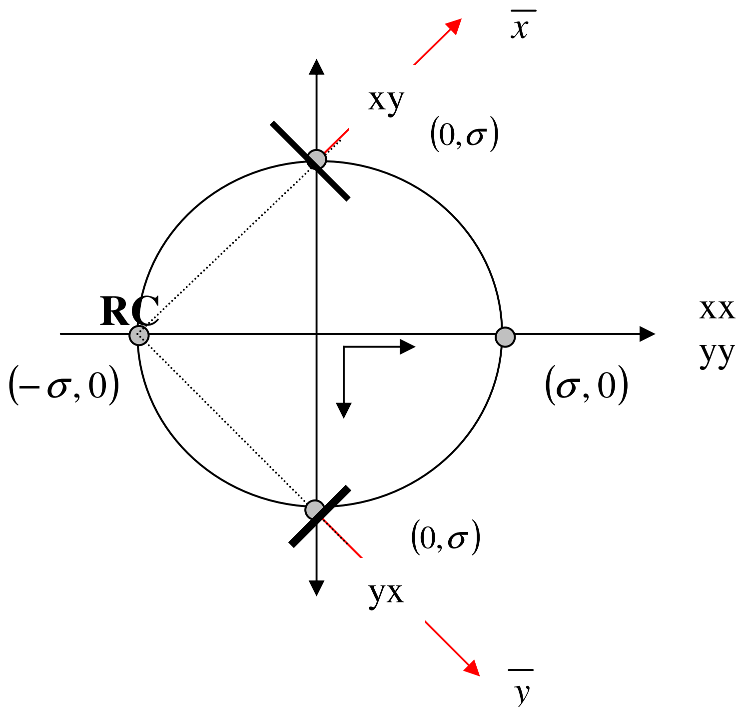
$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{xy} = G\gamma_{xy}$$

dus :

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}$$





CIRKEL VAN MOHR

CONSTANTE SCHUIFSPANNING OP DE VLAKKEN ONDER 45 GRADEN

DUS :

ZUIVERE AFSCHUIVING

BIJBEHORENDE REKKEN

OORSPRONKELIJKE ASSENSTELSEL
(BUITENKANT VAN HET BLOK)

$$\sigma_{xx} = \sigma \qquad \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{yy} = -\sigma \qquad \sigma_{yx} = 0$$

$$dus:$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) = -\frac{1+\nu}{E}\,\sigma$$

$$\varepsilon_{xy} = 0$$

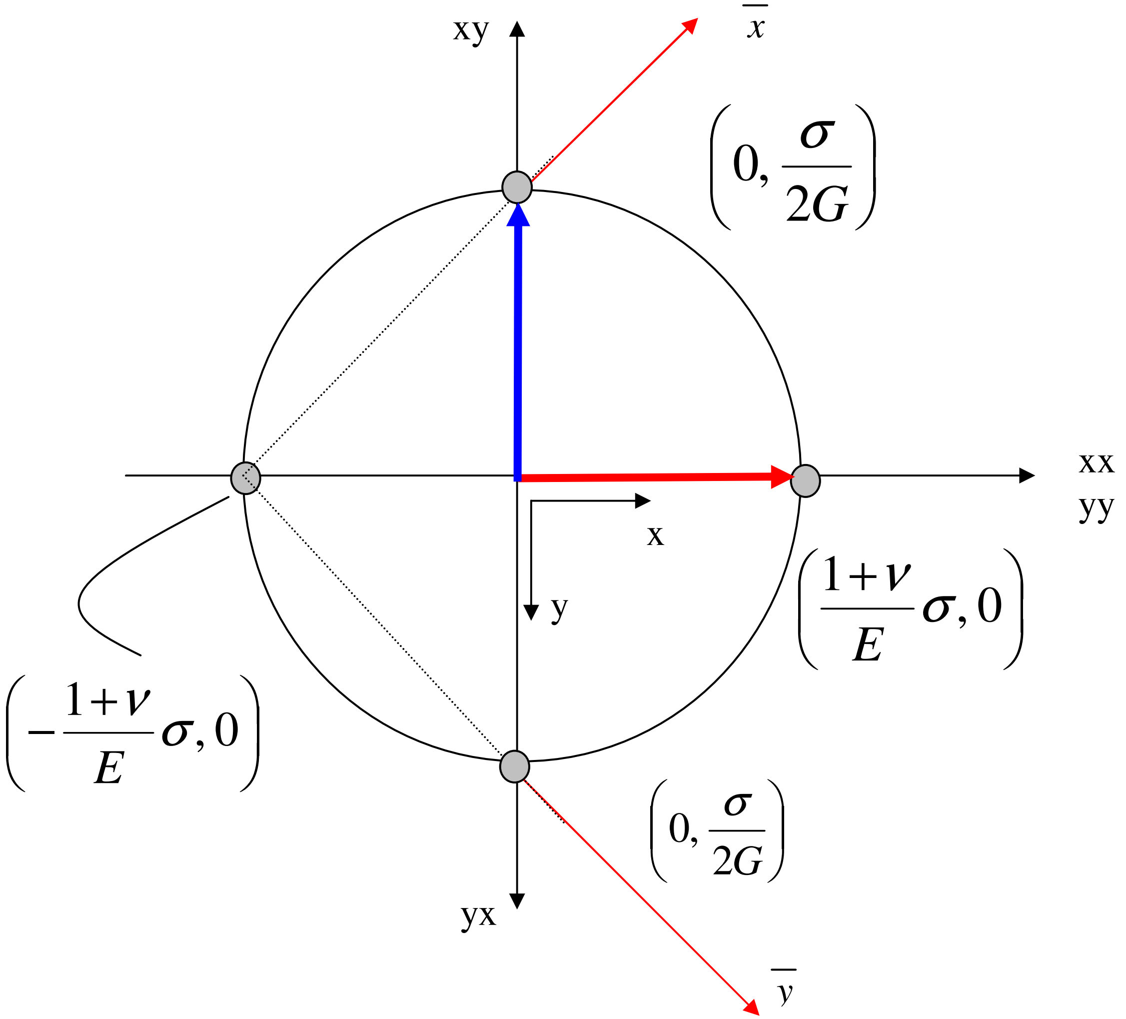
GEROTEERDE ASSENSTELSEL
(BLOKJE OP PURE AFSCHUIVING)

