

CONSTRUCTIEMECHANICA 4
CTB3330

**MODULE :NIET-SYMMETRISCHE EN
INHOMOGENE DOORSNEDEN**

COEN HARTSUIJKER
HANS WELLEMAN

Civiele Techniek
TU-Delft

Februari 2021

INHOUDSOPGAVE

1. NIET-SYMMETRISCHE EN INHOMOGENE DOORSNEDEN.....	1
1.1 SCHETS VAN HET PROBLEEM EN AANNAMEN	1
1.2 HOMOGENE DOORSNEDEN	4
1.2.1 Kinematische betrekkingen	4
1.2.1.1 Kromming.....	6
1.2.1.2 Neutrale lijn	7
1.2.2 Constitutieve relaties voor homogene niet-symmetrische doorsneden.....	8
1.2.2.1 Momenten.....	10
1.2.2.2 Eigenschappen van de constitutieve relatie voor buiging	11
1.2.3 Statische betrekkingen.....	13
1.2.4 Differentiaalvergelijkingen	14
1.2.5 Voorbeeld 1 : Homogene niet-symmetrische doorsneden	15
1.2.6 Normaalspanningen in de doorsnede in het y-z-assenstelsel	19
1.2.7 Normaalspanningen in de doorsneden in de hoofdrichtingen.....	20
1.2.8 Voorbeeld 2 : Spanningen in een niet-symmetrische doorsnede	21
1.2.9 Samenvattende conclusies.....	27
1.3 UITBREIDING VAN DE THEORIE VOOR INHOMOGENE DOORSNEDEN.....	28
1.3.1 Ligging van het NC voor inhomogene doorsneden	31
1.3.2 Voorbeeld 3 : Normaalkrachtencentrum versus zwaartepunt.....	32
1.3.3 Voorbeeld 4 : Spanningen in een inhomogene doorsnede.....	33
1.4 KRACHPUNT IN DE DOORSNEDE	36
1.5 KERN VAN DE DOORSNEDE	38
1.5.1 Voorbeeld 5 : Kern van een niet-symmetrische doorsnede	42
1.6 TEMPERATUURINVLOEDEN*	44
1.6.1 Voorbeeld 6 : Statisch bepaalde constructie onder temperatuurbelasting.....	47
1.6.2 Voorbeeld 7 : Statisch onbepaalde constructie onder temperatuurbelasting.....	51
1.7 SCHUIFSPANNINGEN IN NIET-SYMMETRISCHE EN OF INHOMOGENE DOORSNEDEN	55
1.7.1 Schuifspanningsformules als y- en z hoofdrichtingen zijn.....	56
1.7.1.1 Voorbeeld 8 : Schuifspanning in een samengestelde doorsnede.....	58
1.7.2 Algemeen geldende schuifspanningsformules	59
1.7.2.1 Voorbeeld 9 : Schuifspanning in niet-symmetrische doorsnede	60
1.7.2.2 Voorbeeld 10 : Schuifkracht in een inhomogene doorsnede.....	66
1.7.3 Dwarskrachtencentrum voor niet-symmetrische dunwandige doorsneden.....	68
1.7.3.1 Voorbeeld 11 : Dwarskrachtencentrum in een niet-symmetrische dunwandige doorsnede	69
BIJLAGE A	75
APPENDIX B	77
2. OPGAVEN.....	79
2.1 DOORSNEDE GROOTHEDEN	79
2.2 NORMAALSPANNINGEN BIJ BUIGING	82
2.3 NORMAALSPANNINGEN BIJ BUIGING MET NORMAALKRACHT	87
2.4 INHOMOGENE DOORSNEDEN BELAST OP NORMAALKRACHT	89
2.5 INHOMOGENE DOORSNEDEN BELAST OP BUIGING	90
2.6 KERN	93
2.7 SCHUIFSPANNINGEN BIJ BUIGING.....	96

STUDIEAANWIJZINGEN

Dit dictaat maakt onderdeel uit van de leerstof van ConstructieMechanica 4 (CM4). De theorie en voorbeelden in dit dictaat zijn zo uitgewerkt dat in zelfstudie dit onderdeel bestudeerd kan worden. Naast dit dictaat met de theorie en voorbeelden is er extra oefenmateriaal beschikbaar via het internet. Daarnaast zijn de sheets die op het college worden gebruikt te downloaden via BlackBoard of via het internet. Deze site is te vinden op:

http://icozct.tudelft.nl/TUD_CT/

In dit dictaat wordt verwezen naar de leermiddelen van CM1 en CM2:

- Toegepaste Mechanica deel 1 : Evenwicht, C. Hartsuijker
- Toegepaste Mechanica deel 2 : Spanningen, vervormingen, verplaatsingen, C. Hartsuijker
- Toegepaste Mechanica deel 3 : Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse, C. Hartsuijker en J.W. Welleman.

Deze leermiddelen zullen worden aangeduid met MECH-1, MECH-2 en MECH-3.

De antwoorden van de in dit dictaat opgenomen vragen zijn via internet te vinden. Eventuele uitleg over de opgaven kan worden verkregen bij de Student-Assistenten van ConstructieMechanica.

Ondanks alle inspanningen is het niet uitgesloten dat er onvolkomenheden in het dictaat voorkomen. Ik stel het zeer op prijs dat indien er fouten of onduidelijkheden worden geconstateerd, deze worden gemeld. Op internet wordt een wijzigingsblad bijgehouden waarin fouten worden verzameld.

De docent,

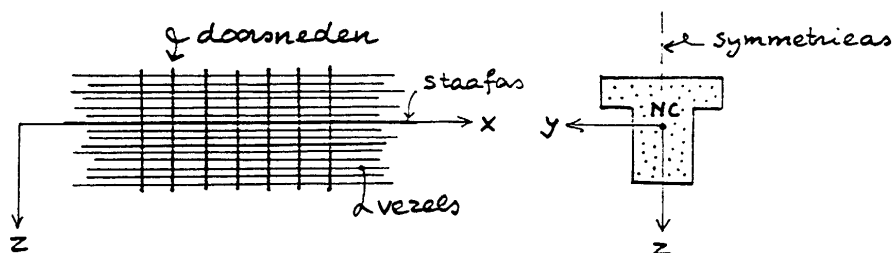
Hans Welleman
pdf-versie 12-1, Februari 2021
j.w.welleman@tudelft.nl

1. NIET-SYMMETRISCHE EN INHOMOGENE DOORSNEDEN

In deze module wordt het eerder in TM-CH-2 geïntroduceerde vezelmodel voor staven toegepast op niet-symmetrische en inhomogene doorsneden. Met de hier gepresenteerde aanpak is het mogelijk om spanningen en vervormingen te bepalen voor staven waarvan de doorsnede uit verschillende materialen bestaat (inhomogeen) en/of waarvan de geometrie geen symmetrie-as heeft (niet-symmetrisch).

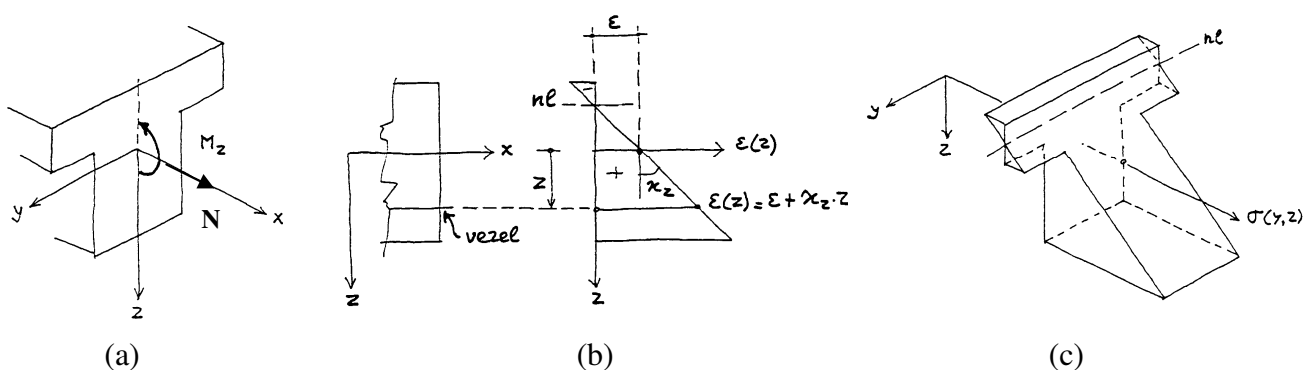
1.1 Schets van het probleem en aannamen

De staven die tot nu toe zijn behandeld hadden tenminste één symmetrie-as en de doorsnede bestond uit één materiaal (homogene doorsnede). Met behulp van het “vezelmodel” wordt de doorsnede opgebouwd gedacht uit tegen elkaar liggende vezels, evenwijdig aan de staafas, die op hun plaats worden gehouden door een oneindig aantal starre vlakken (doorsneden) die loodrecht op deze vezels staan. In figuur 1 wordt dit model getoond met het aan te houden assenstelsel en de ligging van het Normaalkrachten Centrum NC. Voor een uitgebreide beschrijving van dit model wordt verwezen naar hoofdstuk 4 van MECH-2¹.



Figuur 1 : Vezelmodel en een doorsnede met één symmetrie-as.

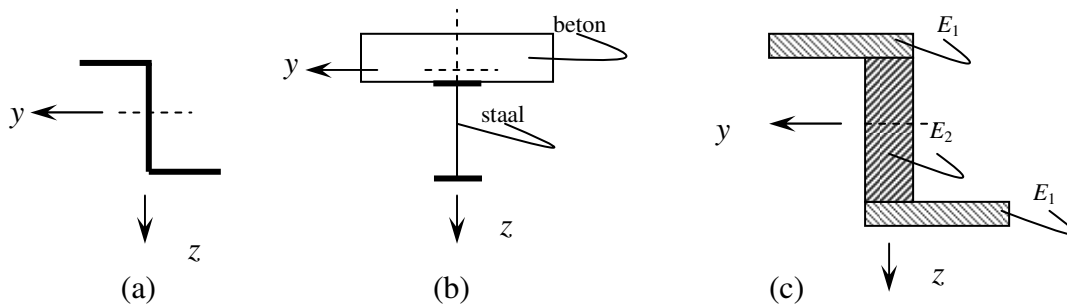
Als de doorsnede wordt belast op één buigend moment en een normaalkracht zullen de vezels aan de trekzijde verlengen en aan de drukzijde verkorten. Vanwege het feit dat de doorsnede star is zullen de doorsneden vlak blijven. Deze aanname staat bekend als de hypothese van Bernoulli. In figuur 2a zijn de snedekrachten weergegeven en in figuur 2b de daardoor ontstane rekken in de vezels. Met de aanname dat de spanningen lineair afhankelijk zijn van de rek (wet van Hooke) kan met de rekverdeling de normaalspanningsverdeling in de doorsnede worden gevonden, zie figuur 2c.



Figuur 2 : Buiging en extensie in een homogene doorsnede met één symmetrie-as.

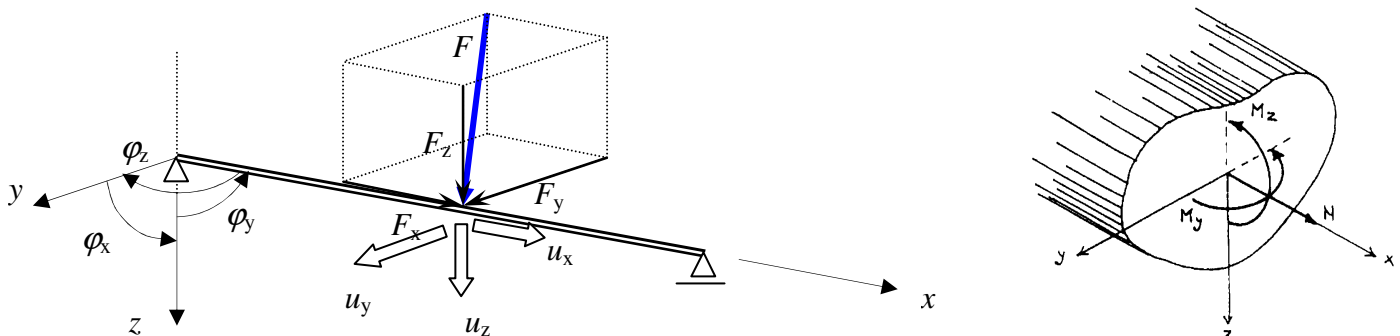
¹ C. Hartsuijker, Toegepaste Mechanica, Deel 2 Spanningen, vervormingen, verplaatsingen, ISBN 9039505942

Op basis van dit model zijn in MECH-2 de spanningsformules voor buiging en extensie afgeleid. Als de doorsnede echter niet-symmetrisch is en/of deze uit verschillende materialen bestaat, zijn de gevonden spanningsformules niet geldig. Voorbeeld van dergelijke situaties zijn hieronder in figuur 3 weergegeven.



Figuur 3 : Voorbeelden van niet-symmetrische en/of inhomogene doorsneden.

In (a) is sprake van een homogene, niet-symmetrische doorsnede, in (b) is sprake van een inhomogene doorsnede met één symmetrie-as en in (c) is sprake van een niet-symmetrische en inhomogene doorsnede. Naast het feit dat deze doorsneden niet-symmetrisch en/of inhomogeen zijn hebben we ook in het algemeen te maken met twee buigende momenten en een normaalkracht die in de doorsnede kunnen werken en leiden tot verlengingen en verkortingen van de “vezels” in het “vezelmodel”. De gebruikelijke definities voor de normaalkracht, de buigende momenten en de verplaatsingen die kunnen ontstaan zijn in figuur 4 weergegeven, zie hiervoor ook paragraaf 1.3.2 uit MECH-1.



Figuur 4 : Snedekrachten en verplaatsingen.

Ook kunnen er in twee richtingen natuurlijk dwarskrachten op de doorsnede werken maar die leiden in dit model niet tot rekken in de vezels en zullen daarom aan het einde van deze module apart worden behandeld waarbij het schuifspanningsverloop in de doorsnede en het dwarskrachtencentrum van de doorsnede aan de orde komen.

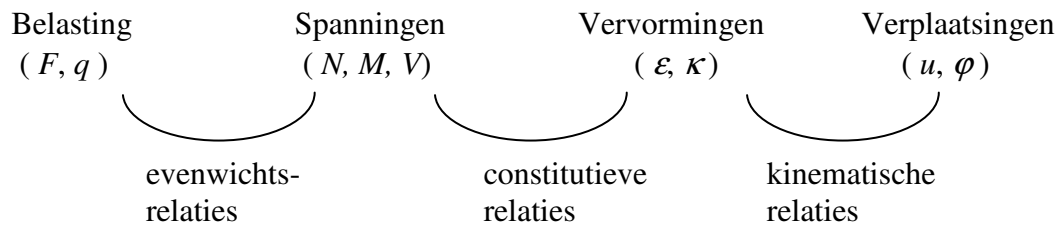
De centrale vraag in dit geheel is :

‘Welke spanningen en rekken ontstaan t.g.v. extensie en buiging in een niet-symmetrische en/of inhomogene doorsnede’ ?

Om op deze vraag te kunnen beantwoorden kan de vraag worden opgedeeld in een aantal deelvragen waarmee stapsgewijs de puzzel kan worden ontrafeld. Deze deelvragen zijn :

- Hoe kunnen de rekken van de vezels worden bepaald op basis van de verplaatsingen van de doorsnede ?
- Hoe kunnen uit deze rekken de normaalspanningen in de vezels worden bepaald ?
- Welke snedekrachten horen bij de gevonden normaalspanningen ?

In deze deelvragen wordt de standaard aanpak van de Toegepaste Mechanica herkend:



Figuur 5 : Relaties in de Toegepaste Mechanica.

Deze aanpak sluit naadloos aan op de eerder gevolgde aanpak van MECH-2. De daar genoemde aannamen gelden ook hier :

1. Vlakke doorsneden blijven vlak en staan zowel voor als na vervorming van de staaf loodrecht op de vezelrichting (hypothese van Bernoulli). De doorsneden zijn dus oneindig stijf en daarom wordt in dit verband gesproken van de starre doorsnede.
2. De doorsneden ondergaan kleine rotaties, $\varphi \ll 1$
3. In de staaf heerst een lijnspanningstoestand (volgt direct uit het gekozen vezelmodel)
4. De vezels gedragen zich lineair elastisch : $\sigma = E\varepsilon$ (wet van Hooke)

In de hiervoor weergegeven afbeeldingen is gebruik gemaakt van een x - y - z assenstelsel. De x -as loopt daarbij altijd evenwijdig aan de staafas. De ligging van de doorsnede ligt vast met de x -coördinaat. In de doorsnede ligt de plaats van een vezel vast met de y - en z -coördinaat. De x -as wordt altijd evenwijdig aan de vezelrichting gekozen. Zoals weergegeven in figuur 1 gaat de x -as door het Normaalkrachten Centrum NC van de doorsnede. Dit is een speciale keuze waarvan we in de afleiding niet a priori vanuit zullen gaan.

Alle grootheden die binnen de doorsnede niet constant zijn worden als functies van y en z gepresenteerd. Het gaat dan bijvoorbeeld om de spanningen en rekken :

$$\varepsilon(y, z)$$

$$\sigma(y, z)$$

In de afleiding die volgt zal onderscheid gemaakt worden tussen homogene en inhomogene doorsneden waardoor de theorie stapsgewijs zal worden opgebouwd. In een homogene doorsnede hebben alle vezels dezelfde elasticiteitsmodulus E . In een inhomogene doorsnede kan de elasticiteitsmodulus afhankelijk van de plaats in de doorsnede variëren. Hiervoor geldt dan:

$$E(y, z)$$

Dat deze grootheden ook functies van x kunnen zijn wordt in de schrijfwijze (in het algemeen) niet meegenomen.

In de volgende paragrafen zal deze aanpak voor extensie en buiging eerst voor niet-symmetrische en vervolgens voor inhomogene doorsneden worden uitgewerkt. Daarna zal een algemene methode worden beschreven voor het bepalen van de kern van de doorsnede. De module wordt afgesloten met een methode voor de bepaling van de schuifspanningen t.g.v. buiging in niet-symmetrische en/of inhomogene doorsneden.

1.2 Homogene doorsneden

De in figuur 5 geschetste relaties zullen eerst worden uitgewerkt voor een homogene doorsnede die niet-symmetrisch mag zijn.

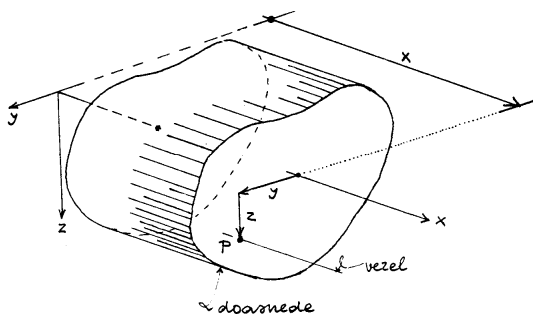
1.2.1 Kinematische betrekkingen

De kinematische relaties leggen een verband tussen verplaatsingen en vervormingen. In een op buiging en extensie belaste staaf kan de doorsnede drie translaties en drie rotaties ondergaan :

$$u_x, u_y, u_z \text{ en } \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$$

We maken daarbij gebruik van de eerder gemaakte afspraken, zie figuur 4.

Als de verplaatsing van de doorsnede beschreven kan worden met deze zes vrijheidsgraden dan kan ook de verplaatsing u in de richting van de vezel (x -as) in ieder willekeurig punt worden beschreven. Stel dat er een punt $P(x,y,z)$ ligt in een doorsnede op afstand x van de oorsprong, zie figuur 6.

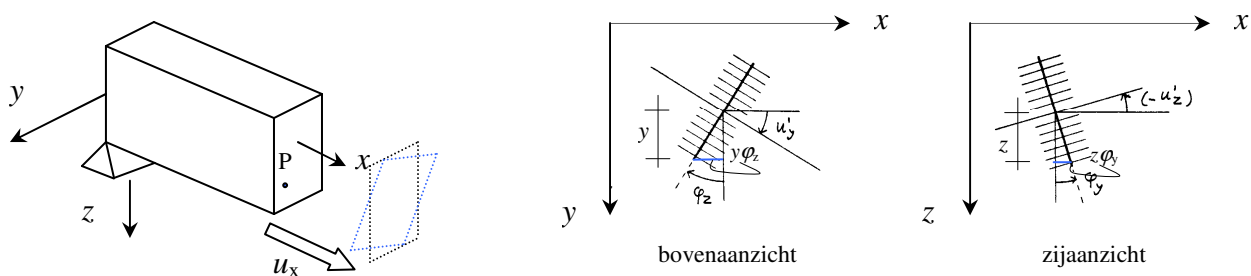


Figuur 6 : Punt $P(x,y,z)$ in de doorsnede

Als de doorsnede waarin P ligt in de x -richting u_x verplaatst, φ_y roteert om de y -as en φ_z roteert om de z -as dan kan de verplaatsing u in de richting van de vezel in P worden beschreven met (onder de aanname dat rotaties klein zijn, zie paragraaf 15.3.2 uit MECH-1):

$$u(x, y, z) = u_x - y\varphi_z + z\varphi_y$$

In figuur 7 is dit verduidelijkt aan de hand van de verplaatste doorsnede (gestippeld) die vervolgens ook geroteerd is om de y - en z -as. De invloed daarvan op de verplaatsing u is in het zij- en bovenaanzicht weergegeven.



Figuur 7 : Verplaatsingen in de vezelrichting t.g.v. rotaties φ_y en φ_z .

Vanwege de aanname dat de rotaties klein zijn mogen hun invloeden worden gesuperponeerd. De verplaatsingsgrootheden u_x , φ_y en φ_z behoren bij de doorsnede waarin punt P ligt en zijn dus *doorsnede gerelateerd* en zodoende alleen functies van x . Anders gezegd : De verplaatsing van een willekeurige vezel in een doorsnede op coördinaat x wordt beschreven met deze drie verplaatsingsgrootheden.

