

COLLEGE ONDERWERPEN

- 1 Spanningstensor
 - Spanningsdefinitie
 - Spanningstoestanden en voorbeelden
- 2 Rektensor
 - Relatieve verplaatsingen
 - Rekdefinities
 - Rektensor
- 3 Tensoreigenschappen
 - Introductie van tensoren
 - Transformatieregels
 - Cirkel van Mohr
 - Voorbeeld
- 4 Spannings-rek relatie
 - Cirkel van Mohr voor spanning en rek
 - Voorbeelden
- 5 **Bezwijktoestanden**
 - Spanningen in 3D
 - Von Mises en Tresca

WANNEER LEIDT EEN RUIMTELIJKE SPANNINGSTOESTAND TOT VLOEI IN EEN MATERIAAL ?

- **RUIMTELIJKE SPANNINGSTOESTAND**
 - Hoofdspanningen, isotrope spanning en deviatorspanning

- **VLOEIVOORWAARDEN**
 - Tresca
 - Von Mises

RELATIE TUSSEN DE SPANNINGSVECTOR EN DE NORMAALVECTOR VAN HET SPANNINGSVLAK:

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

n = eenheidsnormaalvector van vlakje A
p = spanningsvector werkend op vlakje A

WANNEER VALT DE RICHTING VAN p SAMEN MET DE RICHTING VAN n ?

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

invullen :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

DIT STELSEL HEEFT ALLEEN EEN NIET-TRIVIALE OPLOSSING ALS DE DETERMINANT NUL IS

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

met:

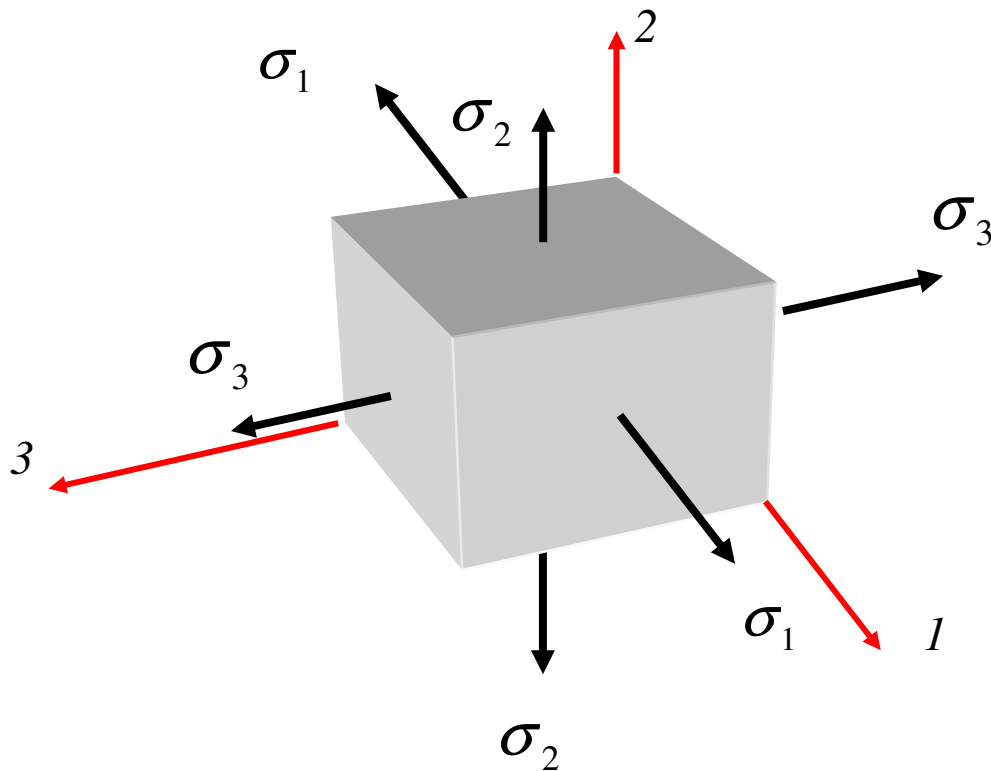
$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zx}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx}$$

INVARIANTEN I_1 , I_2 en I_3

ISOTROPE SPANNING (gemiddelde normaalspanning)



isotrope spanning :

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} I_1$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Spanningsruimte (x,y,z)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_o & & \\ & \sigma_o & \\ & & \sigma_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ & s_{yy} & s_{yz} \\ & & s_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_o = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

ISOTROPE SPANNING

$$s_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma_o$$

$$s_{xy} = \sigma_{xy}$$

$$s_{xz} = \sigma_{xz}$$

$$s_{yy} = \sigma_{yy} - \sigma_o$$

$$s_{yz} = \sigma_{yz}$$

$$s_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma_o$$

DEVIATORSPANNING

HOOFDSPANNINGSRUIMTE (1,2,3)

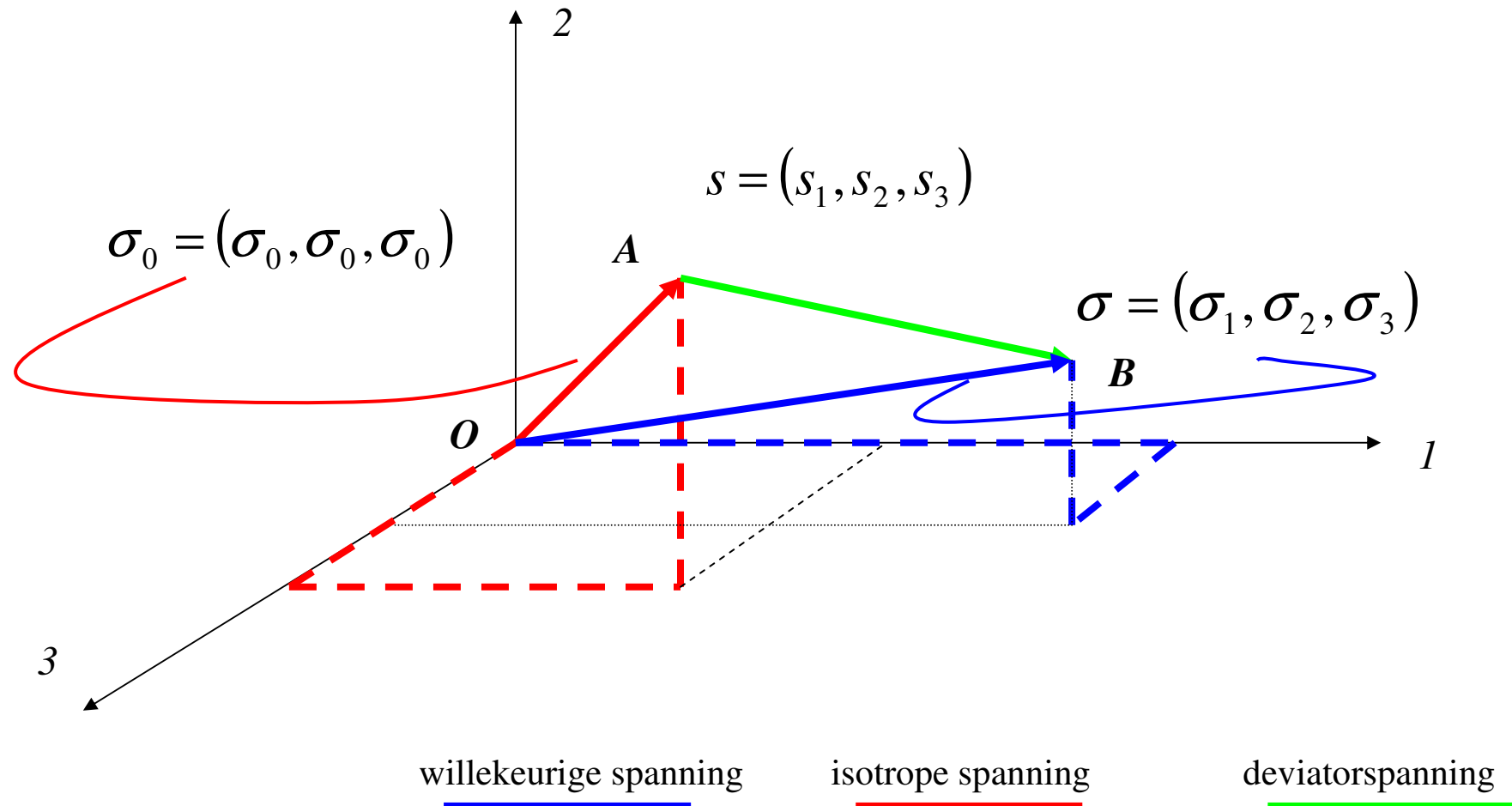
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_o \end{bmatrix}$$