$$\varepsilon_{\overline{xx}} = 0$$

$$\varepsilon_{\overline{yy}} = 0$$

$$\varepsilon_{\overline{xy}} = \frac{\sigma_{\overline{xy}}}{2G} = \frac{\sigma}{2G}$$

$$\varepsilon_{\overline{yx}} = \frac{\sigma_{\overline{yx}}}{2G} = \frac{\sigma}{2G}$$



REKCIRKEL VAN MOHR

STRAAL VAN DE CIRKEL IS UITERAARD CONSTANT

$$\frac{1+\nu}{E}\sigma = \frac{\sigma}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

AFSCHUIVING

AFSCHUIVING

$$\sigma_{ij} = G\gamma_{ij} = G2\varepsilon_{ij} \quad \text{met}: \quad i \neq j$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \Rightarrow \quad 2\varepsilon_{ij} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{ij}$$

DUS :

$$\boxed{\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{\mathrm{xy}} \\ 2\varepsilon_{\mathrm{yz}} \\ 2\varepsilon_{\mathrm{zx}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_{\mathrm{xy}} \\ \sigma_{\mathrm{yz}} \\ \sigma_{\mathrm{zx}} \end{Bmatrix}}$$

ISOTROOP LINEAIR ELASTISCH MATERIAAL
(WET VAN HOOKE)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}$$

FLEXIBILITEITSRELATIE

ISOTROOP LINEAIR ELASTISCH MATERIAAL
(WET VAN HOOKE)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{bmatrix}$$

positief voor

$$-1 < \nu < 0,5$$

STIJFHEIDSRELATIE

VLAKSPANNINGSTOESTAND (*b.v. x-y vlak*) ($\sigma_{zz} = 0 \quad \sigma_{xz} = 0 \quad \sigma_{zy} = 0$)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right)$$

$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

FLEXIBILITEIT **STIJFHEID**

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

VLAKSPANNINGSTOESTAND (*b.v. x-y vlak*) ($\sigma_{zz} = 0 \quad \sigma_{xz} = 0 \quad \sigma_{zy} = 0$)

$$flexibiliteit:$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$stijfheid:$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

HOOFDREKRICHTING VERSUS HOOFDSPANNINGSRICHTING

$$\tan 2\alpha_{\text{stress}} = \frac{\sigma_{xy}}{\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)}$$

$$\tan 2\alpha_{\text{strain}} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)}$$

$$\varepsilon_{\text{xx}} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\text{xx}} - \nu\sigma_{\text{yy}}\right)$$

$$\varepsilon_{\text{yy}} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\text{yy}} - \nu\sigma_{\text{xx}}\right)$$