Nu de verplaatsing in de vezelrichting is bepaald kan ook de rek in deze vezel worden gevonden. Er geldt immers:

$$\begin{aligned}\varepsilon(y, z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = \frac{du_x}{dx} - y \frac{d\varphi_z}{dx} + z \frac{d\varphi_y}{dx} \\ \varepsilon(y, z) &= u'_x - y\varphi'_z + z\varphi'_y\end{aligned}\quad (a)$$

De rotaties φ_y en φ_z kunnen worden uitgedrukt in de verplaatsingsgrootheden u_y en u_z . Zie hiervoor figuur 7.

$$\begin{aligned}\varphi_y &= -\frac{du_z}{dx} = -u'_z \\ \varphi_z &= +\frac{du_y}{dx} = u'_y\end{aligned}$$

Het tekenverschil is een direct gevolg van de definities van de rotaties (ga dat zelf na !)

De rek volgens (a) in de vezel door P kan nu worden geschreven als:

$$\varepsilon(y, z) = u'_x - yu''_y - zu''_z \quad (b)$$

De rek in een vezel is dus gelijk aan de rek in de vezel die samenvalt met de x -as plus de rek ten gevolge van de buiging (kromming) om de y - en z -as van de vezel langs de x -as. Uitdrukking (b) kan herschreven worden door de volgende vervormingsgrootheden van de doorsnede in te voeren:

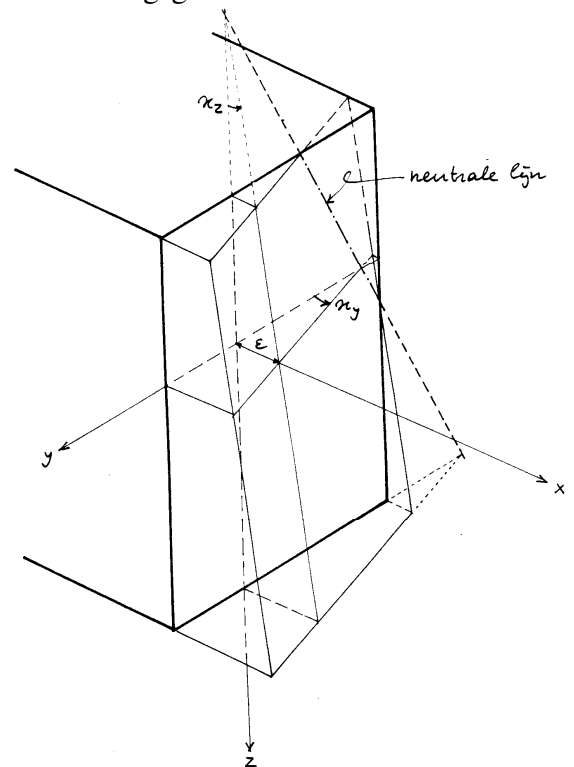
$$\begin{aligned}\varepsilon &= u'_x \\ \kappa_y &= -u''_y = -\varphi'_z \\ \kappa_z &= -u''_z = \varphi'_y\end{aligned}\quad (c)$$

Deze relaties worden de kinematische betrekkingen genoemd en leggen voor de doorsnede het verband tussen de vervormingsgrootheden en de verplaatsingsgrootheden.

Met de kinematische betrekkingen (c) kan de rek in een vezel volgens (b) worden geschreven als:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z$$

In figuur 8 is het rekverloop over de doorsnede weergegeven. Uit de aanname dat vlakke doorsneden vlak blijven volgt dat het rekverloop een vlak is waarvan de hellingen in in y - en z -richting respectievelijk κ_y en κ_z zijn. Hieruit volgt ook dat κ_y en κ_z constant moeten zijn over de gehele doorsnede.

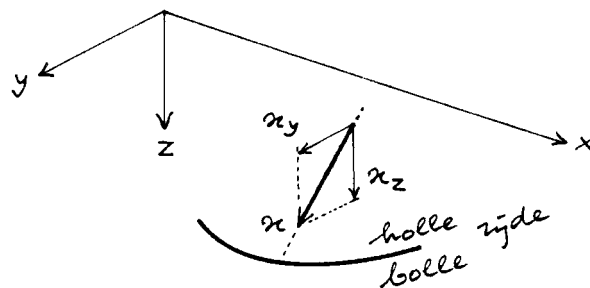


Figuur 8 : Rekverloop over de doorsnede.

Uit figuur 8 is tevens op te maken dat de positieve krommingen voor positieve waarden van y en z positieve rekken veroorzaken. Dit is geheel in overeenstemming met de definitie voor een positieve kromming zoals deze eerder in MECH-2 is ingevoerd.

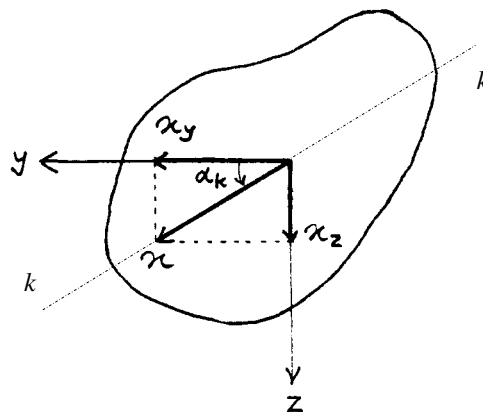
1.2.1.1 Kromming

De kromming van de staaf kan opgebouwd gedacht worden uit een kromming in het x - y -vlak en een kromming in het x - z -vlak. Deze krommingen worden aangeduid met respectievelijk κ_y en κ_z . Dit zijn de componenten van de vector κ . In figuur 9 is dit weergegeven. Het bewijs dat de kromming zich gedraagt als een tensor van de 1^e orde wordt in bijlage A gegeven.



Figuur 9 : Kromming als vector.

Dat de kromming een vector is houdt in dat deze een grootte en een richting heeft. Als tekenafspraken wordt aangehouden dat de pijl van de vector van de holle naar de bolle kant van de staaf wijst. Als de kromming in de doorsnede wordt weergegeven ontstaat figuur 10. Het vlak van de kromming wordt aangeduid met de letter k .



Figuur 10 : Aangeven van de kromming in de doorsnede

De grootte van de totale kromming κ is :

$$\kappa = \sqrt{\kappa_y^2 + \kappa_z^2}$$

De hoek die de kromming κ maakt met de y -as wordt gedefinieerd als :

$$\tan \alpha_k = \frac{\kappa_z}{\kappa_y}$$

1.2.1.2 Neutrale lijn

Met de uitdrukking voor het rekverloop over de doorsnede kan ook een uitdrukking gevonden worden voor de neutrale lijn. Immers per definitie geldt dat de rek nul is t.p.v. de neutrale lijn:

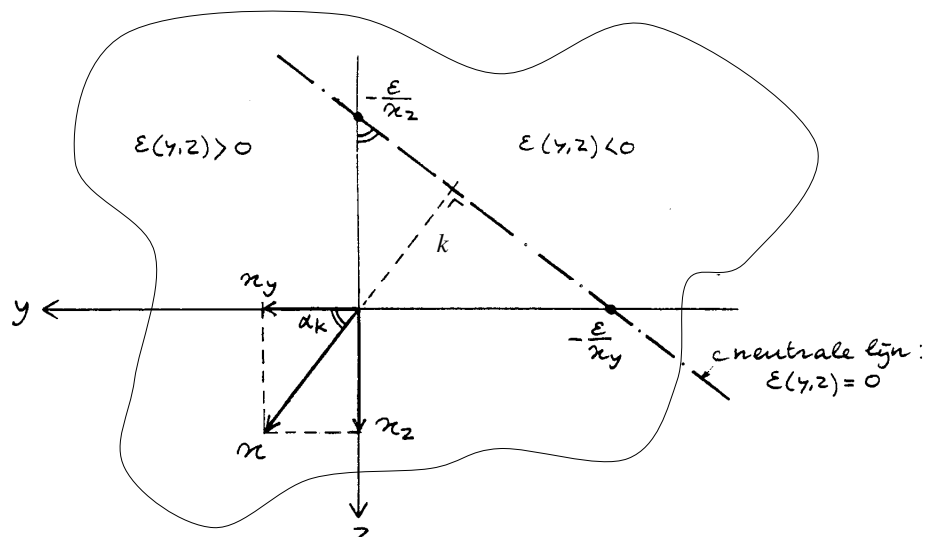
$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z = 0$$

Om de neutrale lijn te kunnen tekenen is het handig om de snijpunten van de neutrale lijn met de coördinaat-assen te bepalen. De neutrale lijn snijdt de assen in de volgende punten.

$$\text{Snijpunt met de } y\text{-as (} z = 0 \text{)} : y = -\frac{\varepsilon}{\kappa_y}$$

$$\text{Snijpunt met de } z\text{-as (} y = 0 \text{)} : z = -\frac{\varepsilon}{\kappa_z}$$

In figuur 11 is de neutrale lijn in het assenstelsel van een doorsnede getekend.



Figuur 11 : Ligging van de neutrale lijn in de doorsnede

Uit deze figuur blijkt dat het vlak k waarin de ligger kromt loodrecht staat op de neutrale lijn. De pijl voor de kromming wijst van de holle zijde (kleinste rek) naar de bolle zijde (grootste rek), in dit geval dus van de *drukzone* naar de *trekzone*.

Opdracht :

Geef het bewijs dat het vlak waarin de ligger kromt loodrecht staat op de neutrale lijn.

1.2.2 Constitutieve relaties voor homogene niet-symmetrische doorsneden

In het gehanteerde vezelmodel wordt uitgegaan van een lineair elastisch materiaalgedrag. De constitutieve relatie, het verband tussen de spanning en de vervorming, wordt in dit geval voorgesteld door de wet van Hooke :

$$\sigma = E \times \varepsilon$$

In een doorsnede wordt de rek en de spanning in een punt aangeduid met behulp van het gekozen assenstelsel:

$$\sigma = \sigma(y, z); \quad \varepsilon = \varepsilon(y, z)$$

Als we ons hier beperken tot homogene doorsneden dan hebben alle vezels in de doorsnede dezelfde elasticiteitsmodulus en geldt :

$$\sigma(y, z) = E \times \varepsilon(y, z)$$

In de op extensie en buiging belaste doorsnede zullen de vezels verlengen of verkorten. Het gedrag van de doorsnede wordt beschreven met de drie hiervoor ingevoerde vervormingsgrootheden die constant zijn voor de gegeven doorsnede:

$$\varepsilon, \quad \kappa_y \quad \text{en} \quad \kappa_z$$

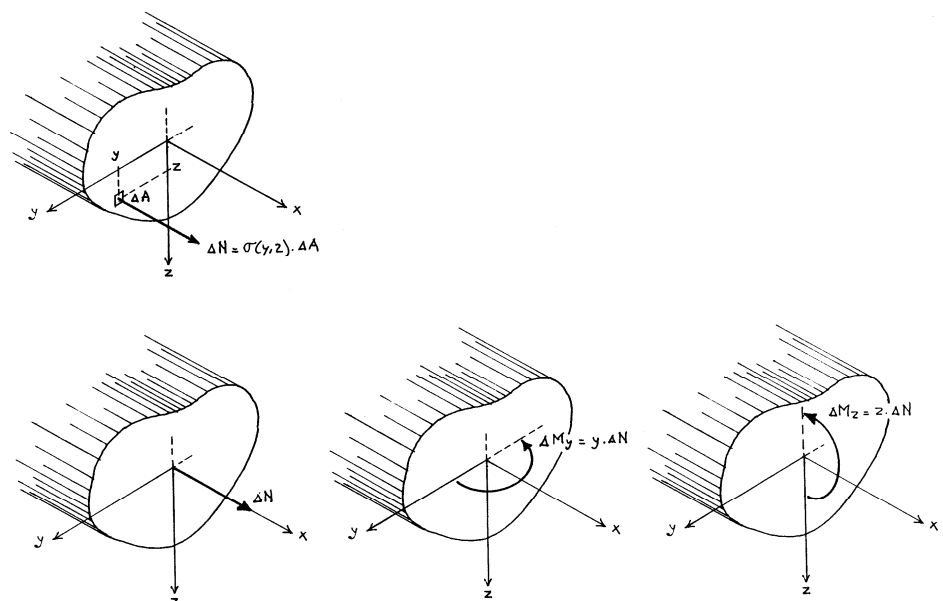
Voor iedere vezel (y, z) in de doorsnede ligt hiermee de rek vast:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z$$

Gebruik makend van het lineaire materiaalgedrag is hiermee ook de spanning in iedere vezel van de doorsnede te bepalen:

$$\sigma(y, z) = E \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z)$$

De relaties tussen de spanning in de vezels in een doorsnede en de snedekrachten die op de doorsnede werken is op identieke wijze te vinden als in 4.3.2 van MECH-2. In figuur 12 is dit nog eens weergegeven.



Figuur 12 : Equivalente snedekrachten behorende bij normaalspanningen werkend op een kleine oppervlakte ΔA van de doorsnede

Voor de normaalkracht N wordt gevonden:

$$N = \int_A \sigma(y, z) dA = \int_A E \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z) dA = E \left[\varepsilon \int_A dA + \kappa_y \int_A y dA + \kappa_z \int_A z dA \right]$$

Voor de buigende momenten M_y en M_z levert dit:

$$M_y = \int_A y \sigma(y, z) dA = \int_A E \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z) y dA = E \left[\varepsilon \int_A y dA + \kappa_y \int_A y^2 dA + \kappa_z \int_A yz dA \right]$$

$$M_z = \int_A z \sigma(y, z) dA = \int_A E \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z) z dA = E \left[\varepsilon \int_A z dA + \kappa_y \int_A yz dA + \kappa_z \int_A z^2 dA \right]$$

In MECH-2 werden de volgende doorsnede-eigenschappen gedefiniëerd waarmee de bovenstaande uitdrukkingen eenvoudiger kunnen worden weergegeven:

$$\begin{aligned} \int_A dA &= A & \int_A y dA &= S_y & \int_A y^2 dA &= I_{yy} \\ \int_A z dA &= S_z & \int_A yz dA &= I_{yz} = I_{zy} \\ \int_A z^2 dA &= I_{zz} \end{aligned}$$

Hierin is A de oppervlakte van de doorsnede, S een oppervlaktemoment van de 1^e orde (statisch moment) en I een oppervlaktemoment van de 2^e orde (traagheidsmoment).

Voorbeelden t.a.v. deze grootheden zijn te vinden in hoofdstuk 3 van MECH-2.

De gevonden relaties tussen de snedekrachten (N , M_y en M_z) werkend op de doorsnede en de vervormingen (ε , κ_y en κ_z) behorende bij de doorsnede worden hiermee:

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon + ES_y\kappa_y + ES_z\kappa_z \\ M_y &= ES_y\varepsilon + EI_{yy}\kappa_y + EI_{yz}\kappa_z \\ M_z &= ES_z\varepsilon + EI_{zy}\kappa_y + EI_{zz}\kappa_z \end{aligned}$$

In matrixvorm kan dit worden genoteerd als:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & ES_y & ES_z \\ ES_y & EI_{yy} & EI_{yz} \\ ES_z & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Merk op dat deze matrix symmetrisch is en dat de termen op de hoofddiagonaal positief zijn.

Als, van de vezel samenvallend met de x -as, de rek en de beide krommingen bekend zijn, dan kunnen met behulp van de hierboven weergegeven relaties de snedekrachten worden bepaald.

De bovenstaande matrix is een stijfheidsmatrix die het verband legt tussen gegeneraliseerde spanningen (snedekrachten N , M_y en M_z) en gegeneraliseerde vervormingen (ε , κ_y en κ_z) en is dus een constitutieve relatie die geldt voor een doorsnede. De afleiding hiervan is gebaseerd op de constitutieve relatie van de enkele vezel.

Uit het bovenstaande blijkt dat alle doorsnede-eigenschappen van de staaf kunnen worden toegedacht aan de ene vezel langs de x -as. Dit bevestigt de opvatting dat een staaf kan worden geschematiseerd tot een lijnelement.

Tot nu toe werd er gewerkt in een volkomen willekeurig gekozen y - z -assenstelsel. Door een bijzondere keuze van de ligging van dit assenstelsel kunnen de constitutieve vergelijkingen sterk worden vereenvoudigd.

Het is gebruikelijk om de oorsprong van het assenstelsel zodanig te kiezen dat de statische momenten S_y en S_z nul zijn. De oorsprong van het y-z-assenstelsel wordt dan gekozen in het *normaalkrachtencentrum* van de doorsnede. Voor een homogene doorsnede valt het normaalkrachtencentrum samen met het zwaartepunt maar voor inhomogene doorsneden geldt dit niet. Dit zal verderop in een voorbeeld worden toegelicht.

Als de oorsprong van het y-z-assenstelsel in het normaalkrachtencentrum NC wordt aangenomen zijn de statische momenten S nul en vereenvoudigen de constitutieve relaties:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{extensie} \\ \text{buiging} \end{matrix}$$

Hieruit is op te maken dat een normaalkracht N , aangrijpend in het normaalkrachtencentrum, alleen leidt tot een rek en dat hierdoor geen krommingen ontstaan. Zie hiervoor ook paragraaf 2.4 uit TM-CH-2. Uit de bovenstaande matrix blijkt dat er geen koppeling is tussen extensie en buiging. We kunnen het bovenstaande stelsel dus ook als volgt weergeven:

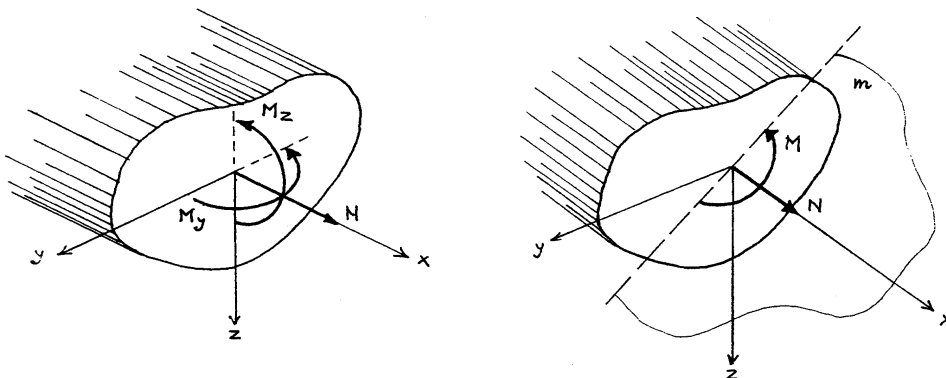
$$N = EA\varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Nieuw element in deze gevonden relaties is de koppeling tussen buiging om de y- en z-as. Vergelijk maar eens de gevonden relaties uit paragraaf 4.3.2 op blz 147 van MECH-2. De koppeling wordt veroorzaakt door het niet-symmetrisch (hoeven) zijn van de doorsnede.

1.2.2.1 Momenten

In figuur 13(a) is een doorsnede met de snedekrachten voor buiging en extensie weergegeven. De momenten M_y en M_z die in deze doorsnede werken kunnen worden vervangen door een resulterend moment M . Zo ontstaat de situatie van figuur 12(b). Het resulterend moment M werkt in een vlak dat wordt opgespannen door de werklijn m en de staafas.



Figuur 13 : Snedekrachten.

Uit het bovenstaande blijkt dat M_y en M_z componenten zijn van een vector. Het bewijs dat het moment zich gedraagt als een tensor van de 1^e orde is in bijlage A gegeven. De componenten van M kunnen ook met rechte pijlen worden aangegeven in het y-z-vlak zoals in figuur 14 is weergegeven.

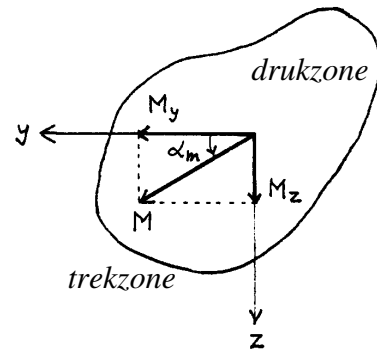
De tekenafspraken die hier wordt aangehouden is dat de pijl van de momentresultante M wijst van de drukzone naar de trekzone.

De grootte van het resulterende moment M is :

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

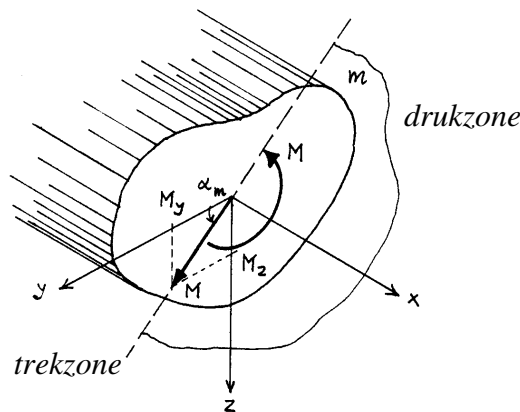
De hoek die het moment M maakt met de y -as wordt gedefinieerd als :

$$\tan \alpha_m = \frac{M_z}{M_y}$$



Figuur 14 : Buigend moment als vector in het y - z -vlak.

Het is belangrijk te realiseren dat de rechte momentpijl “werkt” als de gebogen pijl zoals in figuur 15 nog eens is aangegeven.



Figuur 15 : Twee mogelijke presentaties voor een buigend moment M op een doorsnede.

1.2.2.2 Eigenschappen van de constitutieve relatie voor buiging

Indien alleen wordt gekeken naar de onderstaande relatie voor buiging, dan zijn er een aantal opmerkingen te maken.