ISOTROPE SPANNING

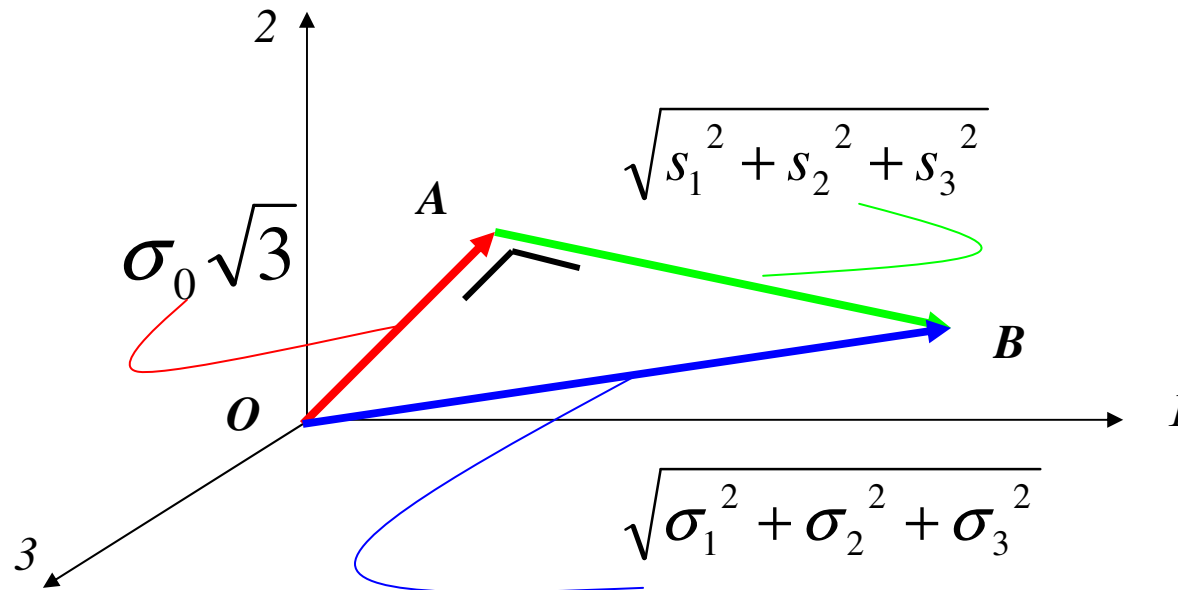
DEVIATORSPANNING

WAT STELT DIT RUIMTELIJK VOOR ?

HOOFDSPANNINGSRUIMTE



SPANNINGSVECTOREN IN DE HOOFDSPANNINGSRUIMTE



Indien $OAB=90^\circ$:

$$|AB|^2 = |OB|^2 - |OA|^2$$

$$|AB|^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 3\sigma_0^2$$

$$|OB|^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

$$|OA|^2 = 3\sigma_0^2$$

1 DEVIATORSPANNING STAAT LOODRECHT OP DE ISOTROPE SPANNING

2 HET VLAK WAARIN DE DEVIATORSPANNING LIGT NOEMEN WE HET DEVIATORVLAK

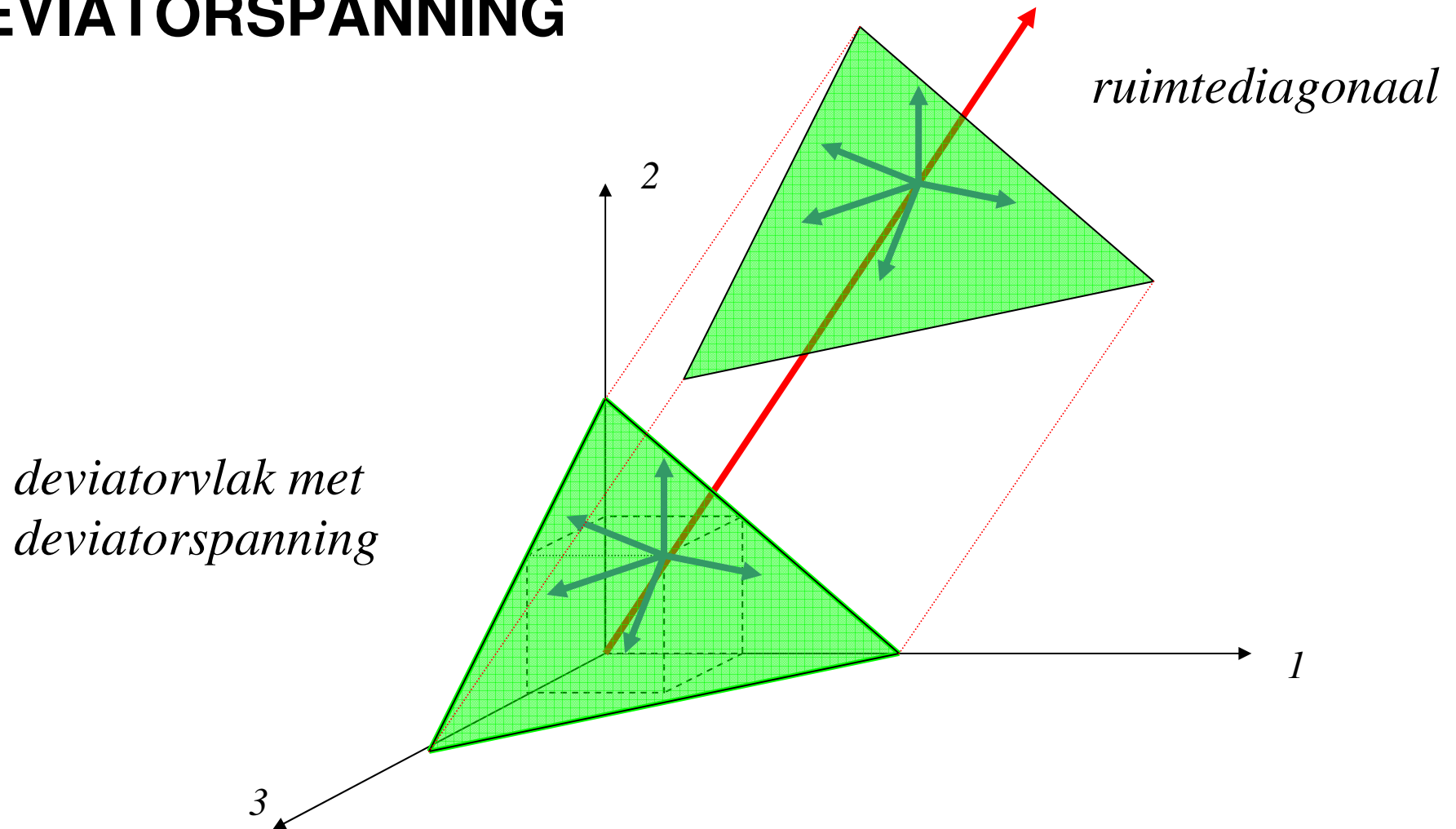
3 DEVIATORVLAK STAAT DUS LOODRECHT OP DE RUIMTEDIAGONAAL

ISOTROPE SPANNINGEN EN DEVIATORSPANNINGEN

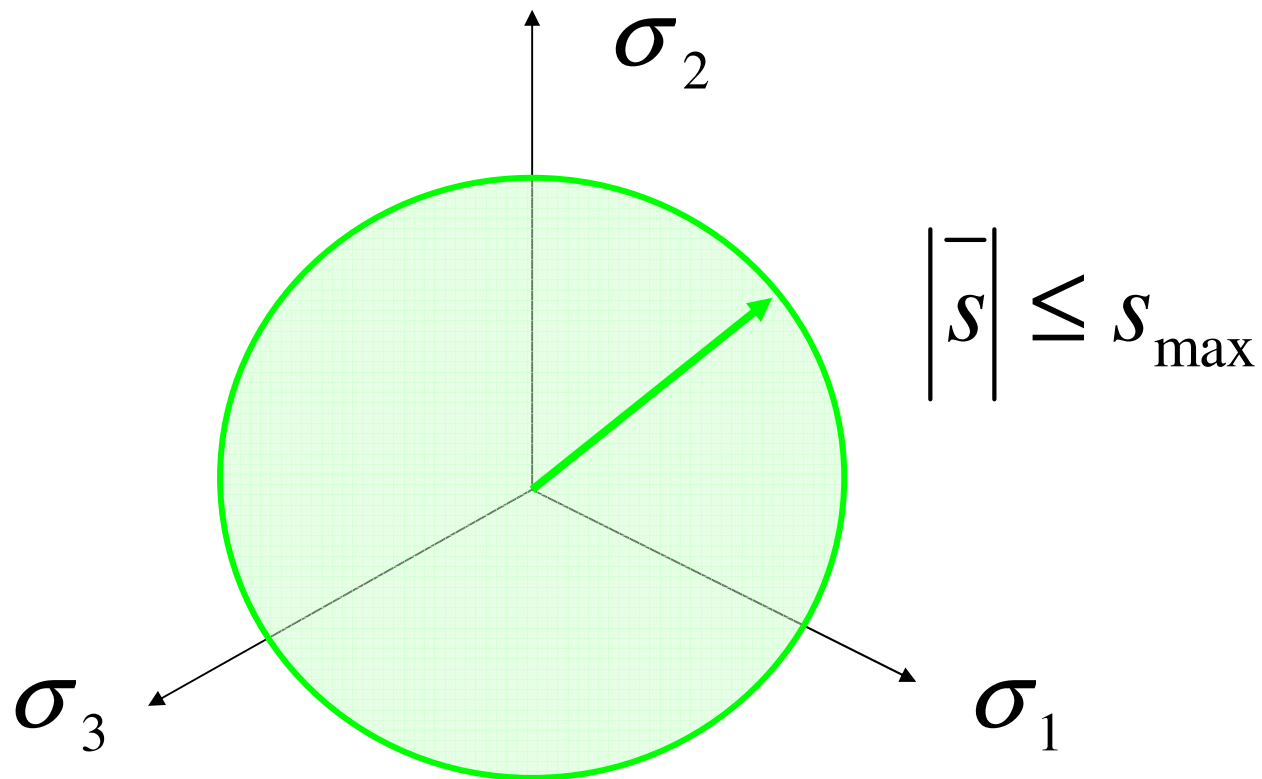
WAAROM DIT ONDERSCHIED ?

- DEVIATORSPANNINGEN ZIJN VERANTWOORDELIJK VOOR GEDAANTEVERANDERING.
- ISOTROPE SPANNINGEN ZIJN VERANTWOORDELIJK VOOR VOLUMEVERANDERING.
- BEZWIJKEN VAN MATERIALEN IS VAAK GEVOELIGER VOOR GEDAANTE-VERANDERING DAN VOOR VOLUME-VERANDERING

UITGANGSPUNT : VLOEI AFHANKELIJK VAN DE DEVIATORSPANNING



MAXIMUM STELLEN AAN DE DEVIATORSPANNING



MAXIMUM DEVIATORSPANNING:

$$|\bar{s}| \leq s_{\max} \quad \text{sheet 10, lijn } \overline{AB}$$

$$|\bar{s}|^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 3\sigma_0^2$$

$$|\bar{s}|^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 3 \times \left[\frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2$$

$$|\bar{s}|^2 = \frac{1}{3} [2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1]$$

$$|\bar{s}|^2 = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq s_{\max}^2$$

HOE GROOT IS DE MAXIMALE DEVIATORSPANNING ?

Eenvoudige trekproef:

$$\sigma_1 = f_y \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = 0$$

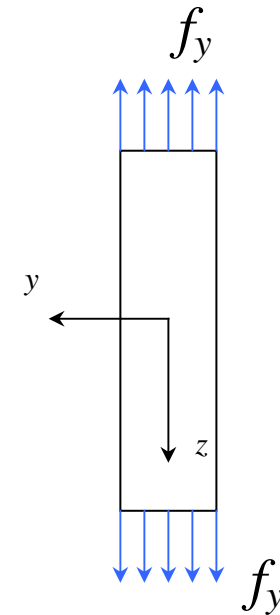
invullen :

$$\frac{1}{3} (f_y^2 + f_y^2) \leq s_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad s_{\max}^2 = \frac{2}{3} f_y^2$$

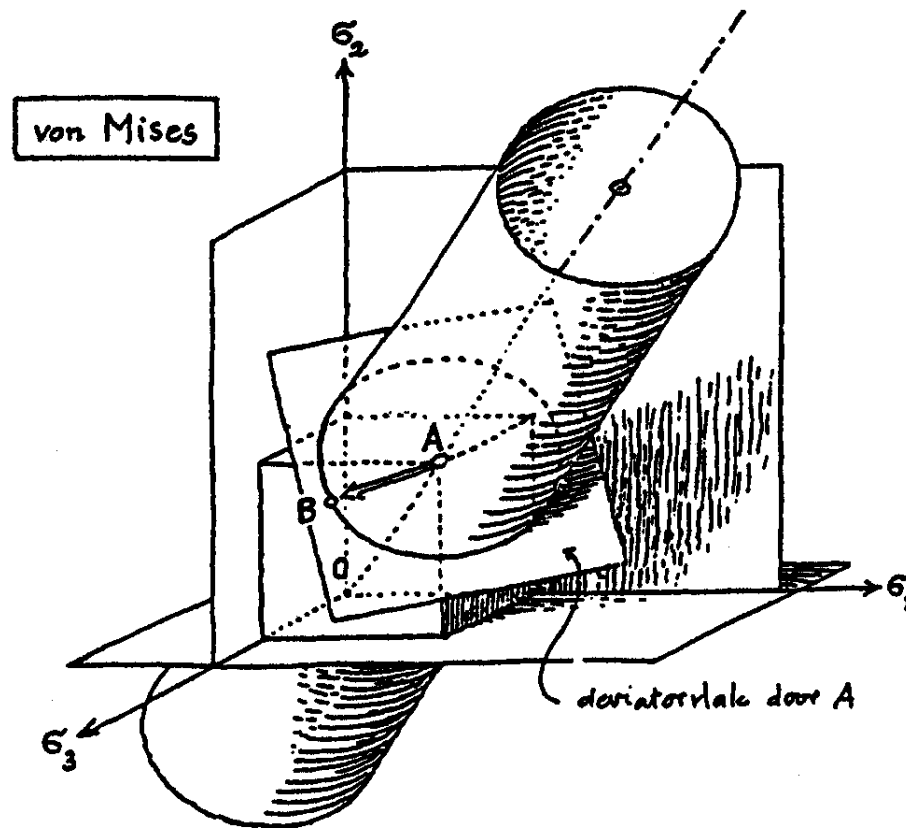
Dus:

$$\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{2}{3} f_y^2 \quad \text{of :}$$

$$\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - \frac{1}{3} f_y^2 \leq 0 \quad \text{Von Mises}$$

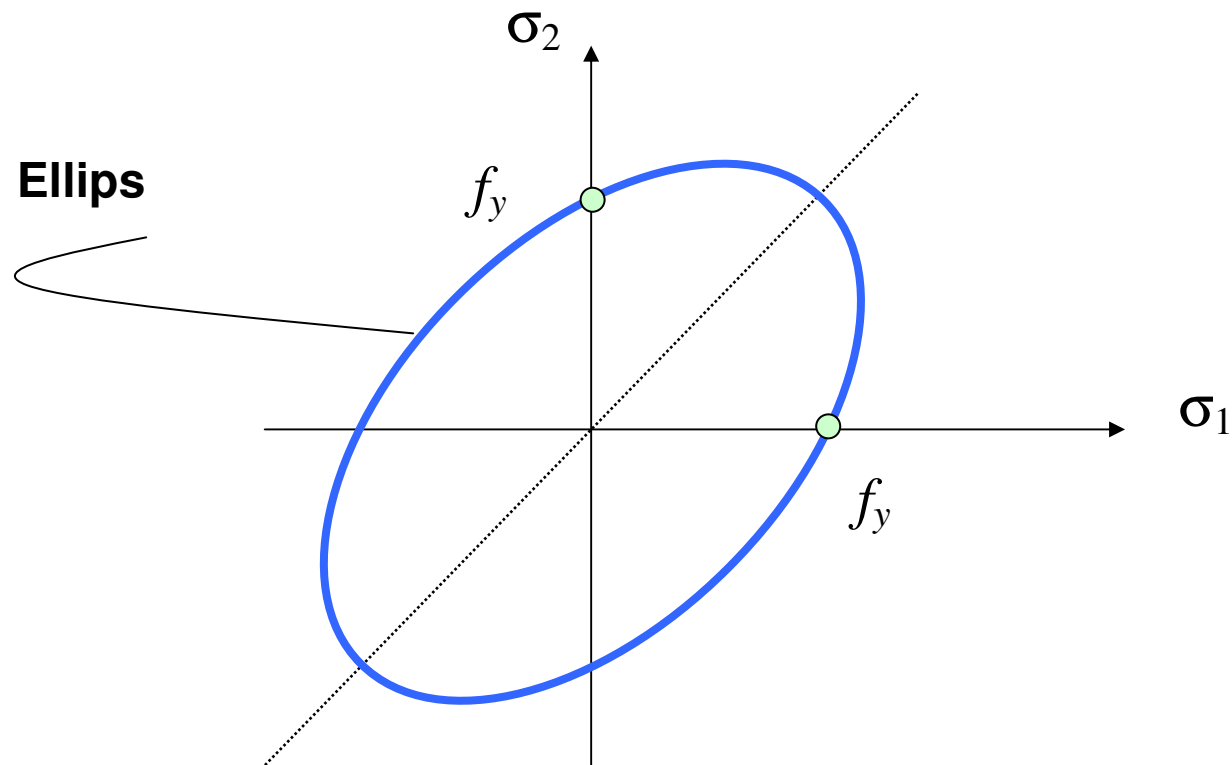


VLOEICRITERIUM VAN VON MISES (1-2-3 ruimte)