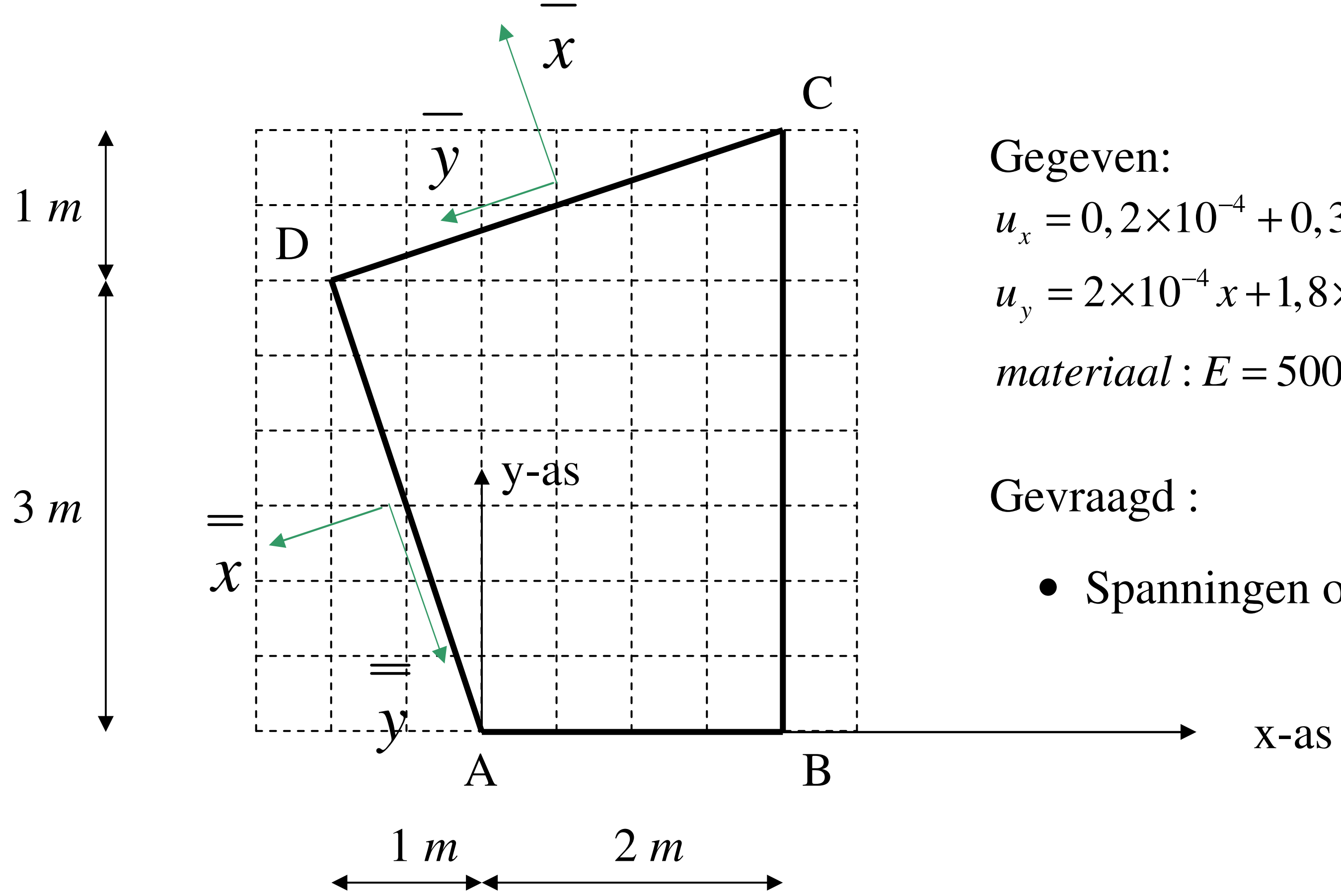
$$\varepsilon_{\text{xy}} = \frac{\sigma_{\text{xy}}}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\boxed{\tan 2\alpha_{\text{strain}}} = \frac{\dfrac{\sigma_{xy}}{2G}}{\frac{1}{2E}\left((1+\nu)\sigma_{xx} - (1+\nu)\sigma_{yy}\right)} = \frac{1}{2G} \times \frac{E}{1+\nu} \times \frac{\sigma_{xy}}{\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)} =$$

$$\frac{2(1+\nu)}{2E} \times \frac{E}{1+\nu} \times \frac{\sigma_{xy}}{\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)} = \frac{\sigma_{xy}}{\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)} = \boxed{\tan 2\alpha_{\text{stress}}}$$

VOORBEELD (zie ook rektensor vorig college)



Gegeven:

$$u_x = 0,2\times10^{-4} + 0,3\times10^{-4}\,x$$

$$u_y = 2\times10^{-4}\,x + 1,8\times10^{-4}\,y$$

$$materiaal: E = 50000\ \text{N/mm}^2; \nu = 0,25$$

Gevraagd :