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Zowel het moment M als de kromming κ zijn tensoren van de 1^e orde. Dit houdt in dat de stijfheidsmatrix, die een relatie legt tussen de beide tensoren, een tensor van de 2^e orde is. Deze 2^e orde tensor wordt de “buigstijfheidstensor” genoemd:

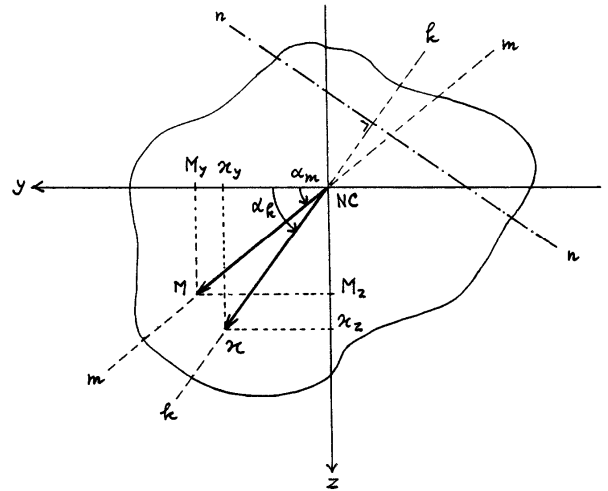
$$\begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix}$$

De “buigstijfheidstensor” is een symmetrische matrix. Er geldt namelijk: $EI_{zy} = EI_{yz}$

Alle bekende transformaties die gelden voor 2^e orde tensoren zijn dus van toepassing op de “buigstijfheidstensor”. Dit betreft bijvoorbeeld de transformatieformules bij een rotatie van het assenstelsel en het gebruik van de cirkel van Mohr om op een grafische wijze de hoofdrichtingen en hoofdwaarden te bepalen.

De algemene relatie tussen het moment M en de kromming κ is in figuur 15 geschetst.

In deze figuur is ook de neutrale lijn weergegeven die, zoals eerder al is aangetoond, loodrecht op de werklijn k van de kromming κ staat. De staaf kromt dus in het vlak dat wordt opgespannen door k en de staafas. Het buigend moment M werkt met de normaalkracht in het vlak dat wordt opgespannen door m en de staafas. Dit betekent dat de op de doorsnede werkende belasting in dit vlak werkt. Daarom wordt in dit verband ook wel van het “belastingsvlak” gesproken.



Figuur 16 : Presentatie van kromming en moment in het y-z-vlak.

In het algemeen zullen M en κ niet dezelfde werklijn hebben. Dat betekent dat de staaf in een ander vlak kromt dan waarin de belasting werkt. Moment en kromming kunnen alleen in hetzelfde vlak werken als geldt:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Dit resultaat levert met de constitutieve relatie:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} EI_{yy} - \lambda & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = 0$$

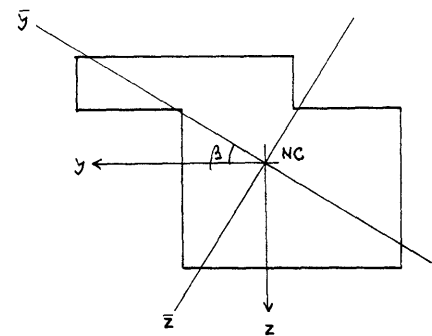
Hierin wordt het eigenwaarde probleem herkend zoals dat al eerder werd beschreven bij het onderdeel hoofdwaaarden en hoofdrichtingen van tensoren van de 2^e orde. Uitwerken is hier dus niet meer nodig, kromming en moment werken alleen in hetzelfde vlak als dit vlak samenvalt met één van de beide hoofdrichtingen.

Stel dat we het y-z-assenstelsel roteren naar het hoofdasstelsel $\bar{y} - \bar{z}$ van de doorsnede zoals in figuur 17 is weergegeven. De constitutieve relatie in dit nieuwe assenstelsel is:

$$\begin{bmatrix} M_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{\bar{y}\bar{y}} & 0 \\ 0 & EI_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{\bar{y}} \\ \kappa_{\bar{z}} \end{bmatrix}$$

Merk op dat de niet-diagonaaltermen nul zijn, we werken immers in de hoofdrichtingen. Hieruit volgt dat in de hoofdrichtingen de buigingcomponenten om de $\bar{y}$ -en $\bar{z}$ -as ontkoppeld zijn!

Ter controle kan nog in het hoofdasstelsel worden gekeken naar de relatie tussen het belastingsvlak en het krommingsvlak.



Figuur 17 : Hoofdrichtingen voor de buigstijfheid.

Deze kan worden geschreven als:

$$\tan(\bar{\alpha}_m) = \frac{M_{\bar{z}}}{M_{\bar{y}}} = \frac{EI_{\bar{z}\bar{z}}\kappa_{\bar{z}}}{EI_{\bar{y}\bar{y}}\kappa_{\bar{y}}} = \frac{EI_{\bar{z}\bar{z}}}{EI_{\bar{y}\bar{y}}} \tan(\bar{\alpha}_k)$$

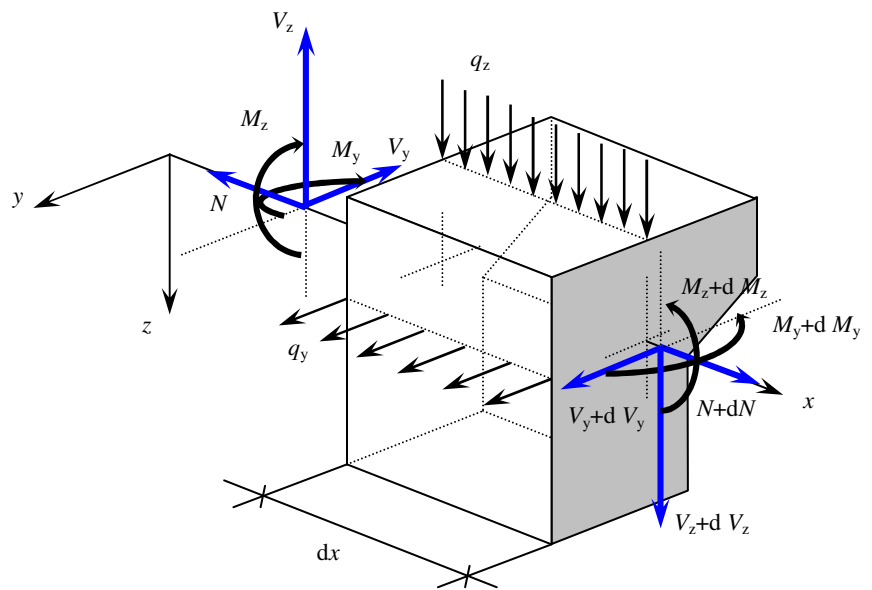
Deze richtingen zijn inderdaad alleen gelijk als geldt:

- a) $\bar{\alpha}_m = \bar{\alpha}_k = 0$; M en κ vallen langs de $\bar{y}$ -as (een hoofdas)
- b) $\bar{\alpha}_m = \bar{\alpha}_k = \pi/2$; M en κ vallen langs de $\bar{z}$ -as (de andere hoofdas)
- c) $EI_{\bar{y}\bar{y}} = EI_{\bar{z}\bar{z}}$; $\bar{\alpha}_m = \bar{\alpha}_k$

In dit laatste geval zijn alle richtingen tevens hoofdwaarden want in de cirkel van Mohr wordt deze situatie voorgesteld door één enkel punt (ga dat zelf na) !

1.2.3 Statische betrekkingen

Na de kinematische en constitutieve relaties resteren nog de evenwichtsrelaties. Deze statische betrekkingen zijn eerder in §11.2 van deel 1 en §4.3.3 van MECH-2 aan de orde gekomen. Een uitgebreide verhandeling kan daarom achterwege blijven. Van belang is dat een staafdeel niet alleen in het x - z -vlak maar ook in het x - y -vlak kan worden belast en dat de momenten en dwarskrachten componenten in zowel de y - als z -richting hebben, zie figuur 18.



Figuur 18 : Evenwicht van een staafelementje.

Op identieke wijze als in de eerder genoemde paragrafen geldt:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} + q_x &= 0 \\ \frac{dV_y}{dx} + q_y &= 0 \quad \text{en} \quad \frac{dM_y}{dx} - V_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_y \\ \frac{dV_z}{dx} + q_z &= 0 \quad \text{en} \quad \frac{dM_z}{dx} - V_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 M_z}{dx^2} = -q_z \end{aligned}$$

Voor extensie en buiging vinden we op deze wijze drie evenwichtsrelaties die het verband leggen tussen de uitwendige belasting en de snedekrachten die behoren bij extensie en buiging.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} + q_x &= 0; & (\text{extensie}) \\ \frac{d^2 M_y}{dx^2} &= -q_y; \quad \frac{d^2 M_z}{dx^2} = -q_z & (\text{buiging}) \end{aligned}$$

1.2.4 Differentiaalvergelijkingen

Met de gevonden *kinematische*-, *constitutieve*- en *evenwichtsbetrekkingen* is het gedrag van een prismatisch lijnvormig element met een niet/symmetrische en/of inhomogene doorsnede te beschrijven in de verplaatsingen u_x , u_y en u_z van de staafas.

Kinematische relaties:

$$\varepsilon = \frac{du_x}{dx} = u_x'; \quad \kappa_y = -\frac{d^2 u_y}{dx^2} = -u_y''; \quad \kappa_z = -\frac{d^2 u_z}{dx^2} = -u_z''$$

Constitutieve vergelijkingen:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Evenwichtsrelaties:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -q_x \\ \frac{d^2 M_y}{dx^2} &= -q_y \\ \frac{d^2 M_z}{dx^2} &= -q_z \end{aligned}$$

Substitutie van deze uitdrukkingen levert drie differentiaalbetrekkingen op uitgedrukt in de verplaatsingen u_x , u_y en u_z in respectievelijk de richting van de x -, y - en z -as.:

$$\begin{aligned} -EAu_x'' &= q_x && \text{extensie} \\ EI_{yy}u_y'' + EI_{yz}u_z'' &= q_y \\ EI_{yz}u_y'' + EI_{zz}u_z'' &= q_z && \text{(dubbele) buiging} \end{aligned}$$

Extensie is ontkoppeld van de beide gekoppelde differentiaalbetrekkingen voor buiging. Deze laatste betrekkingen kunnen echter nog worden ontkoppeld en herschreven worden tot:

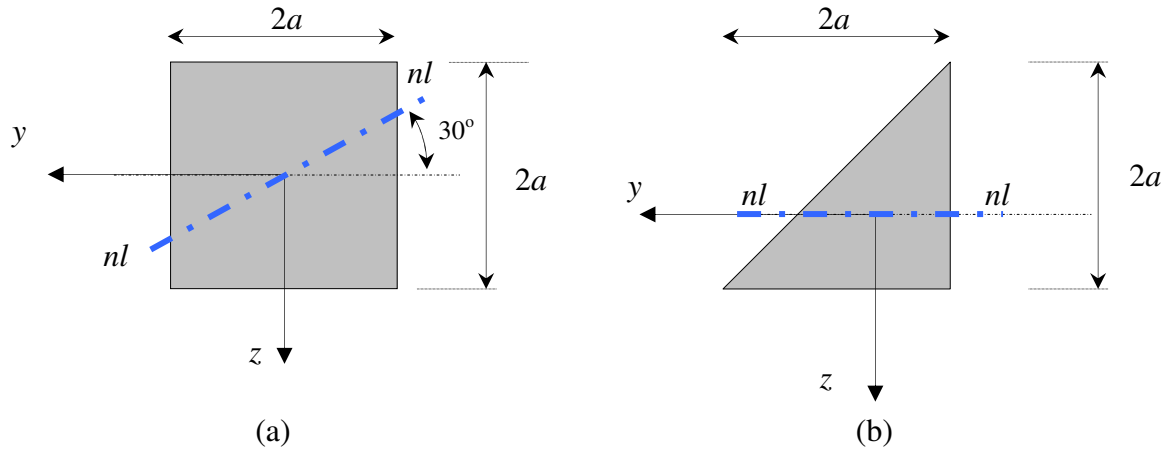
$$\begin{aligned} EAu_x'' &= -q_x \\ EI_{yy}u_y'''' &= \frac{EI_{yy}EI_{zz}q_y - EI_{yy}EI_{yz}q_z}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} \Leftrightarrow EI_{yy}u_y'''' = q_y^*; \quad q_y^* = \frac{EI_{yy}EI_{zz}q_y - EI_{yy}EI_{yz}q_z}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} \\ EI_{zz}u_z'''' &= \frac{-EI_{yz}EI_{zz}q_y + EI_{yy}EI_{zz}q_z}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} \Leftrightarrow EI_{zz}u_z'''' = q_z^*; \quad q_z^* = \frac{-EI_{yz}EI_{zz}q_y + EI_{yy}EI_{zz}q_z}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} \end{aligned}$$

Op de gebruikelijke wijze kan hiermee met bekende randvoorwaarden het verplaatsingsveld in x -, y - en z -richting van de staafas worden bepaald². Aangezien alleen het rechterlid voor de buigingsonderdelen verandert, kunnen *vergeet-mij-nietjes* met aangepaste belastingdefinities worden gebruikt indien ook de randvoorwaarden zijn ontkoppeld. Dit is aangegeven met een *, het gebruik hiervan zal verderop aan de hand van een voorbeeld worden toegelicht. Ga zelf na dat indien het assenstelsel samenvalt met de hoofdassen de gebruikelijke differentiaalvergelijkingen voor de hoofdrichtingen ontstaan.

² Let er wel op dat in de randvoorwaarden wel een koppeling kan voorkomen tussen u_y en u_z , zie APPENDIX B.

1.2.5 Voorbeeld 1 : Homogene niet-symmetrische doorsneden

Aan de hand van een voorbeeld zal de hiervoor gepresenteerde theorie worden toegelicht. In figuur 19 zijn twee doorsneden getekend waarvan de ligging van de neutrale lijn nl gegeven is. De ligging van deze neutrale lijn volgt uit de wijze waarop de doorsnede wordt belast. Gevraagd wordt om voor de beide doorsneden de ligging van het belastings-vlak m te bepalen.



Figuur 19 : Doorsnede met een gegeven ligging van de neutrale lijn.

Doorsnede van figuur 19a:

De relatie tussen de neutrale lijn het krommingsvlak is vastgelegd met:

1. Neutrale lijn : $\varepsilon(y, z) = \varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z = 0$
2. Krommingsvlak staat loodrecht op de neutrale lijn nl .

De gegeven neutrale lijn gaat door het NC, de rek in de vezel langs de x -as is daarmee dus gelijk aan nul en er werkt dus ook geen normaalkracht op de doorsnede. Er geldt in dit geval:

$$0 = y\kappa_y + z\kappa_z$$

De helling van de neutrale lijn is gegeven en is 30 graden. Hieruit volgt:

$$\alpha_k = 120^\circ$$

$$\tan \alpha_k = \frac{\kappa_z}{\kappa_y} = -\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\kappa}{-\kappa}$$

Hierin is κ de werkelijke kromming zoals aangegeven in figuur 20.

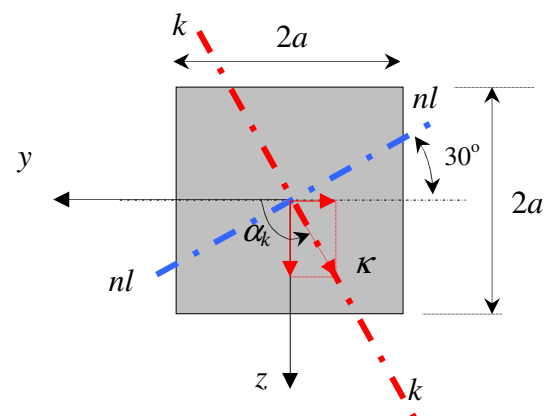
De componenten van het buigend moment kunnen worden bepaald met:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Voor deze vierkante doorsnede geldt:

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{12} (2a)^4 = \frac{4}{3} a^4; \quad I_{yz} = 0$$

$$\text{Invullen levert: } \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \frac{4}{3} Ea^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \kappa \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$



Figuur 20 : Kromming en neutrale lijn.

De ligging van het belastingsvlak wordt vastgelegd met :

$$\tan \alpha_m = \frac{M_z}{M_y} = \frac{\frac{4}{3} Ea^4 \times \sqrt{3} \kappa}{\frac{4}{3} Ea^4 \times (-\kappa)} = -\sqrt{3}$$

Hieruit volgt dat het belastingsvlak m samenvalt met het vlak k waarin de ligger kromt. Dit komt overeen met de eerder gemaakt opmerking in paragraaf 1.4.2 waarin is afgeleid dat m en k samen vallen indien het assenstelsel samenvalt met de hoofdasen of indien de doorsnede gelijke hoofdwwaarden heeft. Deze doorsnede voldoet aan de laatste eis en daarmee ook aan de eerst genoemde eis.

Doorsnede van figuur 19b:

Ook van deze doorsnede is de ligging van de neutrale lijn gegeven.

De aanpak is identiek aan het vorige voorbeeld.

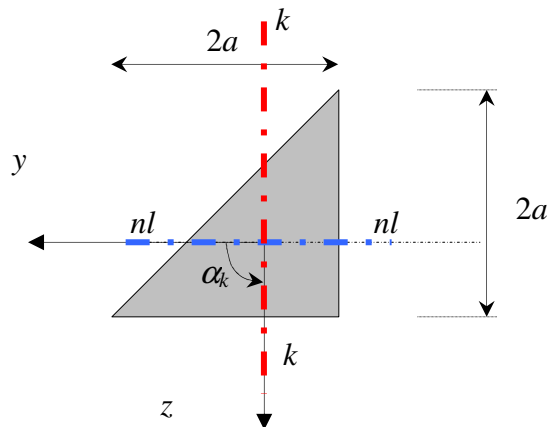
Voor het krommingsvlak geldt:

$$\alpha_k = 90^\circ$$

$$\tan \alpha_k = \frac{\kappa_z}{\kappa_y} = \pm \infty = \frac{\kappa}{0}$$

Hierin is κ de werkelijke kromming zoals aangegeven in figuur 21. De componenten van het buigend moment kunnen worden bepaald met:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$



Figuur 21 : Kromming en neutrale lijn.

Voor deze doorsnede geldt voor de traagheidsgrootheden (zie MECH-2, blz 102):

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{36} bh^3 = \frac{1}{36} (2a)^4 = \frac{4}{9} a^4$$

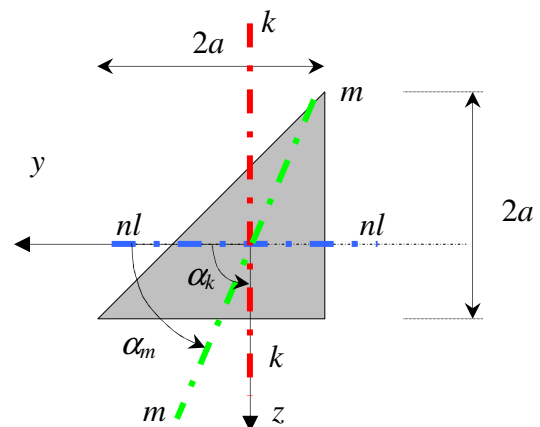
$$I_{yz} = \frac{bh^3}{36 \tan \alpha} = \frac{1}{36} \frac{(2a)^4}{2} = \frac{2}{9} a^4$$

Invullen levert:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \frac{1}{9} Ea^4 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \frac{1}{9} Ea^4 \begin{bmatrix} 2\kappa \\ 4\kappa \end{bmatrix}$$

Voor het vlak m waarin de belasting werkt geldt:

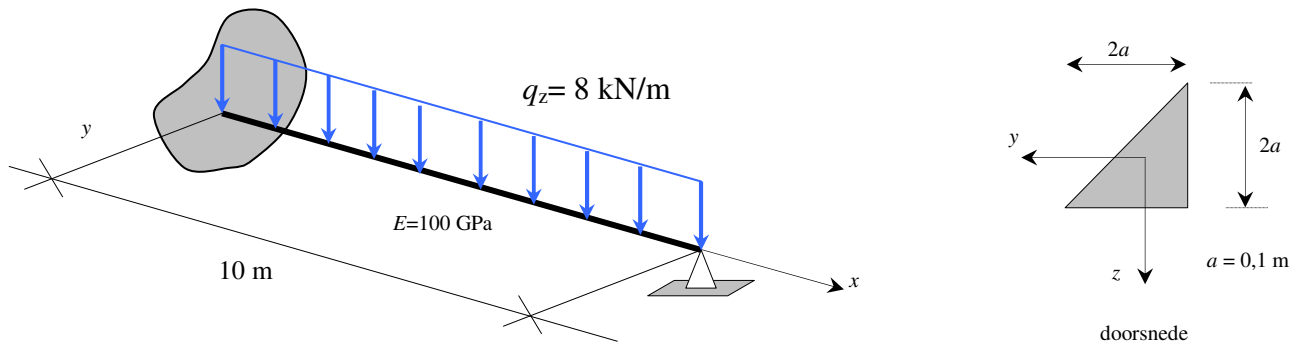
$$\tan \alpha_m = \frac{M_z}{M_y} = \frac{\frac{1}{9} Ea^4 \times 4\kappa}{\frac{1}{9} Ea^4 \times 2\kappa} = 2$$



Figuur 22 : Kromming en belasting.

In figuur 22 is te zien dat in dit geval het belastingsvlak m niet samen valt met het vlak k waarin de liggeras kromt. Merk tevens op dat het verschil in hoek tussen de m -as en de k -as niet komt door torsie maar door *dubbele buiging* bij een niet-symmetrische doorsnede.

De doorsnede (b) uit het voorgaande voorbeeld met elasticiteitsmodulus E is toegepast in een statisch onbepaalde ligger zoals hieronder is weergegeven. De invloed van de normaalkrachtvervorming mag buiten beschouwing worden gelaten.