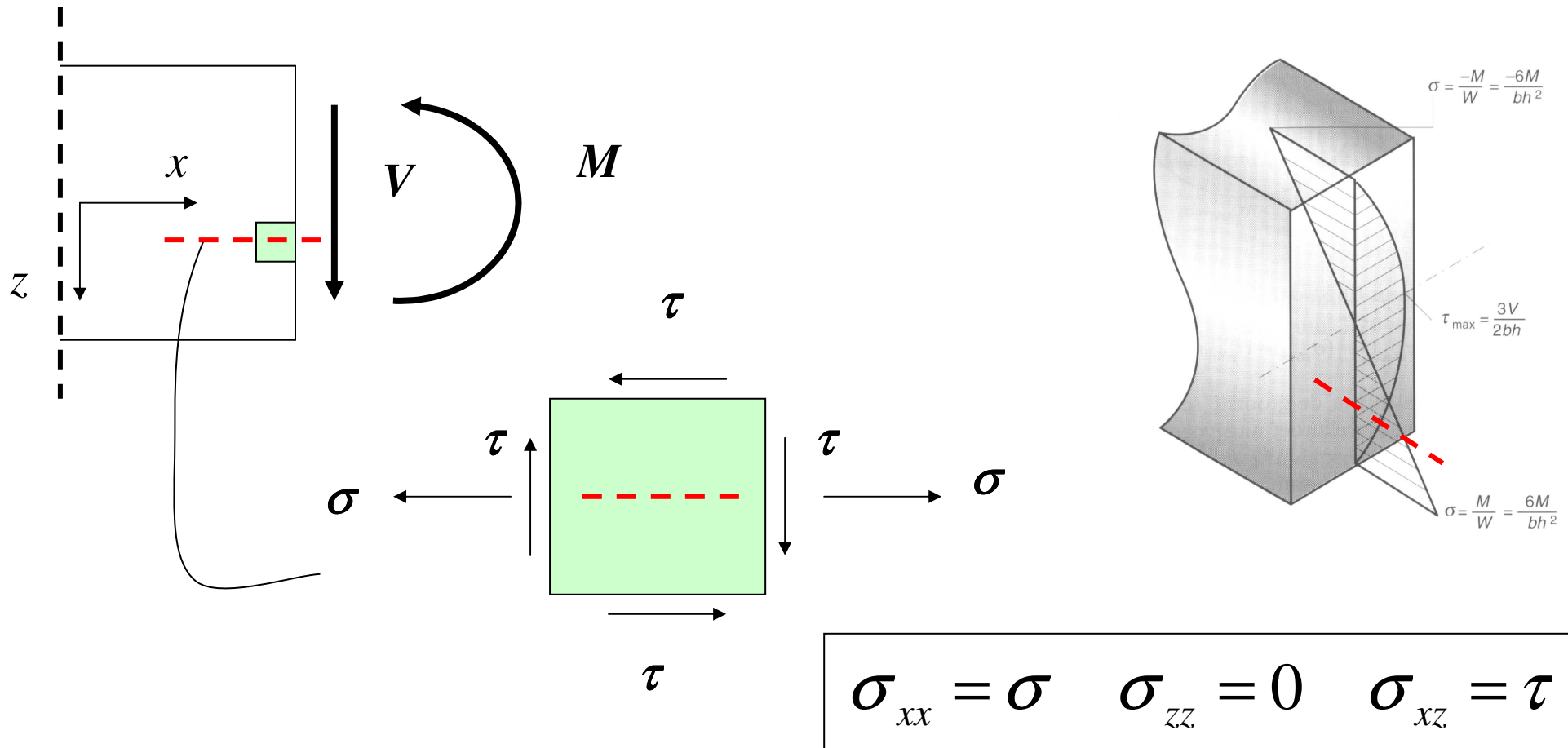


$$\frac{1}{6} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\} - \frac{1}{3} f_y^2 \leq 0$$

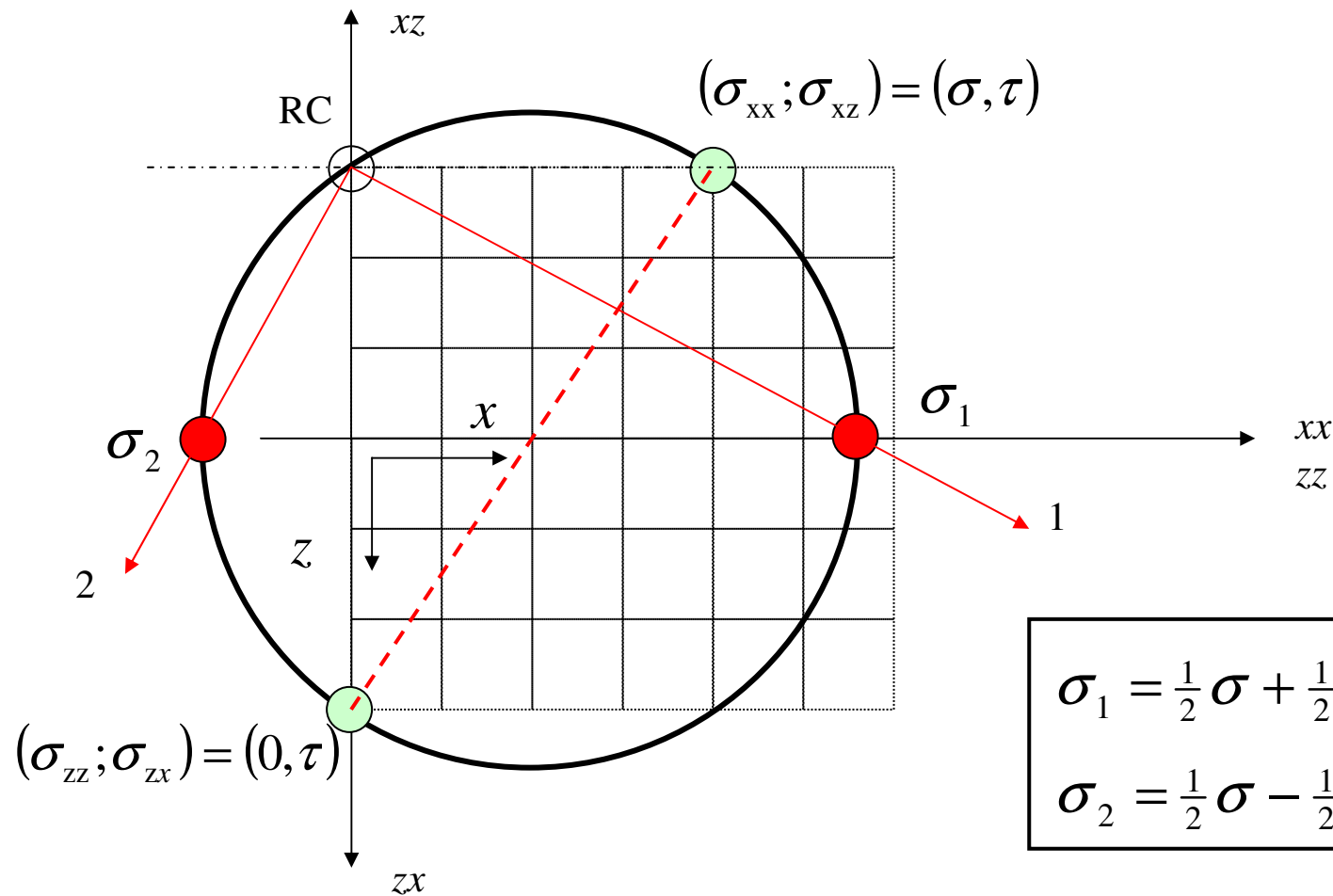
VLOEICRITERIUM VAN VON MISES (1-2 ruimte)