- Spanningen op alle zijden

VAN REK NAAR SPANNING

Rekken

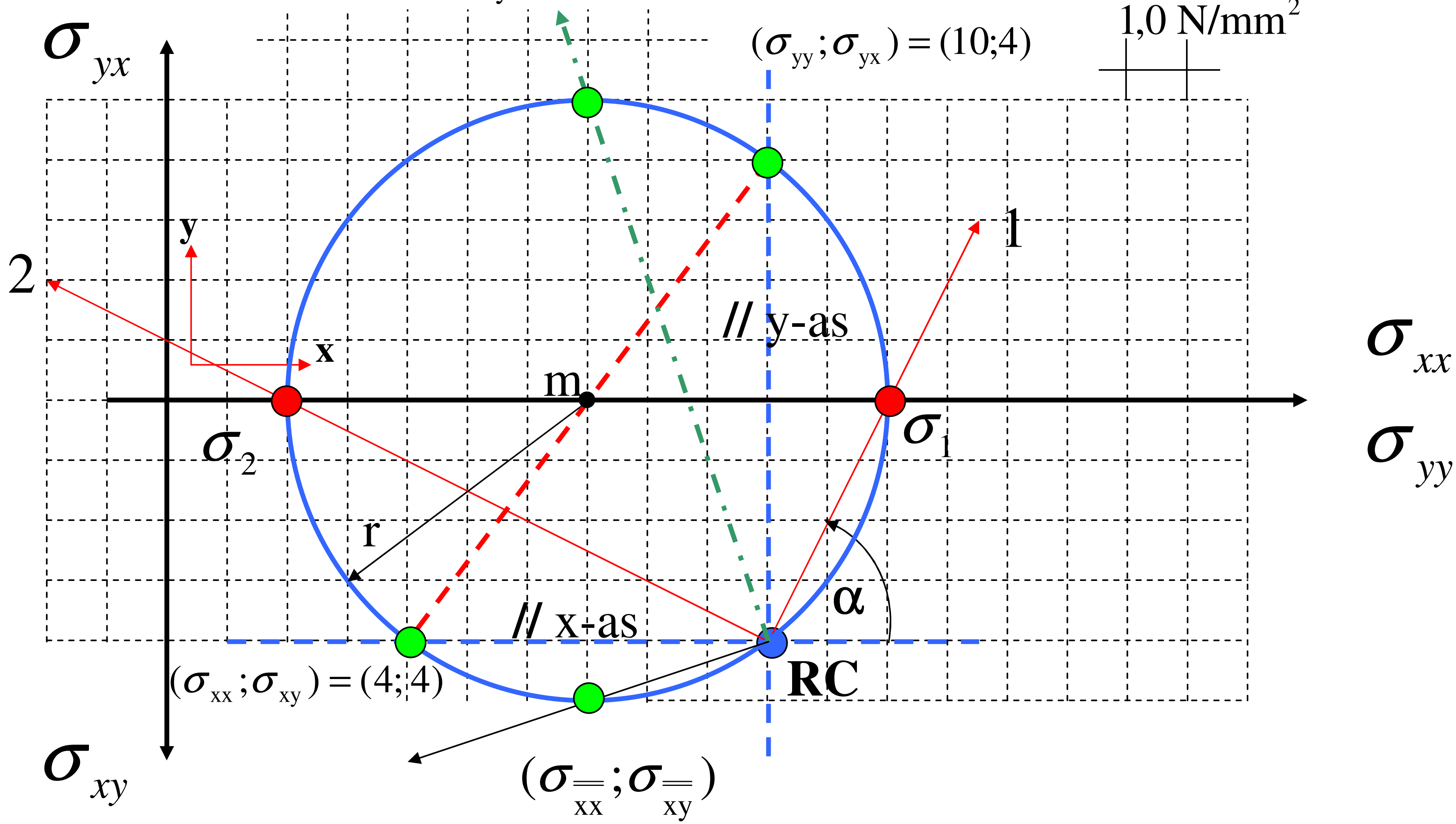
$$\left(\varepsilon_{xx};\varepsilon_{xy}\right)=\left(0{,}3\times1^{-4};1{,}0\times10^{-4}\right)$$
$$\left(\varepsilon_{yy};\varepsilon_{yx}\right)=\left(1{,}8\times1^{-4};1{,}0\times10^{-4}\right)$$