Figuur 19-2 : Liggerconstructie met doorsnede (b)

Gevraagd wordt om de zakkingslijn van deze constructie te bepalen onder alleen een gelijkmatig verdeelde last q_z . De buigstijfheidstensor van deze aan één zijde ingeklemde ligger is:

$$EI_{i,j} = \frac{1}{9} Ea^4 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Bij afwezigheid van een normaalkracht en louter en alleen een verdeelde belasting in z -richting, resteren de volgende differentiaalbetrekkingen (zie ook blz 14):

$$EI_{yy} u_y'''' = q_y^* \quad \text{of} \quad u_y'''' = \frac{EI_{zz} q_y - EI_{yz} q_z}{EI_{yy} EI_{zz} - EI_{yz}^2} = \frac{-EI_{yz} q_z}{EI_{yy} EI_{zz} - EI_{yz}^2} = \frac{-3q_z}{2Ea^4}$$

$$EI_{zz} u_z'''' = q_z^* \quad \text{of} \quad u_z'''' = \frac{-EI_{yz} q_y + EI_{yy} q_z}{EI_{yy} EI_{zz} - EI_{yz}^2} = \frac{EI_{yy} q_z}{EI_{yy} EI_{zz} - EI_{yz}^2} = \frac{3q_z}{Ea^4}$$

De algemene oplossing voor het verplaatsingsveld in y - en z -richting wordt hiermee:

$$u_y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 - \frac{q_z x^4}{16Ea^4}$$

$$u_z = D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + D_4 x^3 + \frac{q_z x^4}{8Ea^4}$$

De acht randvoorwaarden voor dit probleem zijn eenvoudig te definiëren:

$$x=0: (u_y=0; u_z=0; \varphi_y=0; \varphi_z=0)$$

$$x=l: (u_y=0; u_z=0; M_y=0; M_z=0)$$

Hieruit volgt voor de integratieconstanten, zie MAPLE invoer op volgende pagina:

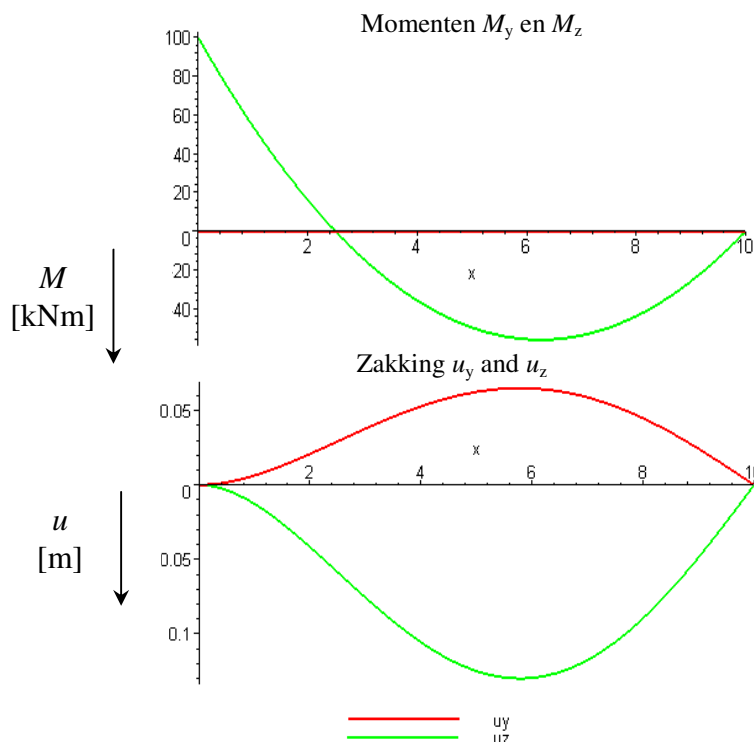
$$C_1=0 \quad C_2=0 \quad C_3=\frac{-3q_z l^2}{32Ea^4} \quad C_4=\frac{5q_z l}{32Ea^4}$$

$$D_1=0 \quad D_2=0 \quad D_3=\frac{3q_z l^2}{16Ea^4} \quad D_4=\frac{-5q_z l}{16Ea^4}$$

De MAPLE invoer is hieronder weergegeven.

```
> restart;
> EIyy:=(4/9)*E*a^4; EIyz:=(1/2)*EIyy; EIzz:=EIyy;
> uy:=C1+C2*x+C3*x^2+C4*x^3-qz*x^4/(16*E*a^4);
> uz:=D1+D2*x+D3*x^2+D4*x^3+qz*x^4/(8*E*a^4);
> phiy:=-diff(uz,x): phiz:=diff(uy,x): kappay:=diff(-phiz,x): kappaz:=diff(phiy,x):
> My:=EIyy*kappay+EIyz*kappaz: Mz:=EIyz*kappay+EIzz*kappaz:
> x:=0; eq1:=uy=0; eq2:=uz=0; eq3:=phiy=0; eq4:=phiz=0;
> x:=L; eq5:=uy=0; eq6:=uz=0; eq7:=My=0; eq8:=Mz=0;
> sol:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8},{C1,C2,C3,C4,D1,D2,D3,D4}); assign(sol);
> x:='x': qz:=8;L:=10; E:=100e6; a:=0.1;
> plot([-My,-Mz],x=0..L,title="Moment My and Mz",legend=["My","Mz"]);
> plot([uy,uz],x=0..L,title="Displacements uy and uz",legend=["uy","uz"]);
```

De momentenlijnen en de zakkingslijnen zijn hieronder weergegeven. Vanwege de belasting in z-richting en de gehanteerde randvoorwaarden ontstaat er alleen een momentenverdeling M_z in het x - z -vlak. Het maximum inklemmingsmoment is $0,125 \times q \times l^2 = 100$ kNm. Vanwege de niet-symmetrische doorsnede ontstaan er uitbuigingen in zowel het x - y -vlak als het x - z -vlak.



Figuur 19-3 : Resultaten voor M en u voor doorsnede (b)

Opmerking:

Op het eerste gezicht lijken de gevonden differentiaalvergelijkingen volledig ontkoppeld. Echter met name eventuele dynamische randvoorwaarden laten een koppeling zien:

$$M_y = EI_{yy} \kappa_y + EI_{yz} \kappa_z = -EI_{yy} u_y'' - EI_{yz} u_z''; \quad V_y = M_y'$$

$$M_z = EI_{yz} \kappa_y + EI_{zz} \kappa_z = -EI_{yz} u_y'' - EI_{zz} u_z''; \quad V_z = M_z'$$

Bij het specificeren van de randvoorwaarden dient met hier zorgvuldig mee om te gaan, zie ook APPENDIX B.

1.2.6 Normaalspanningen in de doorsnede in het y-z-assenstelsel

Als voor een doorsnede de snedekrachten N , M_y en M_z bekend zijn kunnen met behulp van de constitutieve betrekkingen de vervormingen worden bepaald:

$$N = EA\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{N}{EA}$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - (EI_{yz})^2} \begin{bmatrix} EI_{zz} & -EI_{yz} \\ -EI_{zy} & EI_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

De spanning in een vezel kan worden bepaald met de eerder afgeleide betrekking:

$$\sigma(y, z) = E \times \varepsilon(y, z) = E \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z)$$

In het algemeen is het niet zinvol om de relatie verder uit te schrijven tot een betrekking tussen spanning en snedekrachten. Er zijn echter twee gevallen waarvoor het wel illustratief is om de relatie verder uit te werken.

Situatie 1 : De y- en z-as vallen samen met de hoofdrichtingen van de doorsnede

Als het y-z-assenstelsel samenvalt met de hoofdasen van de doorsnede zijn de drie snedekrachten volledig ontkoppeld. De vervormingsgrootheden kunnen dan worden bepaald met:

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon & \varepsilon &= \frac{N}{EA} \\ M_y &= EI_{yy}\kappa_y & \Rightarrow \kappa_y &= \frac{M_y}{EI_{yy}} \\ M_z &= EI_{zz}\kappa_z & \kappa_z &= \frac{M_z}{EI_{zz}} \end{aligned}$$

De spanningsverdeling wordt hiermee:

$$\begin{aligned} \sigma(y, z) &= E \times \varepsilon(y, z) = E \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z) \\ \sigma(y, z) &= \frac{N}{A} + \frac{M_y y}{I_{yy}} + \frac{M_z z}{I_{zz}} \end{aligned}$$

Situatie 2 : Het y- en z-assenstelsel is zo geöriënteerd dat één van de krommingen nul is

In het geval dat bijvoorbeeld de component in de y-richting van de kromming nul is ontstaat de volgende situatie:

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon \\ M_y &= EI_{yz}\kappa \quad \text{met : } \kappa_y = 0 \quad \text{en} \quad \kappa_z = \kappa \\ M_z &= EI_{zz}\kappa \end{aligned}$$

Voor het spanningsverloop wordt nu gevonden:

$$\sigma(y, z) = E \times \varepsilon(y, z) = E \times (\varepsilon + y \times 0 + z\kappa) = \frac{N}{A} + \frac{M_z z}{I_{zz}}$$

Merk op dat de component M_y niet voorkomt in de formule voor het bepalen van de spanning en dat hoewel de kromming κ_y **wel** nul is het moment M_y dat **niet** is!

1.2.7 Normaalspanningen in de doorsneden in de hoofdrichtingen

In de vorige paragraaf is een methode weergegeven waarmee direct in het gekozen y - z -assenstelsel de normaalspanningen in de doorsnede kunnen worden bepaald. Hoewel deze aanpak de voorkeur geniet wordt in de praktijk deze methode weinig gebruikt. In veel gevallen wordt dan gekozen om de spanningen te bepalen in de hoofdrichtingen van de doorsnede. Het y - z -assenstelsel wordt dan geroteerd naar het $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -assenstelsel dat samenvalt met de hoofdrichtingen van de doorsnede. In paragraaf 1.2.2.2 is aangetoond dat in dit assenstelsel de constitutieve betrekkingen voor buiging ontkoppeld zijn in verband met het nul zijn van de $EI_{\bar{y}\bar{z}}$ (definitie van een hoofdrichting).

$$\begin{bmatrix} M_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{\bar{y}\bar{y}} & 0 \\ 0 & EI_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{\bar{y}} \\ \kappa_{\bar{z}} \end{bmatrix}$$

In feite ontstaat door rotatie van het assenstelsel *situatie 1* zoals is beschreven op de voorgaande bladzijde. De spanningsformules in het hoofdasstelsel worden nu:

$$\sigma(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{N}{A} + \frac{M_{\bar{y}}\bar{y}}{I_{\bar{y}\bar{y}}} + \frac{M_{\bar{z}}\bar{z}}{I_{\bar{z}\bar{z}}}$$

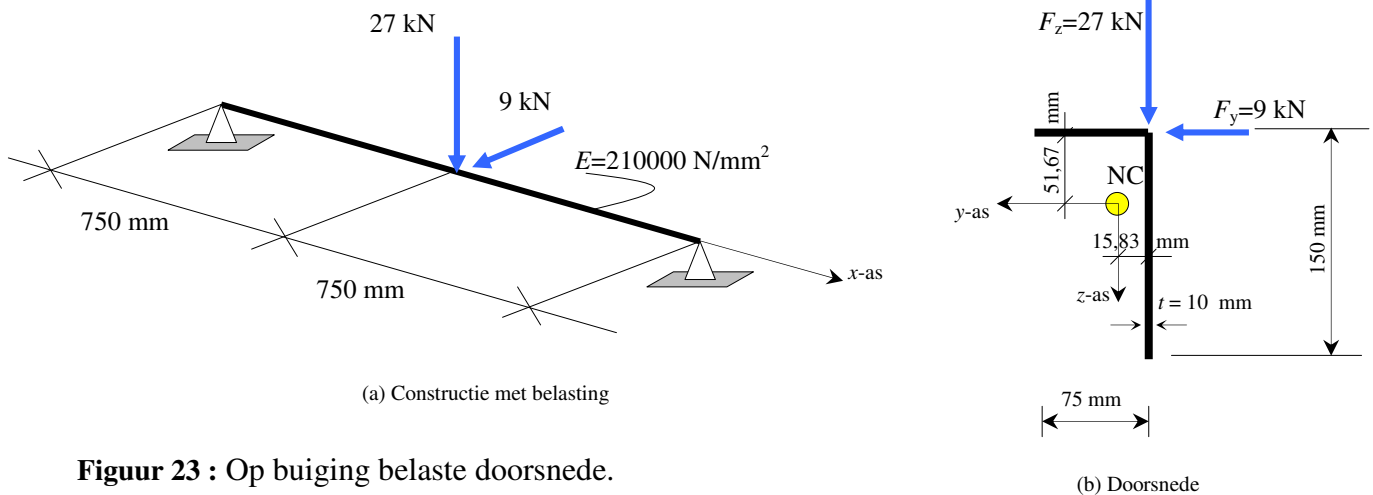
Het voordeel van deze eenvoudige formule wordt te niet gedaan door extra werk dat verricht moet worden:

- In de eerste plaats zullen van de doorsnede de hoofdrichtingen en hoofdwaaarden moeten worden bepaald. Dit kan op basis van de transformatieformules of met behulp van een cirkel van Mohr.
- Vervolgens moet de belasting, het moment, worden ontbonden in de gevonden hoofdrichtingen.
- Voor het bepalen van de spanningen in bijvoorbeeld de uiterste vezels zullen de afstanden tot deze vezels moeten worden bepaald in het geroteerde assenstelsel.
- Als ook de vervormingen dienen te worden bepaald dan moet gerealiseerd worden dat de gevonden krommingen, krommingen zijn in het geroteerde assenstelsel. De grootte van de kromming is uiteraard een invariant maar voor het vinden van de krommingen in het oorspronkelijke y - z -assenstelsel zal de gevonden kromming geroteerd moeten worden van het $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -assenstelsel naar het oorspronkelijke y - z -assenstelsel.

Het verschil in aanpak zal in een voorbeeld worden toegelicht.

1.2.8 Voorbeeld 2 : Spanningen in een niet-symmetrische doorsnede

De in figuur 23a weergegeven vrij opgelegde stalen ligger wordt belast met de aangegeven puntlasten. Er zal geen normaalkracht ontstaan in de doorsnede. Aangenomen wordt dat de puntlasten aangrijpen in het dwarskrachtencentrum van de doorsnede. Hierdoor ontstaat geen wringing in de doorsnede, zie hiervoor paragraaf 5.5 van MECH-2. De puntlasten veroorzaken wel een buigend moment in de ligger. We gaan ervan uit dat het gegeven hoekstaal in combinatie met de belasting geen aanleiding geeft tot instabiliteitsverschijnselen zoals kip en plooi.



Figuur 23 : Op buiging belaste doorsnede.

Gevraagd wordt de spanningen en de vervormingen in de middendoorsnede te bepalen voor de gegeven belasting. Ook wordt gevraagd om voor de gegeven belasting, de verplaatsing van de staafas halverwege de overspanning te bepalen.

Methode 1 : Berekening in het y-z-assenstelsel

De belasting veroorzaakt in de middendoorsnede een buigend moment met componenten:

$$M_y = \frac{1}{4} F_y l = 0,25 \times 9000 \times 1500 = 3375 \times 10^3 \text{ Nmm}$$

$$M_z = \frac{1}{4} F_z l = 0,25 \times 27000 \times 1500 = 10125 \times 10^3 \text{ Nmm}$$

Deze componenten grijpen aan in het NC van de doorsnede. De ligging van het NC en de traagheidsgrootheden kunnen bepaald worden zoals beschreven in hoofdstuk 3 van MECH-2:

$$NC|_{\text{bovenrand}} = \frac{75 \times 10 \times 5 + 150 \times 10 \times 75}{75 \times 10 + 150 \times 10} = 51,67 \text{ mm}$$

$$NC|_{\text{rechtterrand}} = \frac{75 \times 10 \times 37,5 + 150 \times 10 \times 5}{75 \times 10 + 150 \times 10} = 15,83 \text{ mm}$$

Deze afstanden zijn in figuur 23b aangegeven.

De traagheidsgrootheden t.o.v. het y-z-assenstelsel door het NC worden hiermee :

$$I_{yy} = \frac{1}{12} \times 10 \times 75^3 + 75 \times 10 \times (37,5 - 15,83)^2 + \frac{1}{12} \times 150 \times 10^3 + 150 \times 10 \times (15,83 - 5)^2$$

$$I_{yz} = 75 \times 10 \times (37,5 - 15,83) \times (5 - 51,67) + 150 \times 10 \times (5 - 15,83) \times (75 - 51,67)$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} \times 75 \times 10^3 + 75 \times 10 \times (-51,67 + 5)^2 + \frac{1}{12} \times 10 \times 150^3 + 150 \times 10 \times (75 - 51,67)^2$$

Hieruit volgt:

$$I_{yy} = 89,2 \times 10^4 \text{ mm}^4; \quad I_{yz} = -113,75 \times 10^4 \text{ mm}^4; \quad I_{zz} = 526,9 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

De kromming kan met behulp van de constitutieve betrekking worden bepaald. De componenten van de kromming in het y-z-assenstelsel volgen uit:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - (EI_{yz})^2} \begin{bmatrix} EI_{zz} & -EI_{yz} \\ -EI_{zy} & EI_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Invullen van de bekende gegevens levert:

$$\begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \times \frac{10^{-4}}{89,2 \times 526,9 - (-113,75)^2} \begin{bmatrix} 526,9 & 113,75 \\ 113,75 & 89,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3375 \times 10^3 \\ 10125 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

Uitwerken levert voor de componenten van de kromming:

$$\kappa_y = 40,95 \times 10^{-6} \text{ 1/mm} \quad \kappa_z = 17,99 \times 10^{-6} \text{ 1/mm}$$

De spanning in ieder willekeurig punt van de doorsnede kan nu bepaald worden met:

$$\sigma(y, z) = E \times \varepsilon(y, z) = E \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z)$$

In de doorsnede werkt geen normaalkracht, hierdoor ontstaat er ook geen rek ε in de vezel die samenvalt met de staafas (NC). De vergelijking voor de spanning wordt hiermee:

$$\sigma(y, z) = 8,600 \times y + 3,778 \times z$$

Uit deze vergelijking volgt direct de ligging van de neutrale lijn:

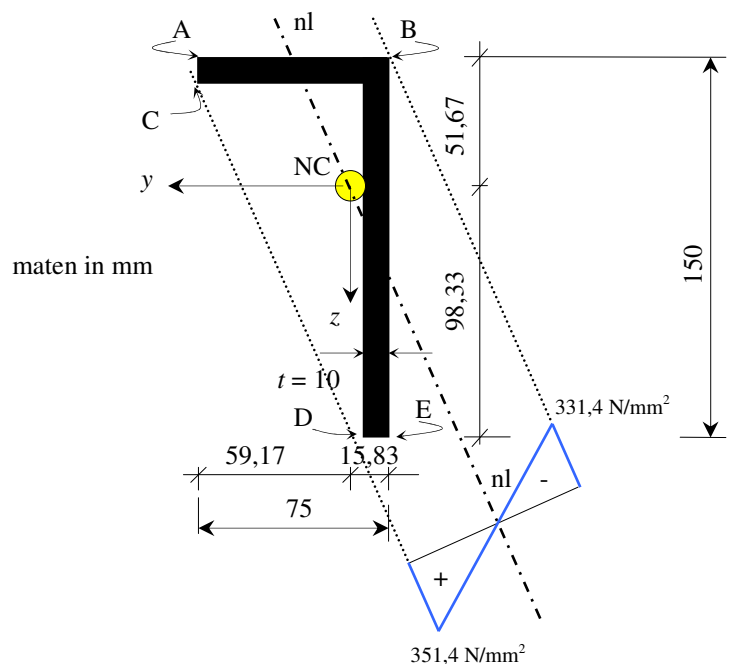
$$8,600 \times y + 3,778 \times z = 0$$

Het normaalspanningsverloop over de doorsnede kan nu worden bepaald door voor een aantal punten de normaalspanning te bepalen, zie figuur 24.

In de onderstaande tabel zijn de uitkomsten verzameld.

punt	y mm	z mm	$\sigma \text{ N/mm}^2$
A	59,17	-51,67	313,6
B	-15,83	-51,67	-331,4
C	59,17	-41,67	351,4
D	-5,83	98,33	321,4
E	-15,83	98,33	235,4

Ook de ligging van de neutrale lijn is in figuur 24 weergegeven. Hieruit blijkt dat de punten C en B de uiterste punten tot de neutrale lijn zijn en daarmee ook de punten met grootste trek en drukspanningen in de doorsnede. Met deze informatie is snel een spanningsverdeling over de doorsnede te tekenen.



Figuur 24 : Karakteristieke punten.

Met de bekende krachtsverdeling is het mogelijk de vervormingen van de constructie te bepalen. Tot nu toe zijn we gewend om met behulp van de *vergeet-mij-nietjes* deze berekening op een praktische manier uit te voeren. Bij niet-symmetrische doorsneden kan met aangepaste vergeet-mij-nietjes worden gewerkt indien de randvoorwaarden ook ontkoppeld zijn. Daarnaast kan de verplaatsing ook altijd worden gevonden op basis van het krommingsveld. Beide routes worden hier gepresenteerd.

Verplaatsingen in het oorspronkelijke assenstelsel met behulp van aangepaste vergeet-mij-nietjes:

De randvoorwaarden zijn ontkoppeld en daarom kan gebruik worden gemaakt van aangepaste vergeet-mij-nietjes. De belasting in y- en z-richting wordt hiertoe herschreven tot:

$$F_y^* = \frac{EI_{yy}EI_{zz}F_y - EI_{yy}EI_{yz}F_z}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} = 20461,30936 \text{ N}$$

$$F_z^* = \frac{-EI_{yz}EI_{zz}F_y + EI_{yy}EI_{yz}F_z}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} = 53087,27357 \text{ N}$$

De verplaatsing halverwege de overspanning volgt nu uit de gebruikelijke *vergeet-mij-nietjes*:

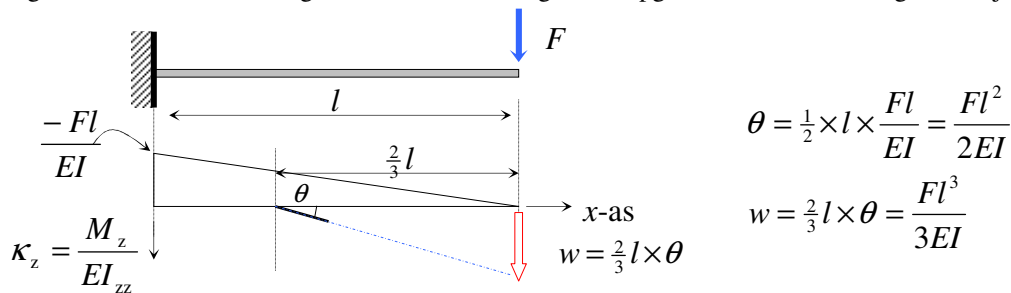
$$u_y = \frac{F_y^* l^3}{48EI_{yy}} = 7,68 \text{ mm}$$

$$u_z = \frac{F_z^* l^3}{48EI_{zz}} = 3,37 \text{ mm}$$

Verplaatsingen in het oorspronkelijke assenstelsel op basis van het gevonden krommingsveld:

De verdeling van deze krommingen langs de staafas is bekend. Met behulp van de stellingen van het krommingsvlak kunnen de verplaatsingen worden bepaald. Deze kennis wordt hieronder nog even opgefrist.