VON MISES (VLAKSPANNING IN EEN BALK)



HOOFDSPANNINGEN IN DE BALK ? (cirkel van Mohr)



$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\end{aligned}$$

HOOFDSPANNINGEN IN DE BALK ? (transformatieformules)

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})\right]^2 + \sigma_{xz}^2}$$

$$\text{met: } \sigma_{xx} = \sigma \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \sigma_{xz} = \tau$$

invullen:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

zie diktaat pag 24

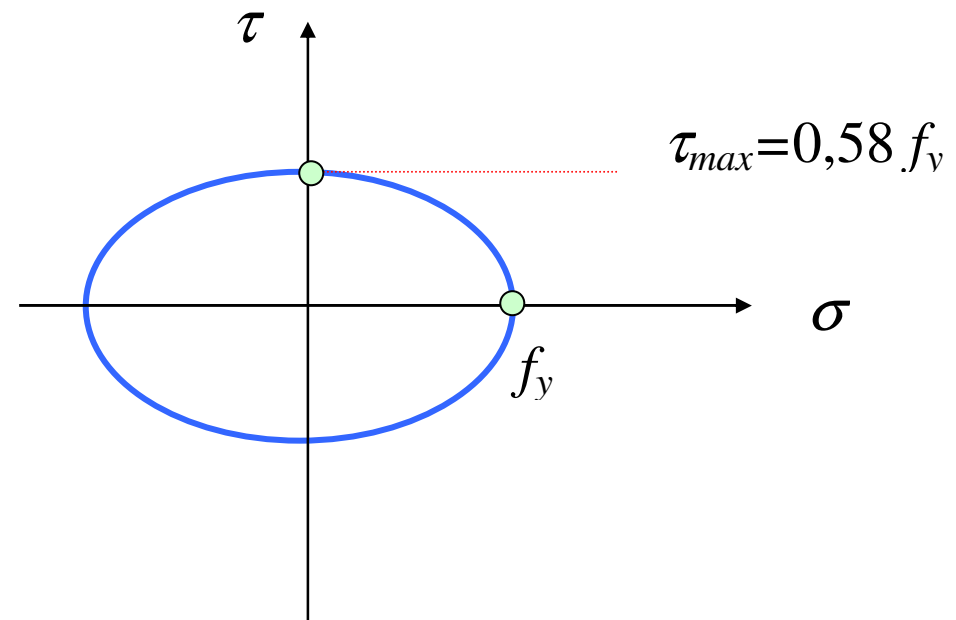
TOEPASSEN VAN VON MISES IN 2-D (balk)

$$\frac{1}{6} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 \} - \frac{1}{3} f_y^2 \leq 0$$

invullen:

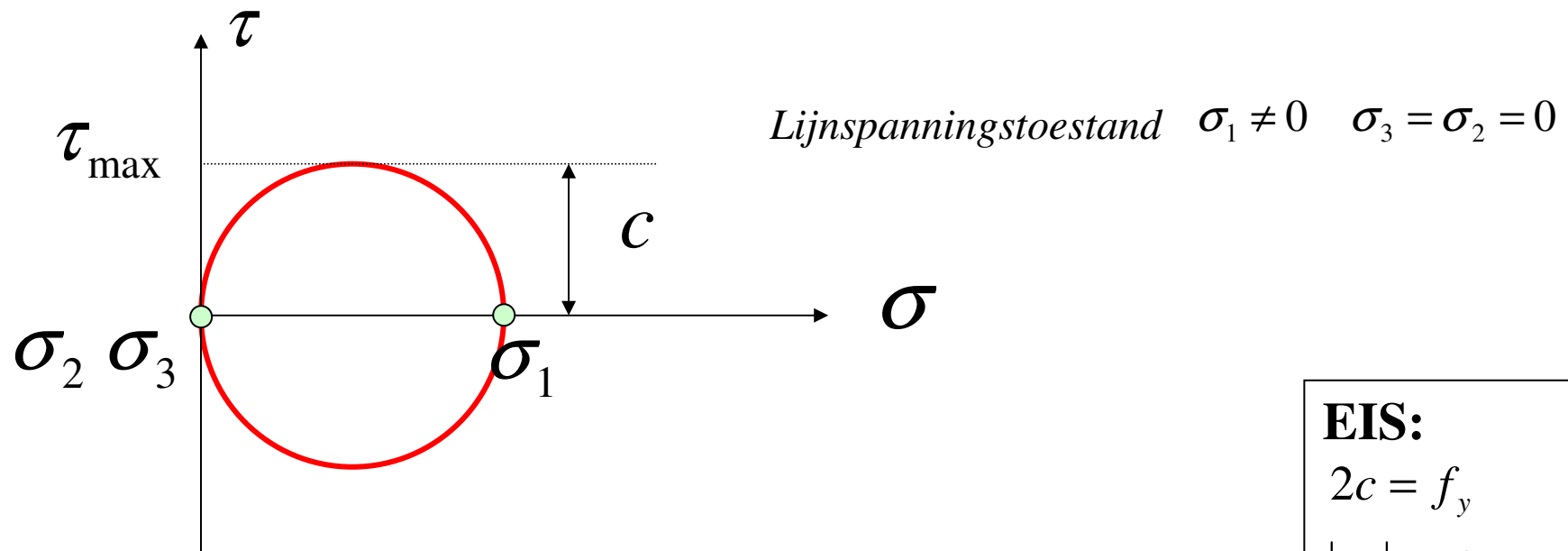
$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq f_y$$

(Huber – Hencky)



VLOEICRITERIUM VAN TRESCA (lijnsparing)

Vloei indien de schuifspanning een grenswaarde bereikt



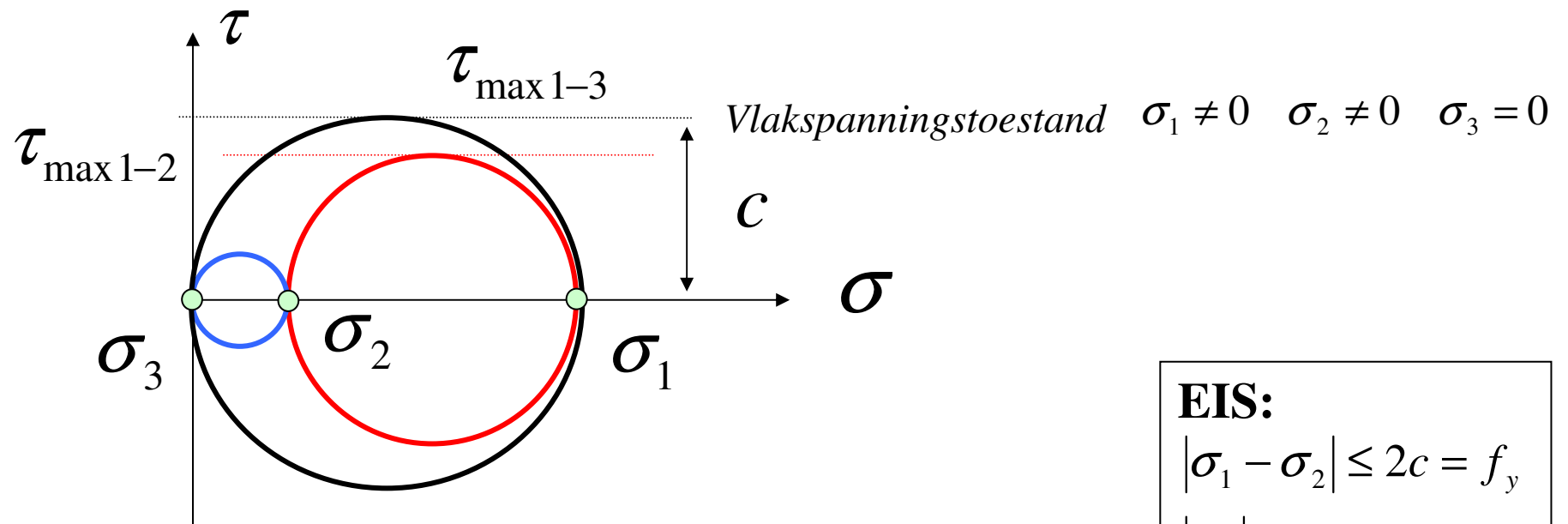
EIS:

$$2c = f_y$$

$$|\sigma_1| \leq f_y$$

VLOEICRITERIUM VAN TRESCA (vlakspanning)