Spanning [N/mm²]

$$\left(\sigma_{xx};\sigma_{xy}\right)=(4;4)$$
$$\left(\sigma_{yy};\sigma_{yx}\right)=(10;4)$$

$$\sigma_{xx}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx}+\nu\varepsilon_{yy}\right)$$
$$\sigma_{yy}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy}+\nu\varepsilon_{xx}\right)$$
$$\sigma_{xy}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}$$

CIRKEL VAN MOHR (SPANNING)



VERGELIJK REKCIRKEL MET SPANNINGSCIRKEL

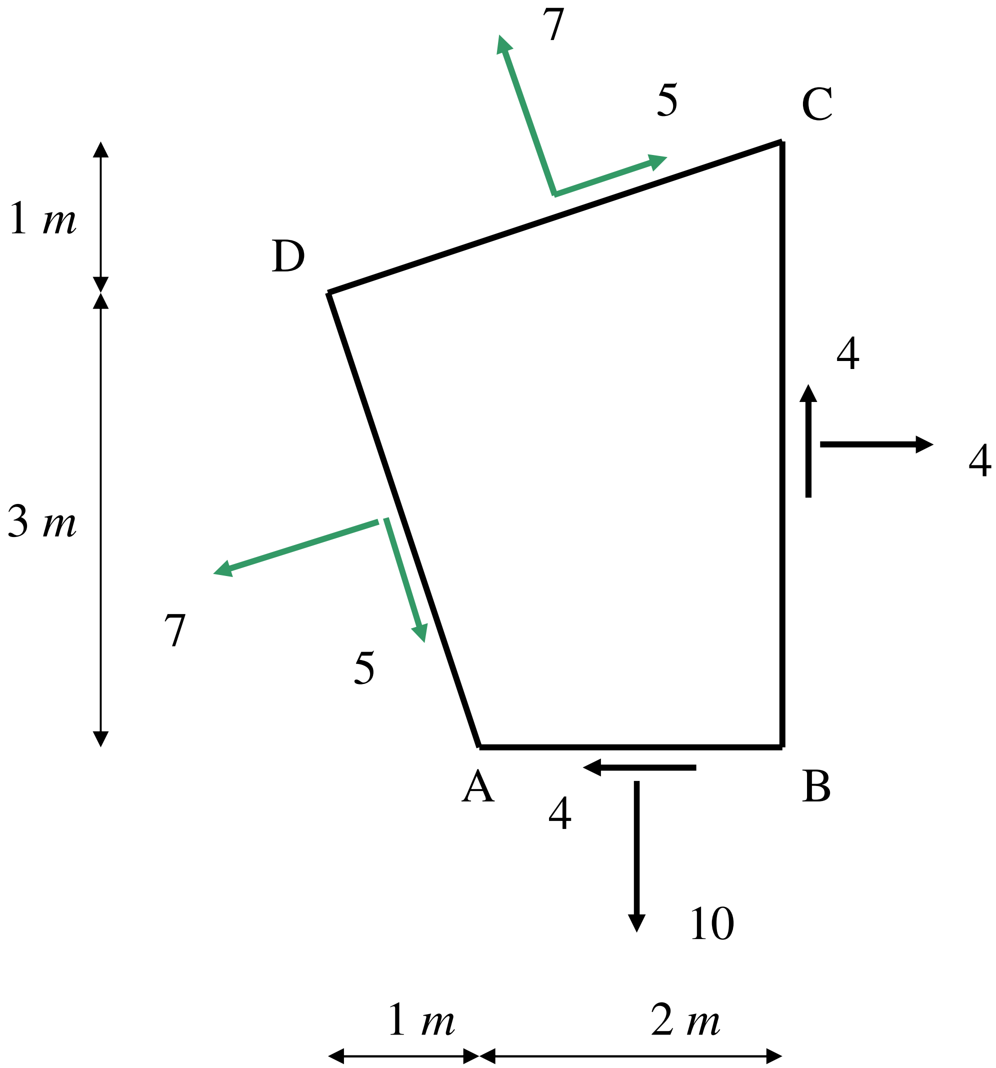
VOOR HOMOGEEN ISOTROOP MATERIAAL GELDT :

- HOOFDRICHTINGEN ZIJN GELIJK (zie bewijs blz 48)
- DUS PLAATS VAN HET R.C. IS IN BEIDE CIRKELS GELIJK

ALTERNATIEVE BEPALING SPANNINGSCIRKEL

- BEPAAL HOOFDSPANNINGEN UIT HOOFDREKKEN
- TEKEN SPANNINGSCIRKEL
- NEEM HOOFDRICHTINGEN (EN R.C.) UIT REKCIRKEL OVER

SPANNINGEN OP DE VLAKKEN [N/mm²]



- ZELF KRACHTEN EN MOMENTENEVENWICHT CONTROLEREN !