In figuur 25 worden de stellingen van het "krommingsvlak" opgefrist zoals eerder toegelicht bij CM2.



Figuur 25 : Grondslag voor de vergeet-mij-nietjes.

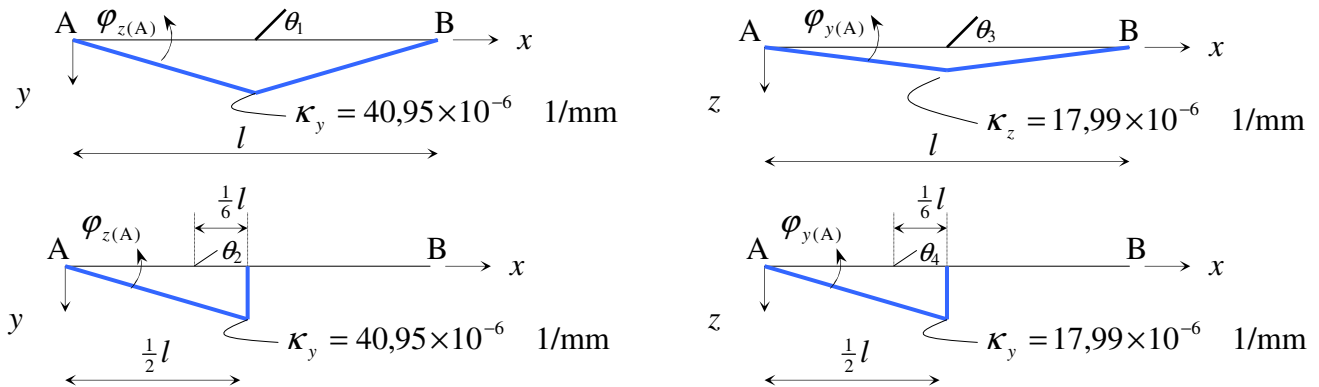
In feite werd er steeds van uitgegaan dat het gereduceerde momentenvlak M/EI gelijk is aan de kromming κ zoals in figuur 24 is toegepast. Voor niet-symmetrische doorsneden waar het assenstelsel niet samenvalt met de hoofdrichtingen geldt echter voor de beide krommingen:

$$\begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - (EI_{yz})^2} \begin{bmatrix} EI_{zz} & -EI_{yz} \\ -EI_{yz} & EI_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt dat we geen gebruik kunnen maken van de *vergeet-mij-nietjes* maar dat direct gebruik moet worden gemaakt van de krommingen in y- en z-richting.

In figuur 26 zijn de krommingsverdelingen voor het x-y- en x-z-vlak weergegeven.

Met de stellingen van het krommingsvlak kunnen nu de verplaatsingen in y- en z-richting worden bepaald op de methode zoals is beschreven in paragraaf 8.4 van MECH-2.



Figuur 26 : Kromming en verplaatsing in y-z-assenstelsel.

Met de eis dat de verplaatsingen u_y en u_z in B nul moeten zijn, zijn de hoekverdraaiingen φ_y en φ_z in A te bepalen. Vervolgens kunnen daarmee de verplaatsingen in C worden bepaald:

$$\begin{aligned} -\varphi_{z(A)} \times l - \theta_1 \times \frac{1}{2}l &= 0 \Rightarrow \varphi_{z(A)} = -0,0154 \Rightarrow u_{y(C)} = -\varphi_{z(A)} \times \frac{1}{2}l - \theta_2 \times \frac{1}{6}l = 7,68 \text{ mm} \\ -\varphi_{y(A)} \times l - \theta_3 \times \frac{1}{2}l &= 0 \Rightarrow \varphi_{y(A)} = -0,0067 \Rightarrow u_{z(C)} = -\varphi_{y(A)} \times \frac{1}{2}l - \theta_4 \times \frac{1}{6}l = 3,37 \text{ mm} \end{aligned}$$

Methode 2: Berekening in het hoofdassenstelsel van de doorsnede

De spanningen in de punten A t/m E kunnen ook worden bepaald in het hoofdassenstelsel. Hieronder zal deze berekening worden weergegeven. Voor deze berekening is het noodzakelijk eerst de hoofdtraagheidsmomenten en de hoofdrichtingen te bepalen. Hiervoor kan gebruik gemaakt worden van b.v. de transformatieformules of de cirkel van Mohr. Beiden zullen hieronder worden gedemonstreerd.

Voor de traagheidsmomenten in het y-z-assenstelsel is eerder gevonden:

$$I_{yy} = 89,2 \times 10^4 \text{ mm}^4; \quad I_{yz} = -113,75 \times 10^4 \text{ mm}^4; \quad I_{zz} = 526,9 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

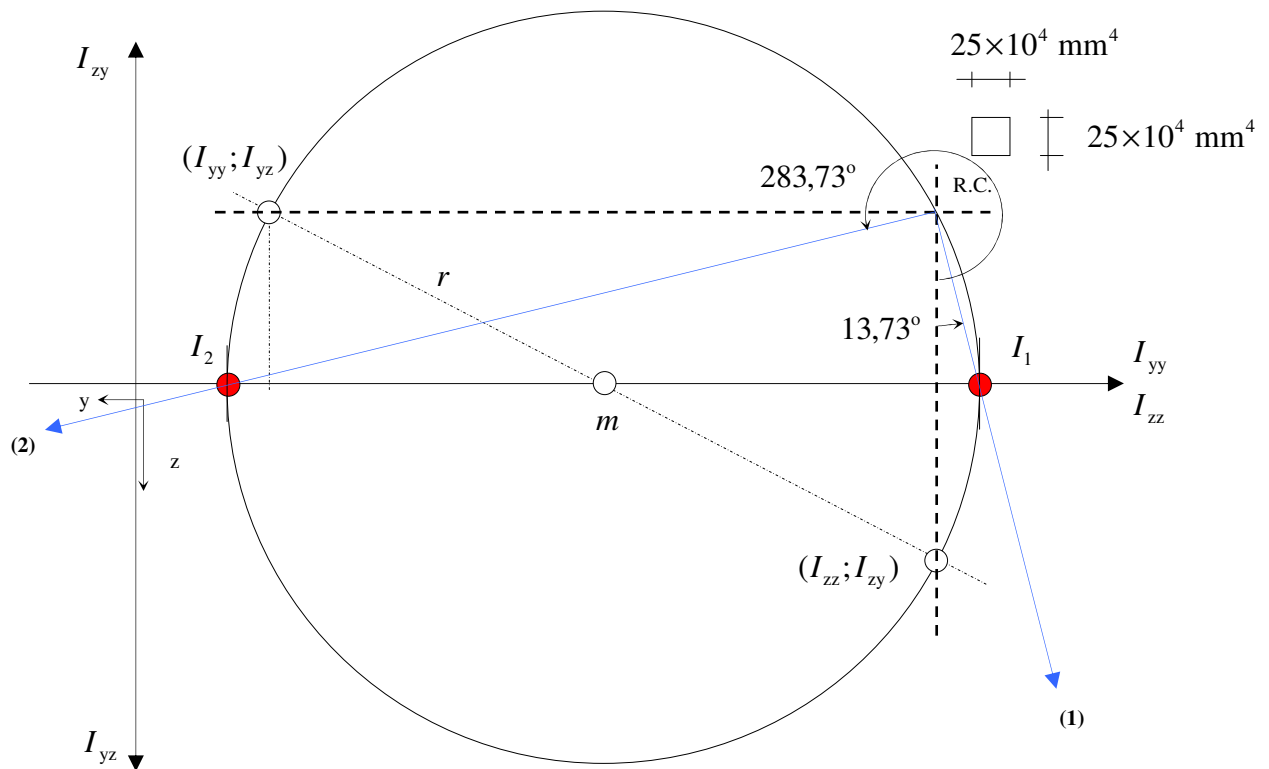
Met behulp van de transformatieformules kunnen de hoofdtraagheidsmomenten worden bepaald:

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} \pm \frac{\sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4I_{yz}^2}}{2} \\ I_1 &= 554,67 \times 10^4 \text{ mm}^4; \quad I_2 = 61,42 \times 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

De hoofdrichtingen wordt bepaald met :

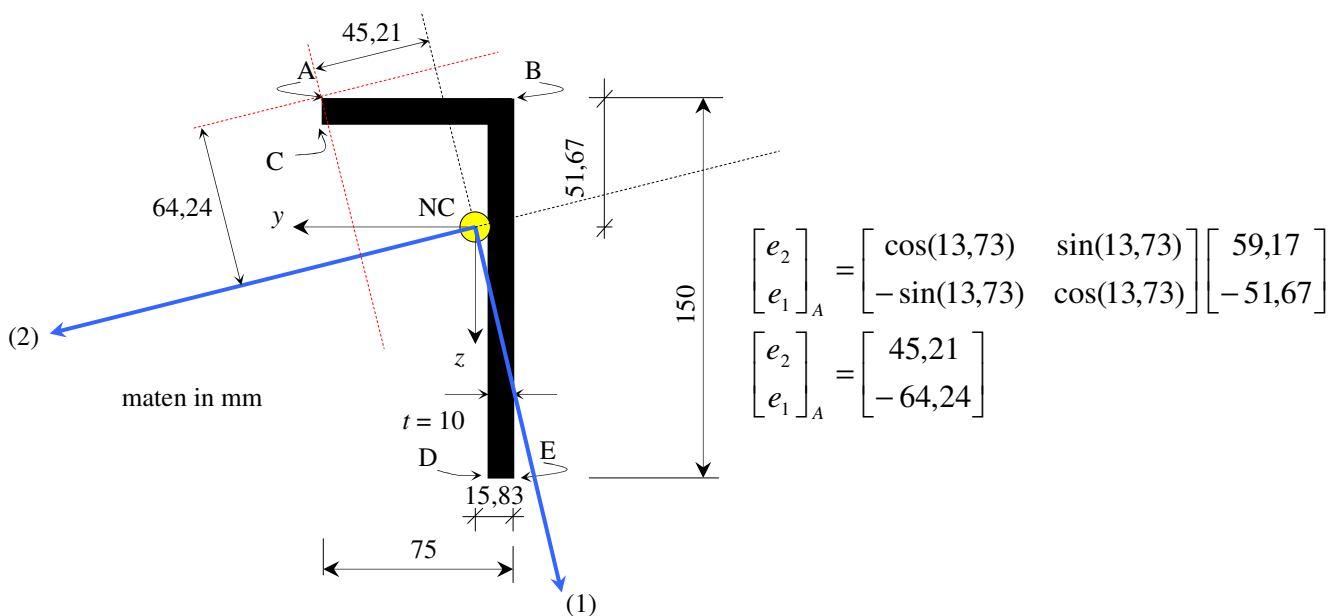
$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}} \Leftrightarrow \alpha_{1,2} = 13,73^\circ; \quad 283,73^\circ$$

Hetzelfde resultaat kan ook worden gevonden met behulp van de cirkel van Mohr. Hieronder is de cirkel van Mohr voor de traagheidsgrootheden getekend.



Figuur 27 : Cirkel van Mohr voor de traagheidsgrootheden.

De gevonden richtingen kunnen nu worden overgezet naar de doorsnede. In figuur 28 is dit weergegeven.



Figuur 28 : Hoofdrichtingen van de doorsnede.

De spanningen in de aangegeven punten kunnen nu worden bepaald met behulp van de eerder gevonden uitdrukking die geldig is in het assenstelsel dat samenvalt met de hoofdrichtingen (1) en (2):

$$\sigma_{(1,2)} = \frac{M_1 e_1}{I_1} + \frac{M_2 e_2}{I_2}$$

Uit deze vergelijking is op te maken dat de ligging van het punt wordt aangegeven in het 1-2-assenstelsel met de excentriciteiten e_1 en e_2 . Deze moeten dus voor alle punten worden bepaald m.b.v. de gebruikelijke formules voor assentransformaties. Voor punt A is dat in figuur 27 aangegeven. Ook de belasting (momenten) moeten worden ontbonden in de 1-2-richting. Maak zelf een schets en ga na dat moet gelden:

$$M_1 = -M_y \sin(13,73) + M_z \cos(13,73) = 9034,33 \times 10^3 \text{ Nmm}$$

$$M_2 = M_y \cos(13,73) + M_z \sin(13,73) = 5682,17 \times 10^3 \text{ Nmm}$$

In de onderstaande tabel zijn de excentriciteiten voor de punten weergegeven waarmee de spanningen in ieder punt kunnen worden bepaald. Ga deze berekening zelf na en let goed op de tekens van de excentriciteiten.

punt	y mm	z mm	e_1 mm	e_2 mm	σ N/mm ²
A	59,17	-51,67	-64,24	45,21	313,6
B	-15,83	-51,67	-46,43	-27,64	-331,4
C	59,17	-41,67	-54,53	47,59	351,4
D	-5,83	98,33	96,90	17,68	321,4
E	-15,83	98,33	99,28	7,97	235,4

De gevonden waarden komen overeen met de eerder gevonden spanningen.

In de hoofdrichtingen zijn buiging om de y- en z-as ontkoppeld en kunnen de verplaatsingen in de 1-2-richtingen nu wel met behulp van de *vergeet-mij-nietjes* worden bepaald.

Vervolgens moeten de gevonden verplaatsingen terug worden getransformeerd naar het oorspronkelijke y-z-assenstelsel.

Om de verplaatsingen te kunnen bepalen moet de belasting getransformeerd worden naar de hoofdrichtingen:

$$F_1 = -F_y \sin(13,73) + F_z \cos(13,73) = 24091,55 \text{ N}$$

$$F_2 = F_y \cos(13,73) + F_z \sin(13,73) = 15152,46 \text{ N}$$

De verplaatsing u_1 en u_2 in de hoofdrichtingen zijn op basis van het *vergeet-mij-nietje* :

$$u_1 = \frac{F_1 l^3}{48EI_1} = \frac{24091,55 \times 1500^3}{48 \times 2,1 \times 10^5 \times 554,67 \times 10^4} = 1,4542 \text{ mm}$$

$$u_2 = \frac{F_2 l^3}{48EI_2} = \frac{15152,46 \times 1500^3}{48 \times 2,1 \times 10^5 \times 61,42 \times 10^4} = 8,26012 \text{ mm}$$

Transformatie naar het y-z-assenstelsel levert opnieuw de inmiddels bekende uitkomst:

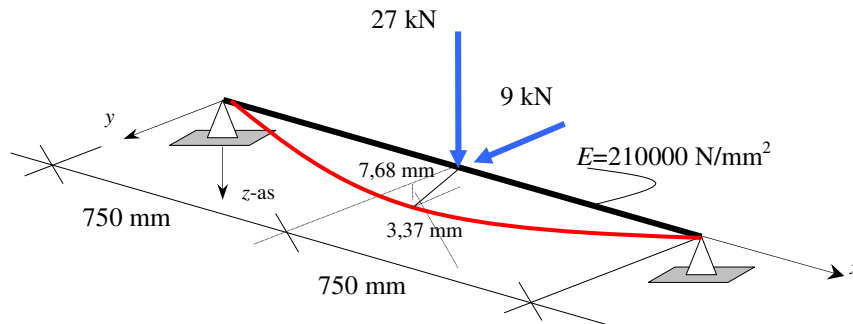
$$u_{y(C)} = u_1 \sin(-13,73) + u_2 \cos(-13,73) = 7,68 \text{ mm}$$

$$u_{z(C)} = u_1 \cos(-13,73) - u_2 \sin(-13,73) = 3,37 \text{ mm}$$

De totale verplaatsing van punt C wordt hiermee:

$$u_C = \sqrt{7,68^2 + 3,37^2} = 8,4 \text{ mm}$$

In figuur 29 is de vervormde constructie geschetst.



Opdracht:

Geef in een schets van de doorsnede de ligging aan van :

- het krommingsvlak
- het belastingsvlak
- de neutrale lijn
- de hoofdrichtingen

Leg in een korte omschrijving uit wat deze begrippen betekenen.

Figuur 29 : Vervormde constructie.

1.2.9 Samenvattende conclusies

Bij het toepassen van een niet-symmetrische doorsnede zal in het algemeen de ligger krommen in een ander vlak dan waarin deze wordt belast. Er zijn slechts drie uitzonderingen mogelijk waarbij krommingsvlak en belastingsvlak samenvallen:

- a) $\bar{\alpha}_m = \bar{\alpha}_k = 0$; M en κ vallen langs de $\bar{y}$ -as (een hoofdas)
- b) $\bar{\alpha}_m = \bar{\alpha}_k = \pi/2$; M en κ vallen langs de $\bar{z}$ -as (de andere hoofdas)
- c) $EI_{\bar{y}\bar{y}} = EI_{\bar{z}\bar{z}}$; $\bar{\alpha}_m = \bar{\alpha}_k$

Door dit effect is het in het algemeen niet mogelijk de verplaatsingen te bepalen met de standaard *vergeet-mij-nietjes*. In dit hoofdstuk zijn verschillende methoden gedemonstreerd om de verplaatsingen te bepalen op basis van:

1. de *differentiaalvergelijking*, complete verplaatsingsveld direct in het oorspronkelijke y - z -assenstelsel van de doorsnede,
2. de aangepaste *vergeet-mij-nietjes* voor discrete verplaatsing (midden van de overspanning) in het oorspronkelijke y - z -assenstelsel van de doorsnede,
3. de *stellingen voor het krommingsvlak*, voor discrete verplaatsingen direct in het oorspronkelijke y - z -assenstelsel van de doorsnede,
4. de ontkoppelde vervorming in de hoofdrichtingen, discrete verplaatsingen (midden van de overspanning) op basis van de *vergeet-mij-nietjes* in de hoofdrichtingen.

Merk op dat er bij deze laatste aanpak meer transformaties nodig zijn. Eerst moeten de hoofdrichtingen worden bepaald, vervolgens moet de belasting getransformeerd worden naar de hoofdrichting om ten slotte met eenvoudige *vergeet-mij-nietjes* de verplaatsingen in de hoofdrichtingen te vinden. Deze verplaatsingen moeten ten slotte terug worden getransformeerd naar het assenstelsel van de doorsnede. Ook de ligging van de neutrale lijn is niet eenvoudig met deze methode op basis van hoofdrichtingen te bepalen.

In de ingenieurspraktijk worden deze doorsnede berekeningen allemaal uitgevoerd door computerprogramma's of spreadsheets waardoor kennis van en het onderscheid tussen deze verschillende methoden op de achtergrond is komen te staan. Voor een goed begrip van de waargenomen fenomenen is echter deze kennis nog steeds onontbeerlijk. Aanpak 2 verdient de voorkeur in geval van handberekeningen.

1.3 Uitbreiding van de theorie voor inhomogene doorsneden

Als de vezels in de doorsnede niet allemaal van hetzelfde materiaal zijn en daardoor verschillende elasticiteitsmoduli hebben spreken we van een inhomogene doorsnede. In een inhomogene doorsnede is de elasticiteitsmodulus afhankelijk van de plaats in de doorsnede:

$$E(y, z)$$

Ten opzichte van de afgeleide theorie voor homogene doorsneden is dit de enige verandering. Het inhomogeen zijn van de doorsnede komt dus niet tot uiting in de kinematische vergelijkingen en ook niet in de evenwichtsbetrekkingen, maar uitsluitend in de constitutieve betrekkingen en de daarmee samenhangende spanningsformules.

De constitutieve relatie, het verband tussen de spanning en de vervorming, wordt in dit geval voorgesteld door de wet van Hooke :

$$\sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

In de op extensie en buiging belaste doorsnede zullen de vezels verlengen of verkorten. De kinematische betrekkingen veranderen niet waardoor het rekverloop over de doorsnede nog steeds kan worden beschreven met de drie vervormingsgrootheden die constant zijn voor de gegeven doorsnede : ε , κ_y , κ_z

Voor iedere vezel (y,z) in de doorsnede ligt hiermee de rek vast:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z$$

De spanning in de vezel wordt nu beschreven met:

$$\sigma(y, z) = E(y, z) \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z)$$

De spanningsverdeling over de doorsnede is nu niet meer lineair. Hiermee moet rekening worden gehouden bij het uitwerken van de snedekrachten.

Voor de normaalkracht N wordt gevonden:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma(y, z) dA = \int_A E(y, z) \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z) dA \Leftrightarrow \\ &= \varepsilon \int_A E(y, z) dA + \kappa_y \int_A E(y, z) y dA + \kappa_z \int_A E(y, z) z dA \end{aligned}$$

Voor de buigende momenten M_y en M_z levert dit:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A y \sigma(y, z) dA = \int_A E(y, z) \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z) y dA \Leftrightarrow \\ &= \varepsilon \int_A E(y, z) y dA + \kappa_y \int_A E(y, z) y^2 dA + \kappa_z \int_A E(y, z) y z dA \\ M_z &= \int_A z \sigma(y, z) dA = \int_A E(y, z) \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z) z dA \Leftrightarrow \\ &= \varepsilon \int_A E(y, z) z dA + \kappa_y \int_A E(y, z) y z dA + \kappa_z \int_A E(y, z) z^2 dA \end{aligned}$$

Het verschil met de eerdere uitwerking in paragraaf 1.4 is dat de elasticiteitsmodulus een functie van y en z is die onder het integraalteken moet blijven.