Vloei indien de schuifspanning een grenswaarde bereikt



EIS:

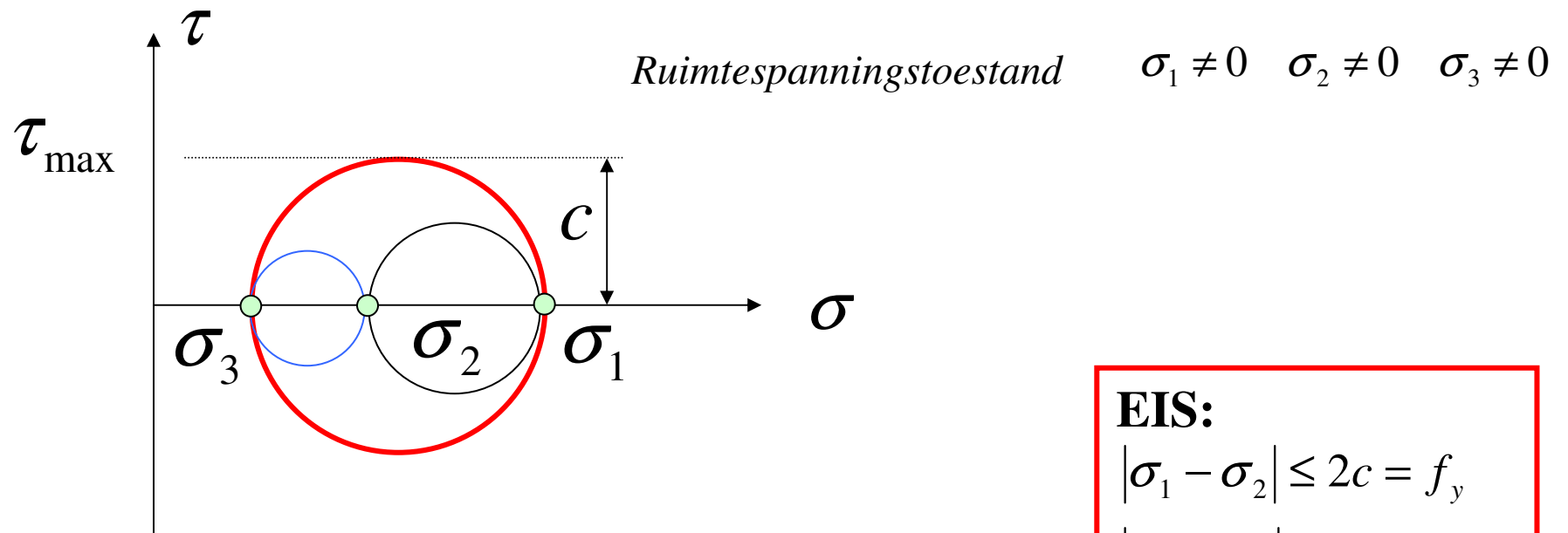
$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2c = f_y$$

$$|\sigma_2| \leq f_y$$

$$|\sigma_1| \leq f_y$$

VLOEICRITERIUM VAN TRESCA (ruimtespanning)

Vloei indien de schuifspanning een grenswaarde bereikt



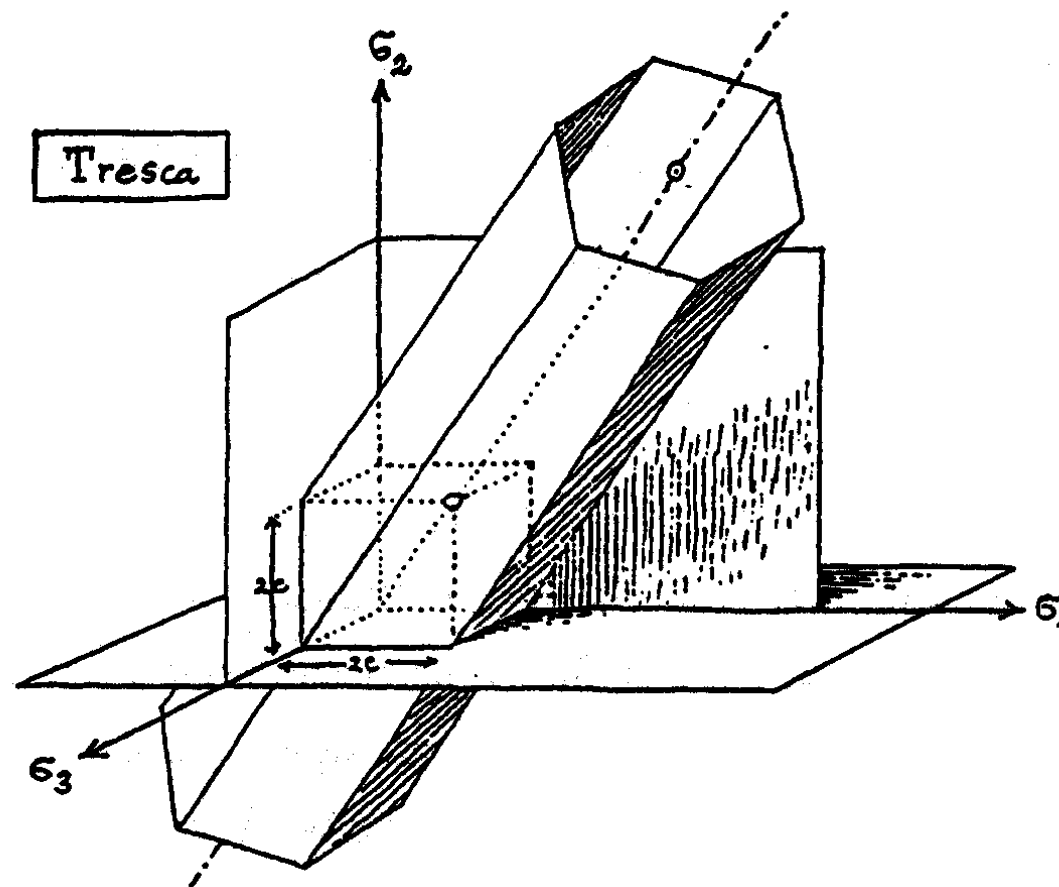
EIS:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2c = f_y$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| \leq 2c = f_y$$