Om tot handelbare betrekkingen te komen worden de volgende doorsnedegrootheden gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \int_A E(y, z) dA &= EA & \int_A E(y, z) y dA &= ES_y & \int_A E(y, z) y^2 dA &= EI_{yy} \\ & & \int_A E(y, z) z dA &= ES_z & \int_A E(y, z) yz dA &= EI_{yz} = EI_{zy} \\ & & & & \int_A E(y, z) z^2 dA &= EI_{zz} \end{aligned}$$

De op de vorige bladzijde gevonden relaties tussen de snedekrachten (N , M_y en M_z) werkend op de doorsnede en de vervormingen (ε , κ_y en κ_z) behorende bij de doorsnede worden hiermee:

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon + ES_y\kappa_y + ES_z\kappa_z \\ M_y &= ES_y\varepsilon + EI_{yy}\kappa_y + EI_{yz}\kappa_z \\ M_z &= ES_z\varepsilon + EI_{zy}\kappa_y + EI_{zz}\kappa_z \end{aligned}$$

In matrixvorm kan dit worden genoteerd als:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & ES_y & ES_z \\ ES_y & EI_{yy} & EI_{yz} \\ ES_z & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Op het eerste gezicht lijkt deze relatie sprekend op die voor homogene doorsneden. Er is echter een groot verschil. De componenten van de hierboven weergegeven matrix moeten als “*twee-letter-symbolen*” worden gelezen. De term EA bijvoorbeeld is dus niet het resultaat van de vermenigvuldiging van E met A maar de aanduiding voor:

$$EA = \int_A E(y, z) dA$$

De overeenkomst met de afleiding voor de homogene doorsnede is echter overduidelijk. Als het assenstelsel in het normaalkrachtencentrum (NC) van de doorsnede wordt gekozen dan geldt (definitie van het NC):

$$ES_y = \int_A E(y, z) y dA = 0$$

$$ES_z = \int_A E(y, z) z dA = 0$$

De gevonden constitutieve relaties worden hiermee vereenvoudigd tot:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{basisformule (1)}$$

Door deze gelukkige keuze van het assenstelsel worden de gevallen van buiging en extensie ontkoppeld.

Voor het bepalen van de spanningen in de doorsnede ten gevolge van bekende snedekrachten worden met het bovenstaande stelsel eerst de drie vervormingsgrootheden bepaald.

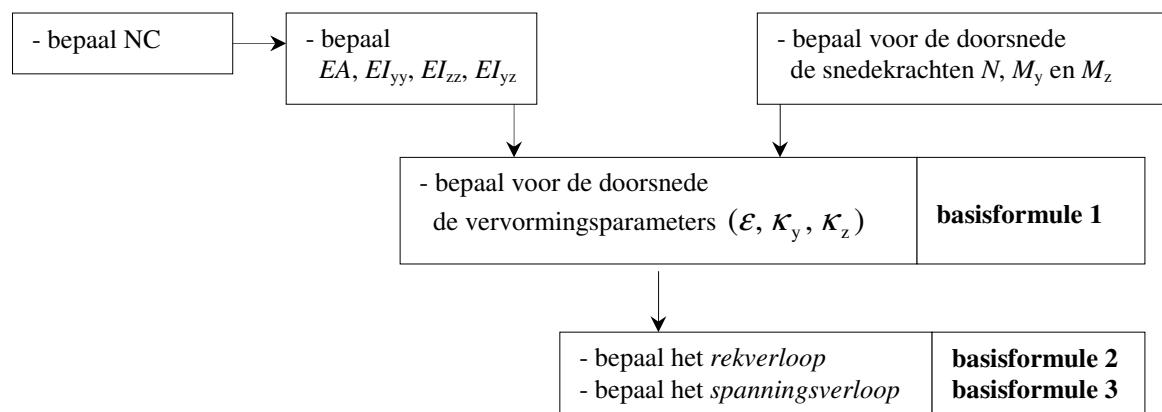
Vervolgens kan op iedere plaats in de doorsnede de rek worden bepaald met:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z \quad \text{basisformule (2)}$$

Voor de bepaling van de spanningen in de doorsnede moet terug worden gegrepen op de basisvergelijking:

$$\sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z) \quad \text{basisformule (3)}$$

Deze werkwijze is in het onderstaande schema nog eens weergegeven.

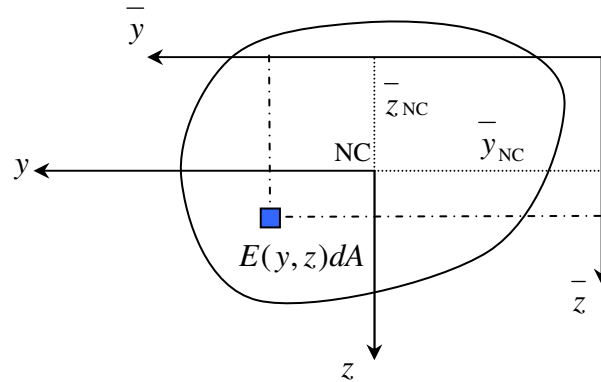


Figuur 30 : Berekeningsschema.

Omdat de elasticiteitsmodulus over de doorsnede kan variëren is het spanningsverloop nu **niet** gelijkvormig aan het rekverloop zoals wel het geval is bij homogene doorsneden. Het is nu dus niet mogelijk om één algemeen geldende spanningsformule af te leiden zoals wel het geval was voor de homogene doorsnede.

1.3.1 Ligging van het NC voor inhomogene doorsneden

Met de ligging van het NC wordt tevens een verschil met de homogene doorsnede aangeroerd. Voor de ligging van het NC voor de *inhomogene* doorsnede geldt dat de ES_y en de ES_z t.o.v. het NC nul moeten zijn. Op een analoge manier als voor homogene doorsneden kan met behulp van de verschuivingsregel de ligging van het NC worden bepaald. Met behulp van figuur 31 wordt dit hieronder toegelicht.



Figuur 31 : Gewogen statisch moment van de doorsnede.

In het verschoven $\bar{y}-\bar{z}$ -assenstelsel, waarin $\bar{y}_{NC}$ en $\bar{z}_{NC}$ de coördinaten van het normaalkrachtencentrum NC zijn, geldt:

$$\bar{y} = y + \bar{y}_{NC} \quad \bar{z} = z + \bar{z}_{NC}$$

Voor het “gewogen” statisch moment geldt:

$$\begin{aligned} ES_{\bar{y}} &= \int_A E(y, z) \times \bar{y} dA = \int_A E(y, z) \times y dA + \bar{y}_{NC} \int_A E(y, z) dA = ES_y + EA \times \bar{y}_{NC} \\ ES_{\bar{z}} &= \int_A E(y, z) \times \bar{z} dA = \int_A E(y, z) \times z dA + \bar{z}_{NC} \int_A E(y, z) dA = ES_z + EA \times \bar{z}_{NC} \end{aligned}$$

Aangezien het y - z -assenstelsel door het normaalkrachtencentrum gaat geldt per definitie:

$$ES_y = 0; \quad ES_z = 0$$

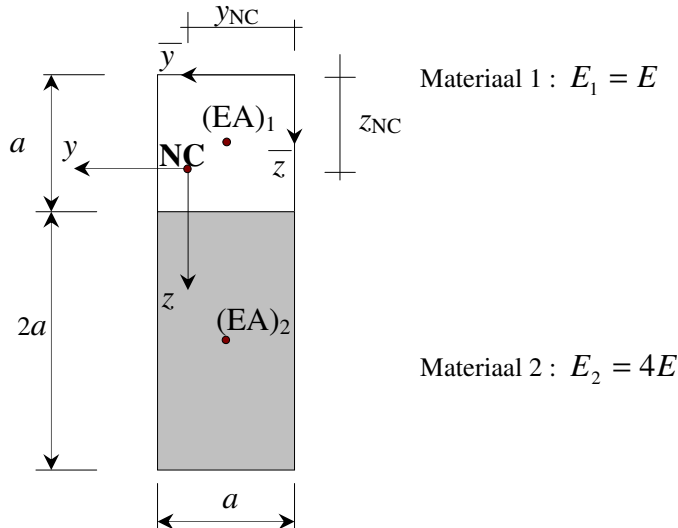
De ligging van het normaalkrachtencentrum volgt hiermee uit:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{NC} &= \frac{ES_{\bar{y}}}{EA} \\ \bar{z}_{NC} &= \frac{ES_{\bar{z}}}{EA} \end{aligned}$$

Aan de hand van een voorbeeld zal dit worden toegelicht.

1.3.2 Voorbeeld 3 : Normaalkrachtencentrum versus zwaartepunt

Een rechthoekige doorsnede bestaat uit twee materialen 1 en 2. Beide materialen hebben dezelfde massadichtheid maar hebben verschillende elasticiteitsmoduli.



Figuur 32 : Rechthoekige inhomogene doorsnede.

De ligging van het normaalkrachtencentrum (NC) t.o.v. het $\bar{y} - \bar{z}$ -assenstelsel wordt bepaald op dezelfde wijze als voorheen bij homogene doorsneden maar nu onder gebruikmaking van de “dubbel-letter-symbolen”.

Verticaal:

$$z_{\text{NC}} = \frac{ES_{\bar{z}}}{EA} = \frac{(EA)_1 \times \frac{1}{2}a + (EA)_2 \times 2a}{(EA)_1 + (EA)_2} = \frac{E_1 \times a \times a \times \frac{1}{2}a + E_2 \times 2a \times a \times 2a}{E_1 \times a \times a + E_2 \times 2a \times a} = \frac{E \times \left(\frac{1}{2}a^3 + 16a^3\right)}{E \times 9a^2} = 1\frac{5}{6}a$$

Horizontaal:

$$y_{\text{NC}} = \frac{ES_{\bar{y}}}{EA} = \frac{(EA)_1 \times \frac{1}{2}a + (EA)_2 \times \frac{1}{2}a}{(EA)_1 + (EA)_2} = \frac{E_1 \times a \times a \times \frac{1}{2}a + E_2 \times 2a \times a \times \frac{1}{2}a}{E_1 \times a \times a + E_2 \times 2a \times a} = \frac{E \times \left(\frac{1}{2}a^3 + 4a^3\right)}{E \times 9a^2} = \frac{1}{2}a$$

Aangezien beide materialen dezelfde massadichtheid hebben zal het zwaartepunt van de doorsnede t.o.v. het $\bar{y} - \bar{z}$ -assenstelsel liggen op:

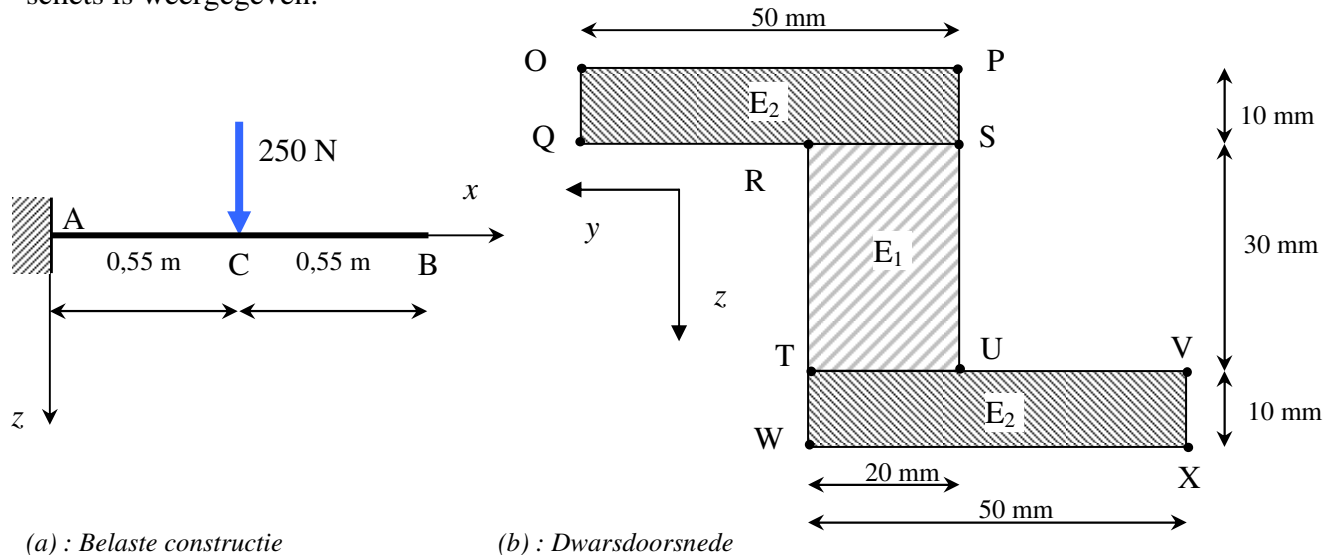
$$y_{\text{ZW}} = \frac{1}{2}a$$

$$z_{\text{ZW}} = 1\frac{3}{6}a \neq z_{\text{NC}}$$

Bij inhomogene doorsneden vallen dus het *zwaartepunt* en het *normaalkrachtencentrum* niet samen en het is dus van belang goed onderscheid te maken tussen deze beide begrippen.

1.3.3 Voorbeeld 4 : Spanningen in een inhomogene doorsnede

Een eenzijdig ingeklemde balk heeft een inhomogene en niet-symmetrische doorsnede die is opgebouwd uit drie met elkaar verlijmden delen. De ligger wordt in C belast met een puntlast van 250 N. De doorsnede bestaat uit twee verschillende materialen zoals in de onderstaande schets is weergegeven.



Gegevens : $E_1 = 6000 \text{ N/mm}^2$ $E_2 = 12000 \text{ N/mm}^2$

Figuur 33 : Inhomogene en niet-symmetrische doorsnede.

Van deze constructie wordt gevraagd de normaalspanningsverdeling te berekenen in de doorsnede bij de inklemming. Daarvoor zijn een aantal karakteristieke punten in de doorsnede aangegeven waar de spanning kan worden bepaald.

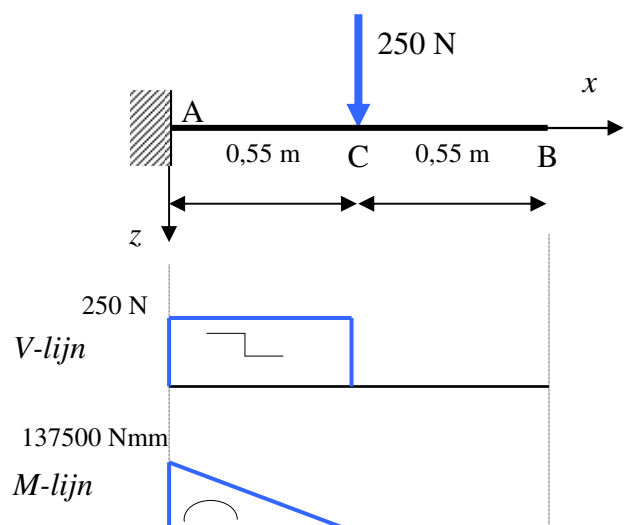
De oplossingsstrategie is weergegeven in het schema van figuur 30. Voor het uitwerken van deze vergelijkingen is het noodzakelijk de “dubbel-letter-symbolen” uit te werken voor de doorsnede. Daarvoor is het nodig eerst de ligging van het normaalkrachtencentrum NC te bepalen.

De doorsnede is rotatie-symmetrisch t.o.v. het zwaartepunt van materiaal 1. Het NC ligt daarom in dit rotatiecentrum.

In figuur 33 is de krachtsverdeling in de constructie weergegeven. In dit geval hebben we alleen te maken met een moment en een dwarskracht in de constructie. Ter plaatse van de inklemming zijn deze:

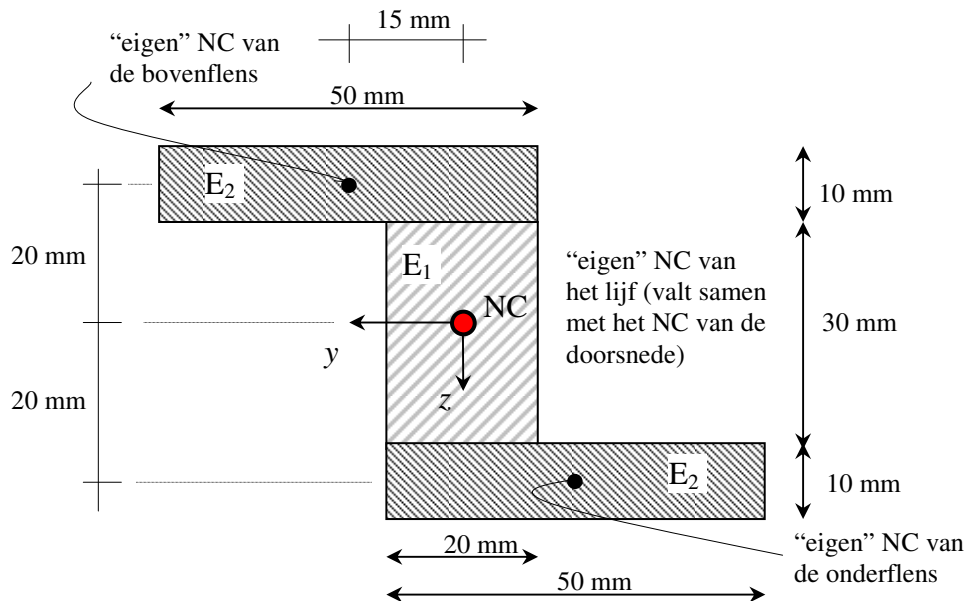
$$V_z = 250 \text{ N}$$

$$M_z = -137500 \text{ Nmm}$$



Figuur 34 : Krachtsverdeling in de ligger AB.

Voor het bepalen van de “*dubbel-letter-symbolen*” wordt per materiaaldeel de bijdrage bepaald. Hiervoor zijn voor ieder deel de verschuivingen van het eigen NC t.o.v. de ligging van het NC van de totale doorsnede in y- en z-richting nodig. In figuur 35 is dit weergegeven.



Figuur 35 : Verschuivingen van “eigen” NC’s t.o.v. het NC van de doorsnede.

Voor de drie rechthoeken uit de figuur geldt voor deze verschuivingen:

<i>onderdeel</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
Bovenflens	+15 mm	-20 mm
Lijf	0 mm	0 mm
Onderflens	-15 mm	20 mm

Uitwerken van de “*dubbel-letter-symbolen*” levert:

$$EI_{yy} = E_1 \underbrace{\left(\frac{1}{12} \times 30 \times 20^3\right)}_{\text{lijf}} + 2E_2 \underbrace{\left(\frac{1}{12} \times 10 \times 50^3 + 10 \times 50 \times 15^2\right)}_{\text{boven - en onderflens}} = 5,32 \times 10^9 \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{yz} = E_2 \underbrace{(10 \times 50 \times 15 \times (-20))}_{\text{bovenflens}} + E_2 \underbrace{(10 \times 50 \times (-15) \times 20)}_{\text{onderflens}} = -3,60 \times 10^9 \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{zz} = E_1 \underbrace{\left(\frac{1}{12} \times 20 \times 30^3\right)}_{\text{lijf}} + 2E_2 \underbrace{\left(\frac{1}{12} \times 50 \times 10^3 + 50 \times 10 \times 20^2\right)}_{\text{boven - en onderflens}} = 5,17 \times 10^9 \text{ Nmm}^2$$

De krommingen zijn te bepalen met basisformule 1:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -137500 \end{bmatrix} = 10^9 \begin{bmatrix} 5,32 & -3,6 \\ -3,6 & 5,17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \kappa_y &= -34,03 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \\ \kappa_z &= -50,29 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \end{aligned}$$

De rekverdeling over de doorsnede ligt hiermee vast. Met behulp van basisformule 2 is in ieder punt de rek te bepalen:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z \quad \text{basisformule (2)}$$

De spanning in een punt kan worden gevonden door de elasticiteitsmodulus van de vezel door het punt te vermenigvuldigen met de gevonden rek in dat punt:

$$\sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z) \quad \text{basisformule (3)}$$

De berekening voor deze doorsnede kan eenvoudig met een spreadsheet in EXCEL worden uitgevoerd. Het resultaat hiervan is voor de gevraagde punten in de onderstaande tabel weergegeven.