$$|\sigma_3 - \sigma_1| \leq 2c = f_y$$

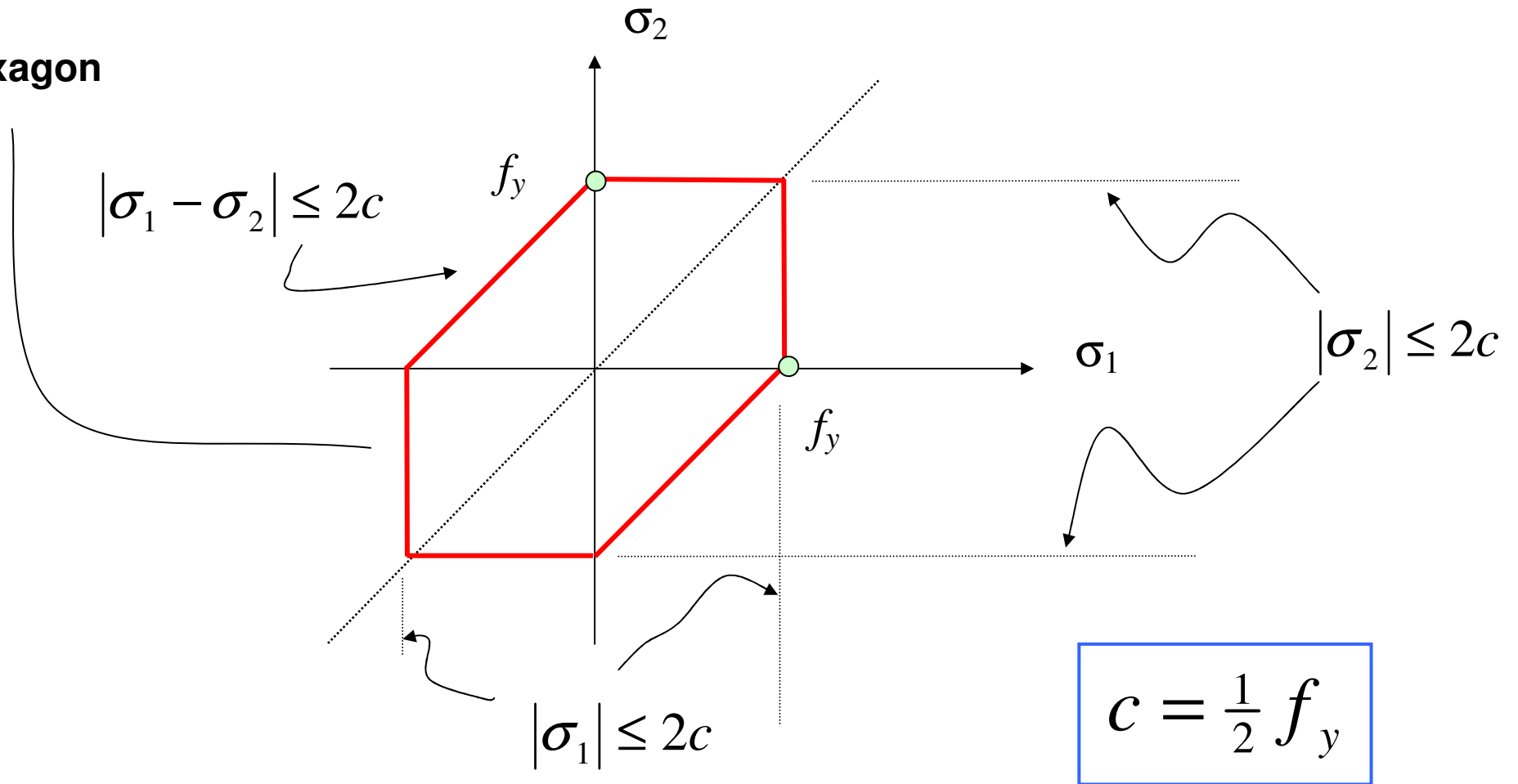
VLOEICRITERIUM VAN TRESCA (1-2-3 ruimte)



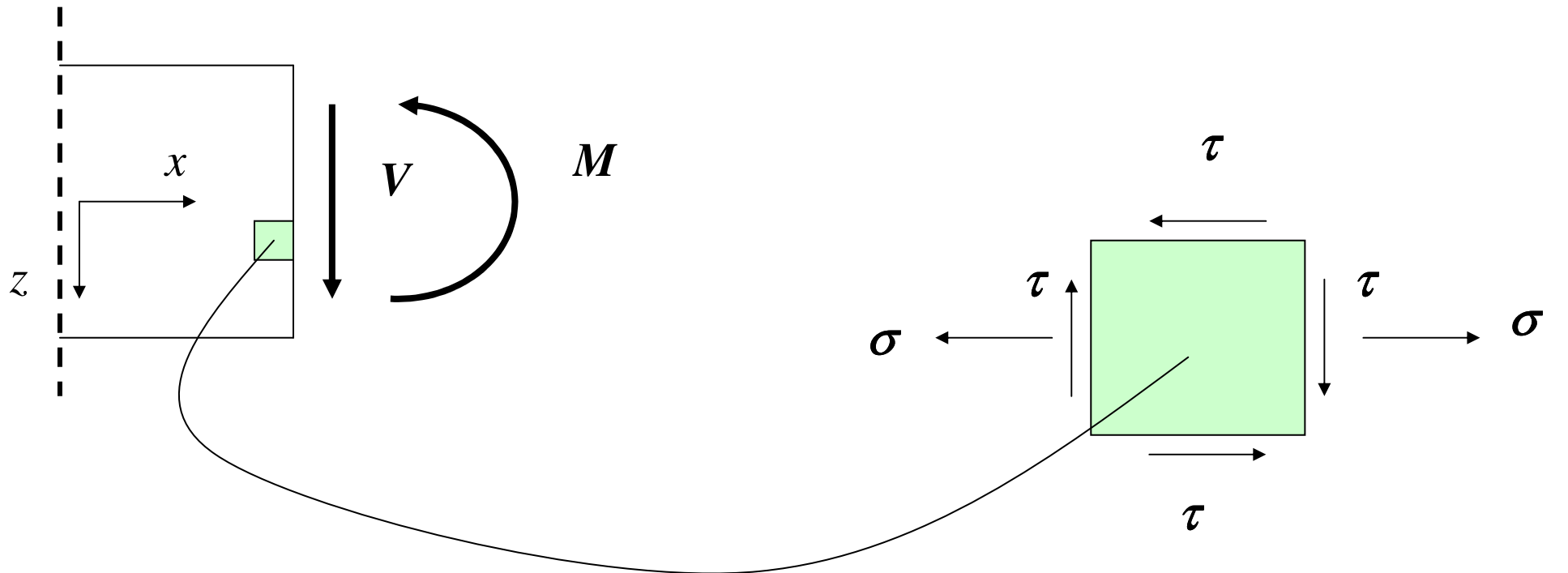
VLOEICRITERIUM VAN TRESCA

(1-2 ruimte)

Hexagon



TRESCA (VLAKSPANNING IN EEN BALK)



$$\sigma_{xx} = \sigma \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \sigma_{xz} = \tau$$

HOOFDSPANNINGEN IN DE BALK ?

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) \right]^2 + \sigma_{xz}^2}$$

$$\text{met: } \sigma_{xx} = \sigma \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \sigma_{xz} = \tau$$

invullen:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

zie diktaat pag 24

TOEPASSEN VAN TRESCA IN 2-D (balk)

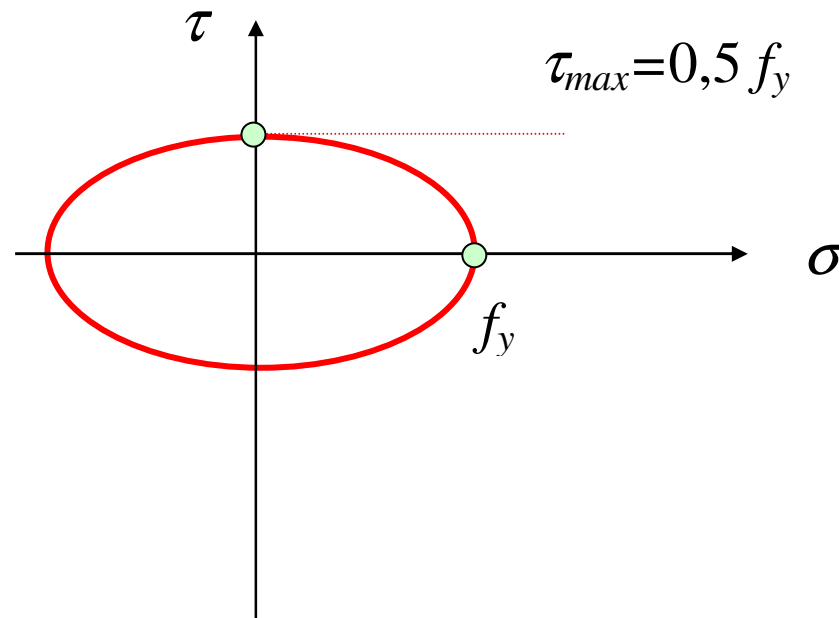
$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq f_y$$

$$|\sigma_2| \leq f_y$$

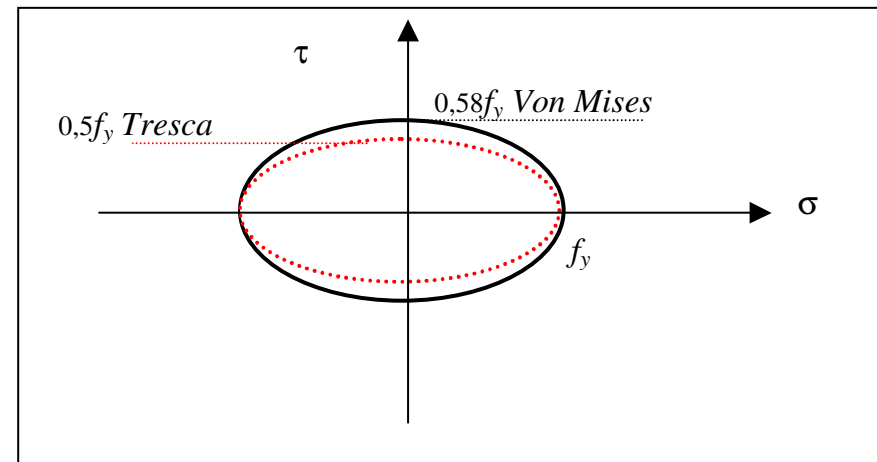
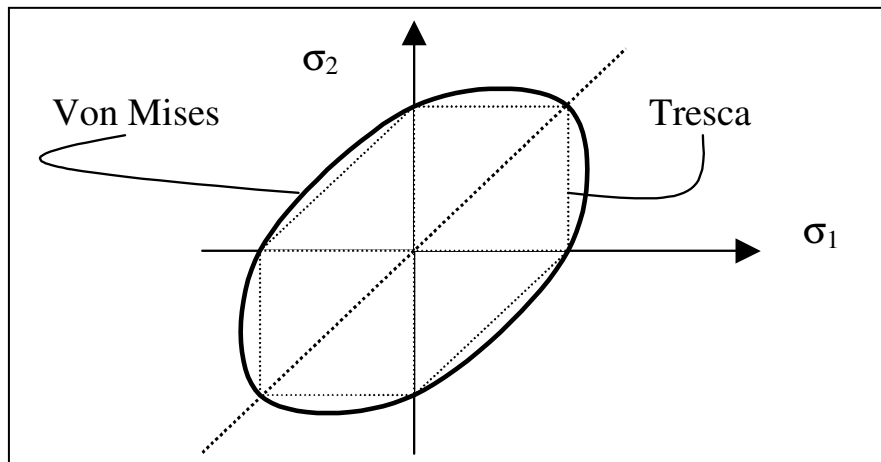
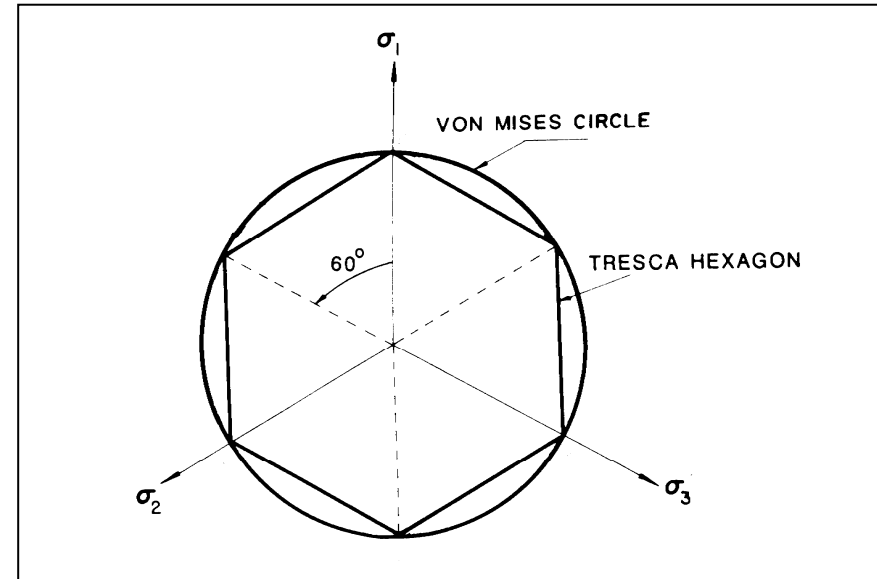
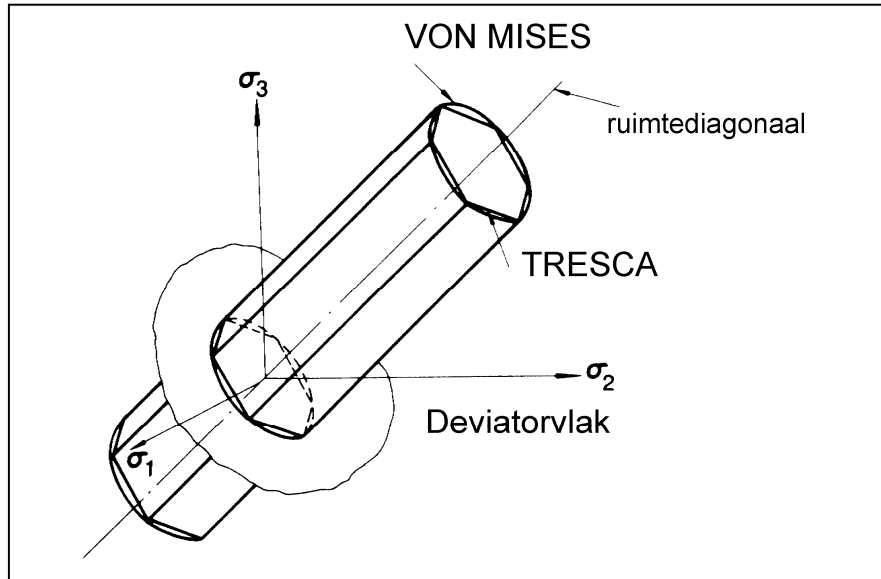
$$|\sigma_1| \leq f_y$$

invullen:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq f_y$$

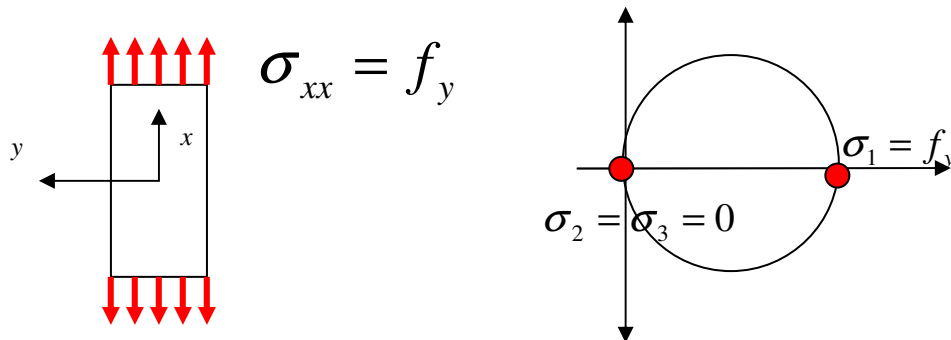


VON MISES VERSUS TRESCA



VON MISES

CRITERIUM OP BASIS VAN EEN TREKPROEF



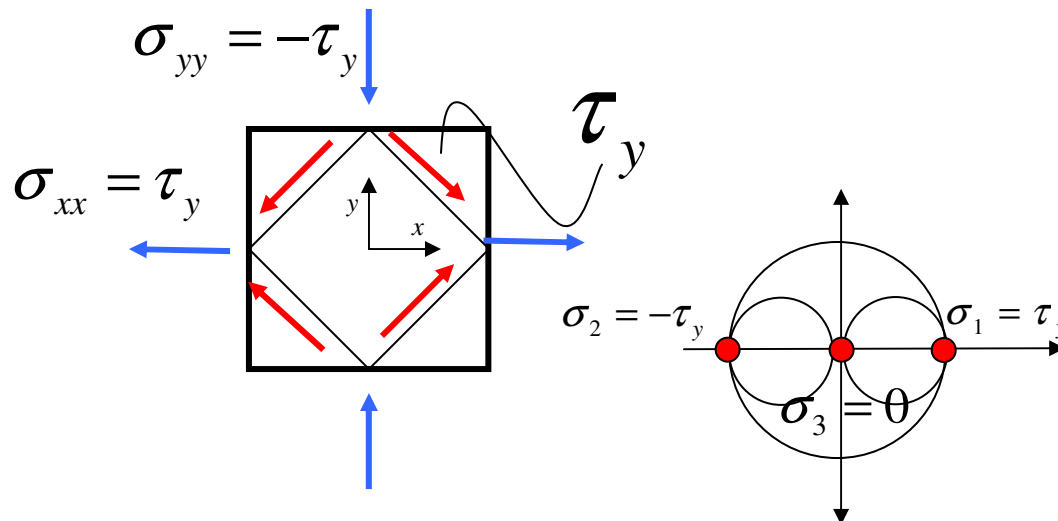
$$\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = s_{\max}^2$$

$$s_{\max}^2 = \frac{2}{3} f_y^2$$

Von Mises (op basis van een trekproef)

$$\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - \frac{1}{3} f_y^2 \leq 0$$

CRITERIUM OP BASIS VAN EEN AFSCHUIFPROEF



$$\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = s_{\max}^2$$

$$s_{\max}^2 = 2\tau_y^2$$

Von Mises : (op basis van een afschuifproef)

$$\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - \tau_y^2 \leq 0$$

SAMENVATTEND : TRESKA VERSUS VON MISES