Eenheden N, mm						
	Punt	y [mm]	z [mm]	E-modulus [N/mm ²]	Rek [$\cdot 10^{-3}$]	Spanning [N/mm ²]
Materiaal 2	O	40	-25	12000	-0,10	-1,25
	P	-10	-25	12000	1,60	19,17
	Q	40	-15	12000	-0,61	-7,28
	S	-10	-15	12000	1,09	13,14
Materiaal 1	R	10	-15	6000	0,41	2,48
	S	-10	-15	6000	1,09	6,57
	T	10	15	6000	-1,09	-6,57
	U	-10	15	6000	-0,41	-2,48
Materiaal 2	T	10	15	12000	-1,09	-13,14
	V	-40	15	12000	0,61	7,28
	W	10	25	12000	-1,60	-19,17
	X	-40	25	12000	0,10	1,25

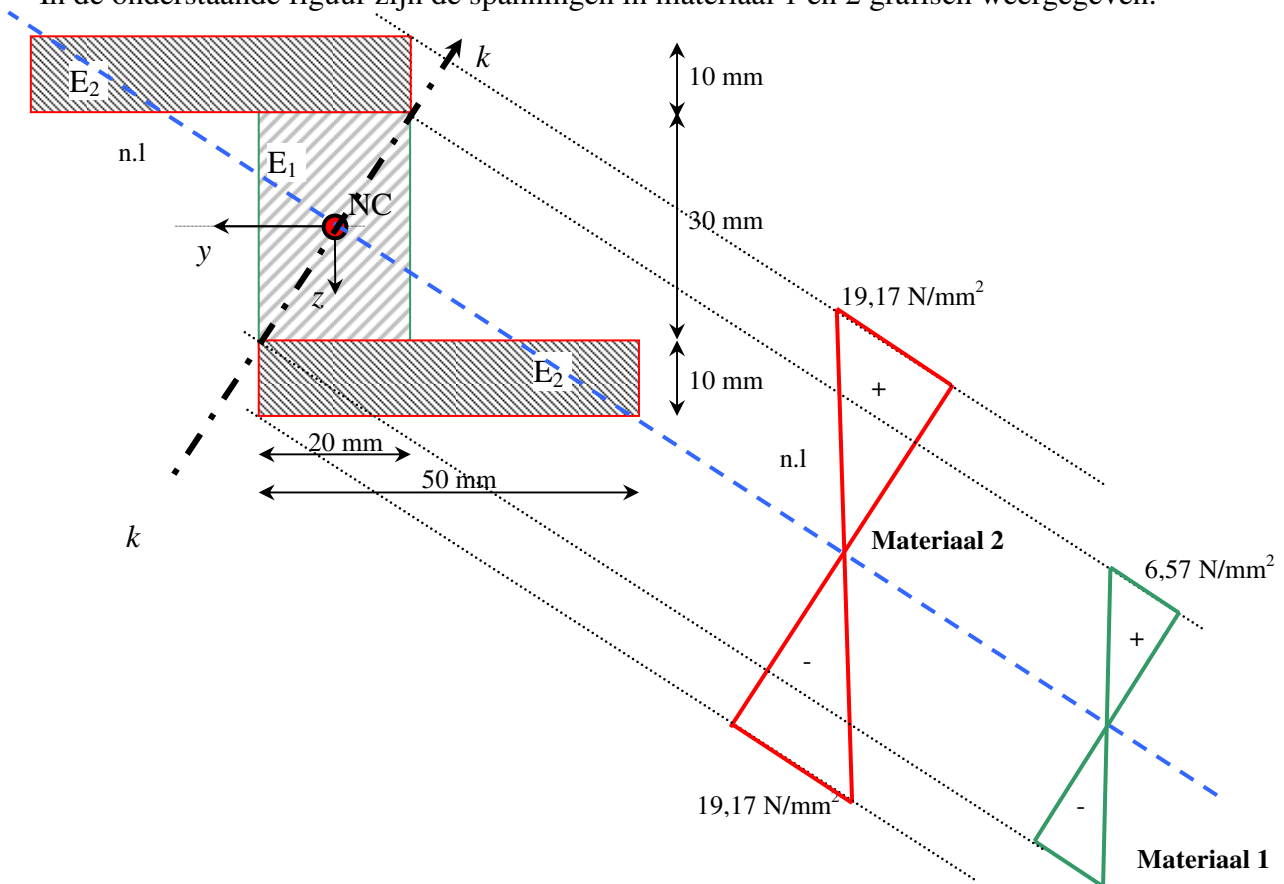
Voor de vier punten R,S,T en U zijn twee waarden voor de spanningen mogelijk. Afhankelijk of gekeken wordt naar de spanning in materiaal 1 of in materiaal 2 wordt de rek in deze punten vermenigvuldigd met de elasticiteitsmodulus van materiaal 1 of die van materiaal 2. Dit leidt tot een sprong in het spanningsverloop. Voor punt S is dit met vet in de tabel aangegeven. Grafisch kunnen de resultaten ook worden weergegeven. Hiervoor is het van belang om eerst de ligging van de neutrale lijn te bepalen. De vergelijking hiervan is :

$$\begin{aligned} \varepsilon(y, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad & -34,03 \times 10^{-6} y - 50,29 \times 10^{-6} z = 0 \\ & -34,03 y - 50,29 z = 0 \end{aligned}$$

Aangezien er geen normaalrek aanwezig is gaat de neutrale lijn door het NC van de doorsnede. In de figuur op de volgende bladzijde is deze neutrale lijn getekend. Loodrecht op deze neurale lijn staat het vlak k waarin de ligger kromt.

Net als bij het voorbeeld van de homogene doorsnede wordt het spanningsdiagram loodrecht op de neutrale lijn uitgezet. Om de spanningen op een heldere manier gepresenteerd te krijgen wordt het aangeraden om per materiaal de spanningsverdeling over de doorsnede in een aparte figuur aan te geven.

In de onderstaande figuur zijn de spanningen in materiaal 1 en 2 grafisch weergegeven.



Figuur 36 : Neutrale lijn, kromming en spanningen in materiaal 1 en 2.

Ook voor deze constructie kunnen de verplaatsingen in y - en z -richting worden bepaald met behulp van de *aangepaste vergeet-mij-nietjes*. Dit wordt aan de lezer overgelaten.

1.4 Krachtpunt in de doorsnede

De vergelijking van de rek zoals die tot nu toe is gehanteerd luidt:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z$$

Uiteraard is deze vergelijking afhankelijk van de belasting. Als de normaalkracht N in de doorsnede nul is, dan is de normaalrek ε nul en gaat de neutrale lijn door het NC zoals ook in het vorige voorbeeld het geval was. Als de normaalkracht N ongelijk is aan nul zal de neutrale lijn niet door het NC van de doorsnede gaan! De vergelijking van de rek kan met behulp van de constitutieve vergelijking ook direct worden uitgedrukt in de snedekrachten N , M_y en M_z . Hiervoor worden de uitdrukkingen van paragraaf 1.2.5 gebruikt:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}$$

$$\kappa_y = \frac{EI_{zz}}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} M_y - \frac{EI_{yz}}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} M_z = \chi_{yy} M_y - \chi_{yz} M_z$$

$$\kappa_z = -\frac{EI_{yz}}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} M_y + \frac{EI_{yy}}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} M_z = -\chi_{yz} M_y + \chi_{zz} M_z$$

De vergelijking voor de rek wordt hiermee:

$$\varepsilon(y, z) = \frac{N}{EA} + (\chi_{yy} M_y - \chi_{yz} M_z) \times y + (-\chi_{yz} M_y + \chi_{zz} M_z) \times z$$

Als de normaalkracht N ongelijk is aan nul kunnen de momenten ook worden uitgedrukt in een excentrisch aangrijpende normaalkracht N :

$$M_y = N \times e_y$$

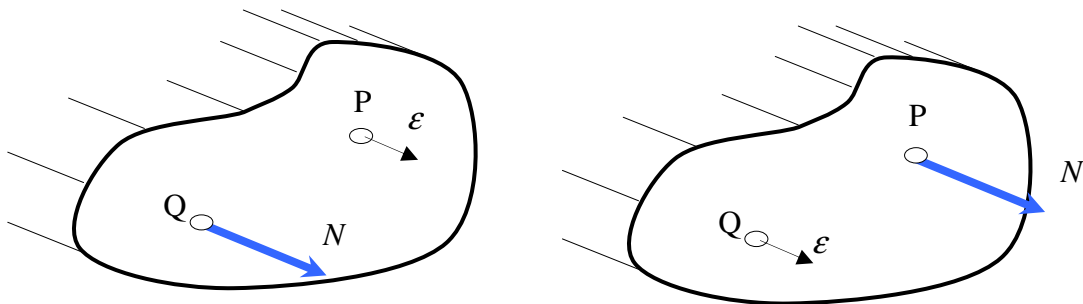
$$M_z = N \times e_z$$

De normaalkracht wordt dus verschoven gedacht t.o.v. het normaalkrachtencentrum en grijpt aan in (e_y, e_z) . Er werkt dus nu alleen een excentrische normaalkracht op de doorsnede en deze grijpt aan in het *krachtpunt*. Door de momenten uit te drukken in de normaalkracht kan de gevonden relatie voor de rek geschreven worden als:

$$\varepsilon(y, z) = \frac{N}{EA} + (\chi_{yy} N \times e_y - \chi_{yz} N \times e_z) \times y + (-\chi_{yz} N \times e_y + \chi_{zz} N \times e_z) \times z \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon(y, z) = \frac{N}{EA} \left[1 + (\chi_{yy} EA \times e_y - \chi_{yz} EA \times e_z) \times y + (-\chi_{yz} EA \times e_y + \chi_{zz} EA \times e_z) \times z \right]$$

Deze laatste vergelijking geeft de rek ε in (y, z) voor een normaalkracht N in (e_y, e_z) . Als in gedachten de kracht N in (y, z) wordt geplaatst en de rek ε wordt bepaald in (e_y, e_z) blijkt deze dezelfde waarde op te leveren. In de onderstaande figuur is dit gedachtenexperiment weergegeven.



Figuur 37 : Wederkerigheid van Maxwell.

In woorden houdt dit in :

De rek in P t.g.v. een kracht N in Q is gelijk aan de rek in Q t.g.v. een kracht N in P.

Dit principe staat bekend als de **wederkerigheidsstelling van Maxwell**. Dit principe geldt algemeen voor lineair elastische systemen waar het beginsel van superpositie op mag worden toegepast. Van dit principe zal nog vaker gebruik worden gemaakt.

Bijzonder geval:

Als de y - en z -as samenvallen met de hoofdrichtingen kan de gevonden uitdrukking voor de rek sterk worden vereenvoudigd. Er geldt dan immers :

$$\chi_{yz} = 0; \quad \chi_{yy} = \frac{1}{EI_{yy}}; \quad \chi_{zz} = \frac{1}{EI_{zz}}$$

De rek wordt nu beschreven met:

$$\varepsilon(y, z) = \frac{N}{EA} \left[1 + \frac{EA \times e_y \times y}{EI_{yy}} + \frac{EA \times e_z \times z}{EI_{zz}} \right] \quad (\text{symmetrisch profiel})$$

Door gebruik te maken van het begrip traagheidsstraal of oppervlaktemomentarm i kan deze vergelijking nog verder vereenvoudigd worden:

$$i_y^2 = \frac{EI_{yy}}{EA}; \quad i_z^2 = \frac{EI_{zz}}{EA} \quad (\text{symmetrisch profiel})$$

De rek wordt hiermee:

$$\varepsilon(y, z) = \frac{N}{EA} \left[1 + \frac{e_y \times y}{i_y^2} + \frac{e_z \times z}{i_z^2} \right] \quad (\text{symmetrisch profiel})$$

Van deze beschrijving van de rek zal in de volgende paragraaf over de kern gebruik worden gemaakt.

1.5 Kern van de doorsnede

Als de neutrale lijn in de doorsnede ligt deelt deze de doorsnede in een deel dat onder trek staat en in een deel dat onder druk staat. Sommige materialen kunnen niet of nauwelijks trekspanningen opnemen. Voor deze materialen is het belangrijk de doorsnede zodanig te belasten dat er uitsluitend drukspanningen optreden. De neutrale lijn moet dan buiten de doorsnede liggen of juist raken aan de doorsnede. Met deze eis is een gebied te bepalen in de doorsnede waar het krachtpunt zich mag bevinden opdat nergens in de doorsnede de rek en daarmee de spanning van teken wisselt. Dit gebied wordt de kern van de doorsnede genoemd.

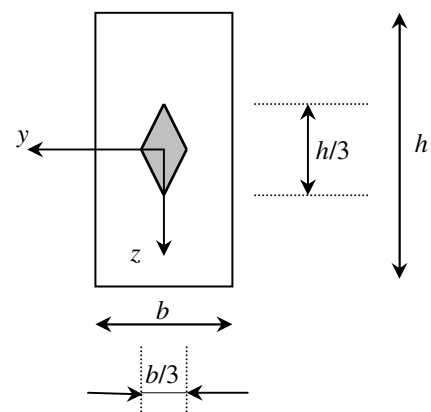
In paragraaf 4.9 van MECH-2 is het begrip kern geïntroduceerd en is deze voor een rechthoekige doorsnede bepaald. Voor de rechthoekige doorsnede met afmetingen $b \times h$ bleek de kern een ruit te zijn met hoekpunten die een afstand tot het NC hebben in y - en z -richting van respectievelijk $\frac{1}{6}b$ en $\frac{1}{6}h$. In figuur 38 is dit weergegeven.

In deze paragraaf zal een algemene methode worden beschreven waarmee ook voor niet-symmetrische en/of inhomogene doorsneden de kern kan worden bepaald.

We maken daarbij gebruik van twee belangrijke uitgangspunten :

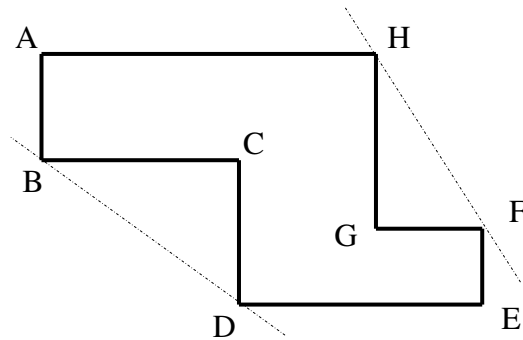
- De neutrale lijn mag nergens binnen de doorsnede liggen.
- Doorsneden met rechte randen hebben een kern die bestaat uit een polygoon.

De eerste eis volgt direct uit de definitie van de neutrale lijn dat nergens in de doorsnede de rek en daarmee de spanning van teken mag wisselen.



Figuur 38 : Kern van een rechthoekige doorsnede.

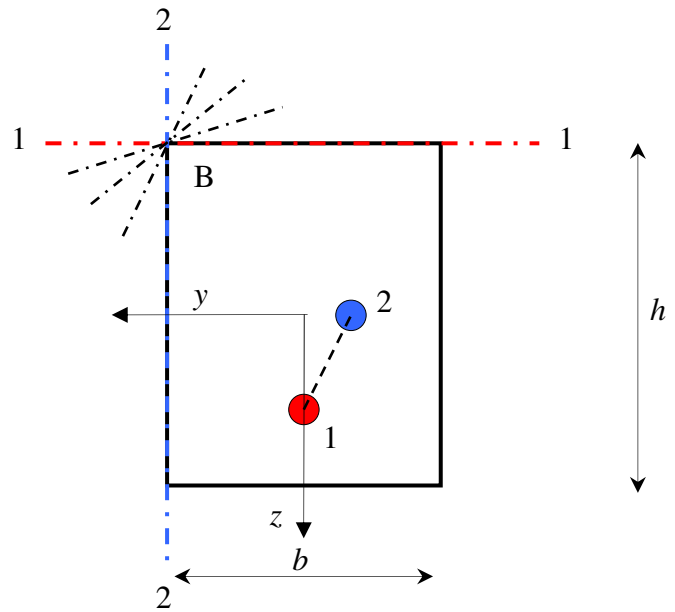
Voor de doorsnede in figuur 39 betekent dit dat de neutrale lijn altijd buiten de “buitenomtrek” ABDEFH moet liggen.



Figuur 39 : Ligging van de neutrale lijn buiten de “buitenomtrek” van de doorsnede.

Op basis van dit uitgangspunt is iedere buitenrand van de doorsnede een uiterste ligging voor de neutrale lijn opdat nergens in de doorsnede een tekenwisseling van de rek optreedt. Dit betekent dat bijvoorbeeld voor de hierboven afgebeelde doorsnede dat er zes randen zijn die onderzocht moeten worden. Iedere rand en daarmee de uiterste ligging voor de neutrale lijn levert een krachtpunt op. Dit krachtpunt is een punt dat op de rand van de kern van de doorsnede ligt.

Voor de tweede eis onderzoeken we de rand van de kern van een doorsnede die bestaat uit rechte randen waarvan twee kernpunten bekend zijn. De rand van de kern is de verzameling van krachtpunten die hoort bij alle mogelijke neutrale lijnen die gaan door het hoekpunt dat het snijpunt vormt van de twee beschouwde randen en dat een punt van de doorsnede is. In figuur 40 is dit weergegeven. Rand 1-1 levert kernpunt 1 op. Rand 2-2 levert kernpunt 2 op. Alle mogelijke neutrale lijnen door het hoekpunt B leveren krachtpunten op de verbindingslijn tussen kernpunt 1 en 2. Dat deze verbindingslijn een rechte is kan verklaard worden met behulp van het eerder afgeleide wederkerigheidsprincipe van Maxwell.



Figuur 40 : Neutrale lijn door hoekpunt.

Als het krachtpunt samenvalt met hoekpunt B van de in figuur 40 weergegeven rechthoekige doorsnede dan kan de ligging van de neutrale lijn worden bepaald met de eerder op blz 38 weergegeven formule voor de rek. Voor de traagheidsstralen van de doorsnede geldt :

$$i_y^2 = \frac{EI_{yy}}{EA} = \frac{\frac{1}{12}Eb^3h}{EA} = \frac{1}{12}b^2; \quad i_z^2 = \frac{EI_{zz}}{EA} = \frac{\frac{1}{12}Ebh^3}{EA} = \frac{1}{12}h^2$$

Als B het krachtpunt is geldt:

$$e_y = \frac{1}{2}b; \quad e_z = -\frac{1}{2}h$$

De neutrale lijn die hoort bij dit krachtpunt is:

$$\varepsilon(y, z) = \frac{N}{EA} \left[1 + \frac{e_y \times y}{i_y^2} + \frac{e_z \times z}{i_z^2} \right] = 0 \Leftrightarrow (\text{neutrale lijn})$$

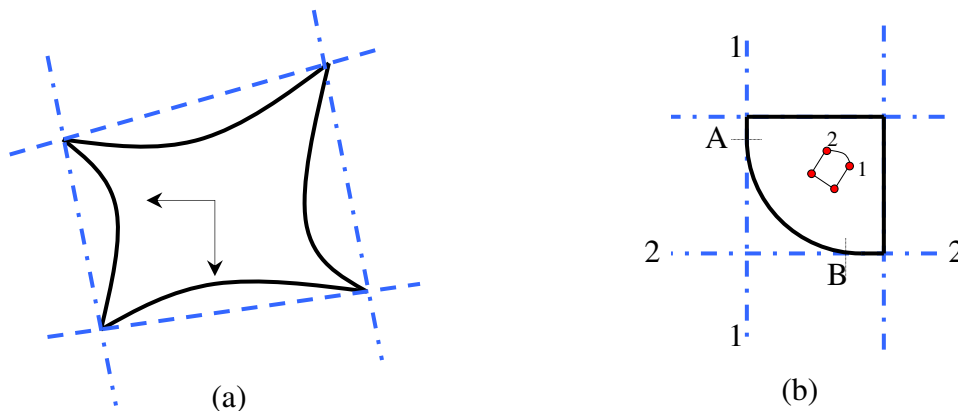
$$1 + \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{12}b^2} \times y - \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{12}h^2} \times z = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{6y}{b} - \frac{6z}{h} = 0$$

Voor $y=0$ gaat deze lijn door kernpunt 1, voor $z=0$ gaat deze lijn door kernpunt 2.

Als het krachtpunt in B ligt is voor alle punten van de neutrale lijn de spanning nul. Volgens Maxwell moet dan ook gelden dat de normaalspanning in B nul moet zijn voor alle krachtpunten ergens op de hierboven bepaalde lijn door de kernpunten 1 en 2. Hiermee is bewezen dat de rand van de kern een rechte lijn is. Uiteraard moet dit bewijs ook geldig zijn voor niet-symmetrische en/of inhomogene doorsneden aangezien de neutrale lijn altijd een rechte lijn is. De kinematische betrekkingen veranderen immers niet door het niet-symmetrisch en/of inhomogeen zijn van de doorsnede.

Als de doorsnede niet uitsluitend bestaat uit rechte randen wordt het bepalen van de kern een stuk bewerklijker. In de onderstaande figuur wordt dit verduidelijkt.



Figuur 41 : Willekeurige vormen voor de doorsnede.

De kern van de doorsnede uit figuur 41 (a) zal bestaan uit rechte lijnen. Immers de lijnen van de buitenranden snijden elkaar in een punt dat tevens een punt van de doorsnede is. De buitenranden van figuur 41 (b) leveren niet uitsluitend snijpunten op die ook in de doorsnede liggen. Rand 1-1 en 2-2 snijden elkaar in een punt buiten de doorsnede. Voor het bepalen van de rand van de kern tussen kernpunt 1 en 2 zal voor ieder punt op rand A-B een raaklijn moeten worden bepaald die als neutrale lijn een krachtpunt oplevert dat op de rand ligt van de kern tussen kernpunt 1 en 2. Dit deel van de rand van de kern zal geen rechte lijn zijn !

Voor het bepalen van de kern van een willekeurige doorsnede echter kan geen gebruik worden gemaakt van de formules op blz 38. Hiervoor moet worden teruggegrepen op de algemene beschrijving van de neutrale lijn van figuur 11, hier overgenomen als figuur 11b:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{\kappa_y}{\varepsilon} \times y + \frac{\kappa_z}{\varepsilon} \times z = 0 \quad \text{met: } \varepsilon \neq 0$$

Om de kernpunten te vinden wordt een ligging van de neutrale lijn langs de rand van de doorsnede aangenomen. Stel deze neutrale lijn gaat door de punten $(y_1, 0)$ en $(0, z_1)$. Voor deze ligging van de neutrale lijn geldt dan, zie figuur 11c:

$$y_1 = -\frac{\varepsilon}{\kappa_y}$$

$$z_1 = -\frac{\varepsilon}{\kappa_z}$$

Om de plaats van het krachtpunt te vinden dat bij deze ligging van de neutrale lijn behoort passen we opnieuw de constitutieve relaties toe waarbij we de momenten in de doorsnede uitdrukken in de in het krachtpunt aangrijpende (excentrische) normaalkracht :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

en :

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

Combineren van deze uitdrukkingen leidt tot:

$$\begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA\varepsilon} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y/\varepsilon \\ \kappa_z/\varepsilon \end{bmatrix}$$

Met de aangenomen ligging van de neutrale lijn volgt hiermee voor de ligging van het daarbij behorende krachtpunt (= punt van de kern) :

$$\begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/y_1 \\ 1/z_1 \end{bmatrix}$$

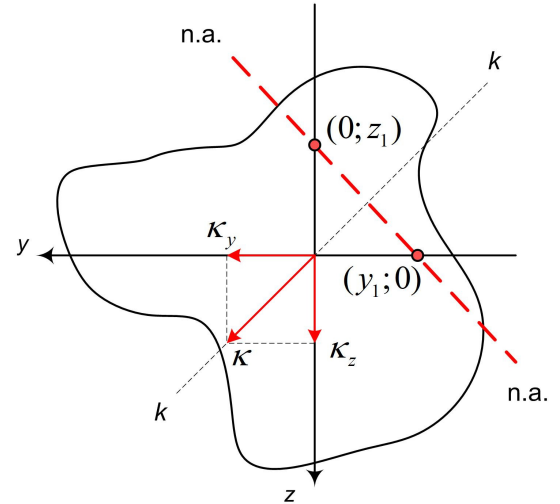


Figure 11b : Ligging van de neutrale lijn in de doorsnede.

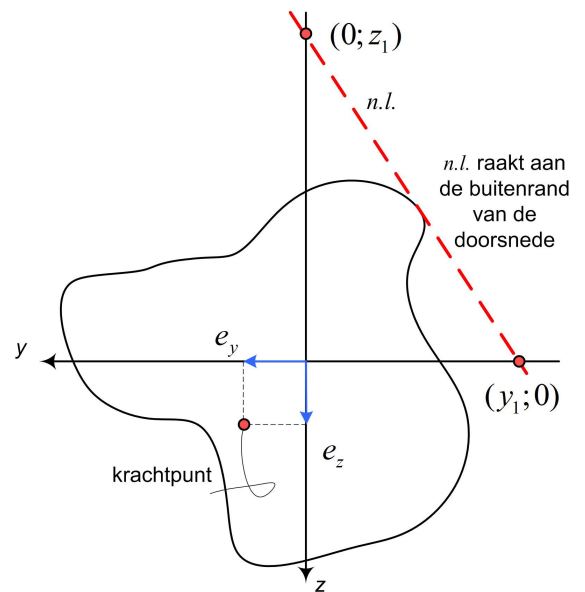


Figure 11c : Ligging van het krachtpunt behorend bij een neutrale lijn die juist raakt aan de doorsnede.

basisformule (4)

Aan de hand van een voorbeeld zal deze methode gedemonstreerd worden.

1.5.1 Voorbeeld 5 : Kern van een niet-symmetrische doorsnede

Van de in figuur 42 weergegeven homogene doorsnede wordt gevraagd de kern te bepalen.

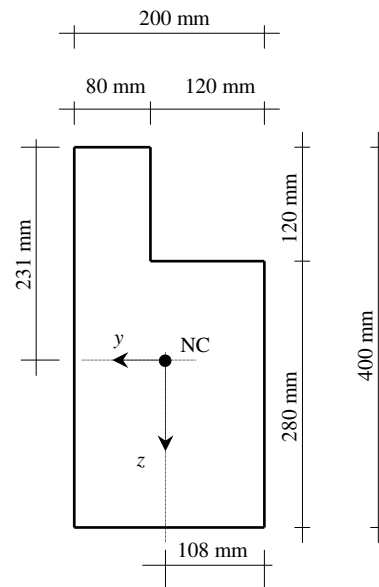
Aanpak :

Als de neutrale lijn samenvalt met een buitenrand van de doorsnede dan is het daarbij behorende krachtpunt in de doorsnede een punt van de kern. De buitenrand van de gegeven doorsnede bestaat uit 5 lijnen waarmee 5 (hoek)kernpunten kunnen worden bepaald.

Berekening :

Voor het bepalen van de hoekpunten van de kern zijn de volgende gegevens van de doorsnede nodig:

- ligging van het NC (y-z-assenstelsel)
- EA ; EI_{yy} ; EI_{yz} ; EI_{zz}



Het NC wordt bepaald met de eerder beschreven methode. Hieruit volgt voor de ligging van het NC t.o.v. de bovenrand :

Figuur 42 : Homogene doorsnede.

$$z_{NC} = \frac{400 \times 200 \times 200 - (120)^2 \times 60}{400 \times 200 - 120^2} = 231 \text{ mm}$$

Voor de ligging van het NC t.o.v. de rechterrاند geldt:

$$z_{NC} = \frac{400 \times 200 \times 100 - (120)^2 \times 60}{400 \times 200 - 120^2} = 108 \text{ mm}$$

In figuur 42 is de ligging van het NC weergegeven. Ten opzichte van dit assenstelsel kunnen de overige doorsnede gegevens worden bepaald:

$$I_{yy} = \frac{1}{12} \times 400 \times 200^3 + 400 \times 200 \times 8^2 - \frac{1}{12} \times 120^4 - 120^2 \times 48^2 = 221,3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = 400 \times 200 \times 8 \times 31 - 120^2 \times (-48) \times (-171) = -98,3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} \times 200 \times 400^3 + 400 \times 200 \times 31^2 - \frac{1}{12} \times 120^4 - 120^2 \times 171^2 = 705,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

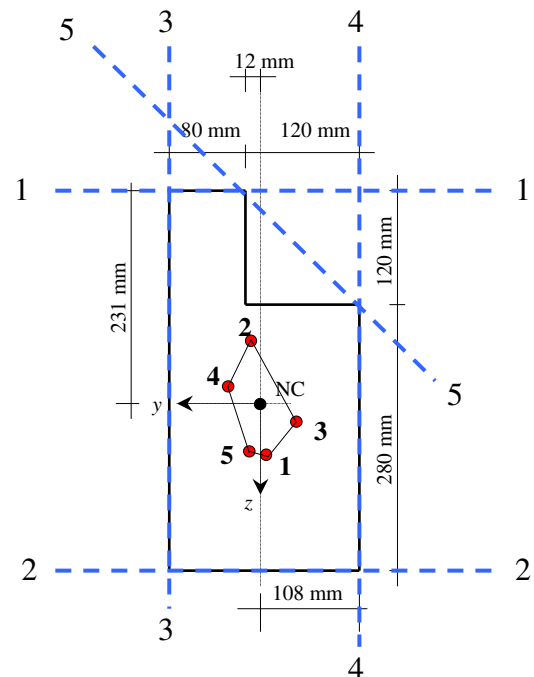
Voor het bepalen van de vijf kernpunten wordt de rand-nummering volgens figuur 43 aangehouden. De berekening kan geheel met behulp van een spreadsheet in EXCEL worden gemaakt. Per buitenrand zijn de snijpunten $(y_1, 0)$ en $(0, z_1)$ met de assen bepaald. Vervolgens wordt de hierbij behorende ligging van het kernpunt bepaald met basisformule 4:

$$\begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/y_1 \\ 1/z_1 \end{bmatrix}$$

Een overzicht van deze berekening is in de onderstaande tabel weergegeven, de kern van de doorsnede is in figuur 43 aangegeven.

Tabel : Berekeningsresultaat

<i>lijn</i>	y_1	z_1	<i>kernpunt</i>	e_y	e_z
1-1	∞	-231	1	-6,5	46,5
2-2	∞	169	2	8,9	-63,6
3-3	92	∞	3	-36,6	16,3
4-4	-108	∞	4	31,2	-13,9
5-5	-219	-219	5	8,6	42,2

**Figuur 43 : Buitenrand en kern.**

Als de normaalkracht in de doorsnede aangrijpt in het door de 5 kernpunten omsloten kern zal nergens in de doorsnede een tekenwisseling optreden in de rek en daarmee de spanning. Belangrijk daarbij is dat het niet uitmaakt hoe groot deze normaalkracht is!

Dit kan belangrijk zijn voor bijvoorbeeld voorgespannen betonnen liggers. Indien de voorspanning aangrijpt binnen de gevonden kern van de doorsnede zullen nergens in de doorsnede trekspanningen optreden. Ook hier is belangrijk op te merken dat dat onafhankelijk is van de grootte van de voorspanning!

Met name voor prefab-liggers die voorgespannen worden is het belangrijk dat er ten gevolge van de permanente en rustende belasting geen scheurvorming aan de bovenzijde van de ligger optreedt. Een conservatieve (veilige) ligging van de voorspanning is in dat geval het onderste kernpunt. Op deze manier is bij het ontwerp snel de ligging van de voorspanning in de doorsnede te bepalen. Bij de colleges voorgespannen beton zal verder ingegaan worden op deze materie.

1.6 Temperatuurinvloeden*

Verhinderde uitzetting ten gevolge van temperatuurinvloeden kan leiden tot aanzienlijke spanningen in constructies. Deze spanningen kunnen zelfs vaak maatgevend zijn voor de dimensionering van doorsneden. In MECH-2 is in paragraaf 4.12 de invloed van een lineair over de doorsnede verlopende temperatuurverandering onderzocht op een homogene en symmetrische doorsnede. In dit deel zal deze aanpak worden uitgebreid tot een algemeen geldende methode die toepasbaar is op niet-symmetrische en/of inhomogene doorsneden en waarbij het temperatuurverloop over de doorsnede een willekeurig functie van y en z mag zijn.

Met behulp van de eerder geïntroduceerde constitutieve betrekkingen die voor niet-symmetrische, inhomogene doorsneden gebaseerd is op de “*twee-letter symboliek*” zal de methode uit MECH-2 worden gegeneraliseerd. Uitgangspunt is dat zowel de elasticiteitsmodulus E als de lineaire uitzettingscoëfficiënt α en de temperatuurverhoging T over de doorsnede functies van y en z zijn.

$$E = E(y, z)$$

$$\alpha = \alpha(y, z)$$

$$T = T(y, z)$$

In de presentatie van de formules zal, in verband met de overzichtelijkheid, deze afhankelijkheid van y en z niet altijd worden aangegeven. Bij de afleiding wordt uitgegaan van de eerder in paragraaf 1.2 gestelde aannamen.

In het vezelmodel wordt de rek in een vezel opgebouwd gedacht uit een aandeel ten gevolge van spanningen en een aandeel ten gevolge van temperatuurinvloeden. Het is van belang deze aandelen duidelijk aan te geven. Met een bovenindex wordt dit onderscheid aangegeven:

ε^T : rek ten gevolge van een temperatuurinvloed

ε^σ : rek ten gevolge van een spanning

De rek in een vezel ten gevolge van een temperatuurverhoging $T(y, z)$ wordt bepaald met :

$$\varepsilon^T(y, z) = \alpha T(y, z)$$

De rek ten gevolge van de spanning in de vezel volgt uit de constitutieve betrekking voor de bewuste vezel. Voor een lineair elastisch materiaal is dat de wet van Hooke:

$$\varepsilon^\sigma(y, z) = \frac{\sigma(y, z)}{E(y, z)}$$

De totale rek in een vezel ten gevolge van de temperatuurinvloed en de spanning is:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon^T(y, z) + \varepsilon^\sigma(y, z) = \alpha T(y, z) + \frac{\sigma(y, z)}{E(y, z)}$$

Met eerder afgeleide kinematische betrekking kan het rekverloop over de doorsnede worden bepaald :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z$$

Combineren van deze laatste twee formules levert:

$$\sigma(y, z) = E(y, z) \{ \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z - \alpha T(y, z) \}$$

Op basis van deze uitdrukking kunnen de snedekrachten N , M_y en M_z op de in paragraaf 1.4 beschreven wijze worden bepaald. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de bekende “twee-letter-symbolen” :

Normaalkracht:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma(y, z) dA = \int_A E(y, z) \{ \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z - \alpha T(y, z) \} dA \\ &= EA\varepsilon + ES_y \kappa_y + ES_z \kappa_z - \int_A \alpha E(y, z) T(y, z) dA \end{aligned}$$

Buigend moment:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A y \sigma(y, z) dA \\ &= ES_y \varepsilon + EI_{yy} \kappa_y + EI_{yz} \kappa_z - \int_A y \alpha E(y, z) T(y, z) dA \\ M_z &= \int_A z \sigma(y, z) dA \\ &= ES_z \varepsilon + EI_{zy} \kappa_y + EI_{zz} \kappa_z - \int_A z \alpha E(y, z) T(y, z) dA \end{aligned}$$

Door een speciale keuze van het assenstelsel, namelijk door het normaalkrachtencentrum NC kunnen de gevonden uitdrukkingen voor de snedekrachten worden vereenvoudigd tot:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_A \alpha E(y, z) T(y, z) dA \\ \int_A y \alpha E(y, z) T(y, z) dA \\ \int_A z \alpha E(y, z) T(y, z) dA \end{bmatrix} \quad \text{basisformule (5)}$$

Hieruit blijkt dat de invloed van de temperatuur tot uitdrukking komt in de bovenstaande constitutieve vergelijking.

Als de staaf onbelast is en volkomen vrij kan vervormen, dan zijn de snedekrachten nul. De optredende rek en krommingen zijn in dat geval uitsluitend het gevolg van de temperatuurverandering in de doorsnede. Deze vervormingsgrootheden kunnen uit de bovenstaande basisformule (5) worden bepaald.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^T \\ \kappa_y^T \\ \kappa_z^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_A \alpha E(y, z) T(y, z) dA \\ \int_A y \alpha E(y, z) T(y, z) dA \\ \int_A z \alpha E(y, z) T(y, z) dA \end{bmatrix}$$

Oplossen van dit stelsel kan met behulp van de eerder gebruikte inverse van de stijfheidstensor.

$$\begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{EI_{zz}}{\det} & -\frac{EI_{yz}}{\det} \\ & -\frac{EI_{zy}}{\det} & \frac{EI_{yy}}{\det} \end{bmatrix} \quad \text{met: } \det = EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2$$

De vervormingen t.g.v. de temperatuurinvloed zijn nu te bepalen:

$$\begin{aligned} \varepsilon^T &= \frac{1}{EA} \int_A \alpha E(y, z) T(y, z) dA \\ \kappa_y^T &= \frac{1}{\det} \left\{ EI_{zz} \int_A y \alpha E(y, z) T(y, z) dA - EI_{yz} \int_A z \alpha E(y, z) T(y, z) dA \right\} \quad \text{basisformule (6)} \\ \kappa_z^T &= \frac{1}{\det} \left\{ -EI_{yz} \int_A y \alpha E(y, z) T(y, z) dA + EI_{yy} \int_A z \alpha E(y, z) T(y, z) dA \right\} \end{aligned}$$

Met deze uitdrukkingen is basisformule (5) eenvoudiger te schrijven:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon - \varepsilon^T \\ \kappa_y - \kappa_y^T \\ \kappa_z - \kappa_z^T \end{bmatrix}$$

De hier afgeleide formules worden sterk vereenvoudigd als gewerkt wordt in een assenstelsel dat samenvalt met de hoofdrichtingen van de doorsnede. In dat geval treedt er een ontkoppeling op tussen buiging om de y- en z-as. De constitutieve relaties worden dan:

$$\begin{aligned} N &= EA(\varepsilon - \varepsilon^T) & \varepsilon^T &= \int_A \alpha E(y, z) T(y, z) dA / EA \\ M_y &= EI_{yy}(\kappa_y - \kappa_y^T) & \kappa_y^T &= \int_A y \alpha E(y, z) T(y, z) dA / EI_{yy} \\ M_z &= EI_{zz}(\kappa_z - \kappa_z^T) & \kappa_z^T &= \int_A z \alpha E(y, z) T(y, z) dA / EI_{zz} \end{aligned} \quad (\text{in hoofdrichtingen})$$

Op deze wijze is ten gevolge van de temperatuurbelasting alleen de constitutieve betrekking gewijzigd. Er ontstaan echter op constructie-niveau ook nog de nodige problemen bij het bepalen van de effecten van de temperatuurinvloeden op de krachtsverdeling en de vervorming van een constructie. Daarvoor is het noodzakelijk onderscheid te maken tussen statisch bepaalde en statisch onbepaalde constructies.

Statisch bepaalde constructies:

Als de staaf vrij kan vervormen (statisch bepaalde constructies) kunnen de verplaatsingen en rotaties ten gevolge van de temperatuurverandering rechtstreeks worden berekend uit het verloop van ε^T , κ_y^T en κ_z^T . De temperatuurinvloed heeft dus geen invloed op de

krachtsverdeling maar leidt slechts tot een extra vervorming. De staafkrachten N , M_y en M_z zijn alleen afhankelijk van de belasting en kunnen direct op basis van het evenwicht worden bepaald. Aan de hand van een voorbeeld zal dit verderop worden toegelicht.

Statisch onbepaalde constructies:

Als de staaf niet vrij kan vervormen (statisch onbepaalde constructies) is de situatie gecompliceerder. De krachtsverdeling is dan niet uitsluitend op basis van het evenwicht te bepalen. De verhinderde vervorming ten gevolge van de temperatuurinvloed heeft invloed op de krachtsverdeling. Met behulp van vormveranderingsvoorwaarden waarin de verhinderde vervorming ten gevolge van de temperatuurinvloed is verwerkt kan de krachtsverdeling worden bepaald. Met deze krachtsverdeling (N , M_y en M_z) kunnen vervolgens de totale vervorminggrootheden ε , κ_y en κ_z van de doorsnede worden bepaald:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon - \varepsilon^T \\ \kappa_y - \kappa_y^T \\ \kappa_z - \kappa_z^T \end{bmatrix}$$

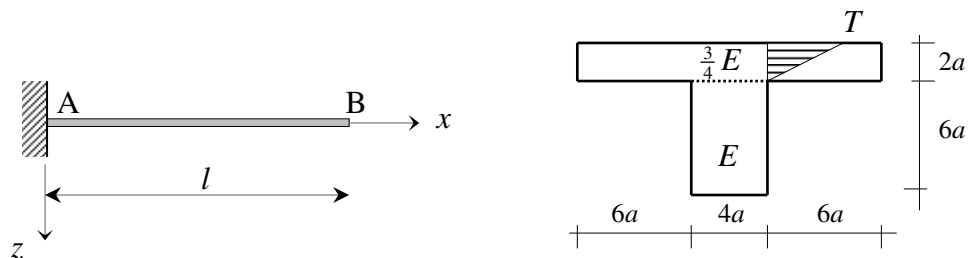
De spanningsverdeling in de doorsnede wordt tenslotte bepaald met:

$$\begin{aligned} \sigma(y, z) &= E(y, z) \varepsilon^\sigma(y, z) \\ &= E(y, z) \{ \varepsilon(y, z) - \varepsilon^T(y, z) \} \\ &= E(y, z) \{ \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z - \alpha T(y, z) \} \end{aligned}$$

Met behulp van twee voorbeelden zal de spanningsverdeling in een doorsnede worden toegelicht. Het eerste voorbeeld betreft een statisch bepaalde constructie, het tweede voorbeeld betreft een statisch onbepaalde constructie.

1.6.1 Voorbeeld 6 : Statisch bepaalde constructie onder temperatuurbelasting

Een inhomogene prismatische uitkragende T-ligger wordt alleen belast door temperatuurinvloed. De constructie en de doorsnede van de ligger zijn in de onderstaande figuur gegeven.



Figuur 44 : Uitkragende ligger belast door een temperatuurinvloed.

De beide materialen waaruit de doorsnede is opgebouwd gedragen zich lineair elastisch, het lijf heeft een elasticiteitsmodulus E en de flens een elasticiteitsmodulus $0,75E$. De lineaire uitzettingscoëfficiënt van de bovenflens is α . De temperatuurinvloed bestaat uit een lineair over de hoogte van de flens verlopende temperatuurverhoging. Deze temperatuurgradiënt is in de figuur aangegeven, in de breedte van de flens is de temperatuur constant. Het lijf ondervindt geen temperatuursverhoging.

Gevraagd:

- Bepaal de krachtsverdeling in de constructie,
- bepaal het spanningsverloop in doorsnede A,
- maak een schets van de balk in de verbogen stand,
- bepaal de grootste verticale verplaatsing van de ligger.

Uitwerking:

De constructie is statisch bepaald en kan daardoor vrij vervormen. De krachtsverdeling in de ligger wordt uitsluitend bepaald door de belasting en niet door de temperatuurinvloed.

- In dit geval is er geen belasting aanwezig en zijn alle snedekrachten gelijk aan nul.
- Om het spanningsverloop te kunnen bepalen moet eerst de vervorming ten gevolge van de temperatuurinvloed worden bepaald. Hiervoor zijn de nodige doorsnede gegevens nodig zoals de ligging van het NC, de rekstijfheid en de buigstijfheid.

Temperatuurverloop:

Het temperatuursverloop in de flens van de doorsnede is te beschrijven met:

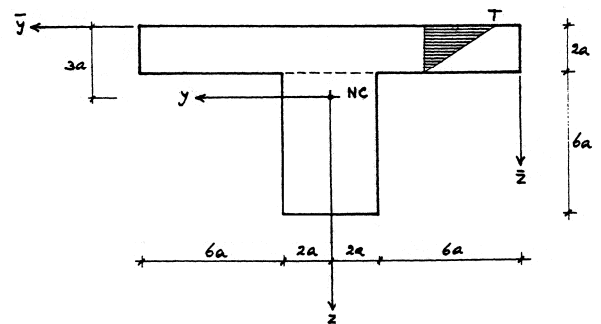
$$T(y, z) = -\frac{1}{2}T(1 + \frac{z}{a}) \quad \text{met: } -3a \leq z \leq -a$$

Normaalkrachtencentrum:

Het normaalkrachtencentrum zal op de as van symmetrie moeten liggen. Alleen de verticale positie van het NC hoeft te worden bepaald.

Ten opzichte van de bovenkant het het profiel is de ligging van het NC te bepalen met:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{NC} &= \frac{a \times (EA)_{flens} + 5a \times (EA)_{lijf}}{EA} \Leftrightarrow \\ &= \frac{a \times (\frac{3}{4}E \times 2a \times 16a) + 5a \times (E \times 6a \times 4a)}{\frac{3}{4}E \times 2a \times 16a + E \times 6a \times 4a} = 3a \end{aligned}$$



Figuur 45 : NC in de doorsnede.

Vanwege de symmetrie zullen de hoofdrichtingen van dit profiel samenvallen met het y-z-assenstelsel door het gevonden NC. In figuur 45 is dit weergegeven.

Rekstijfheid:

De rekstijfheid EA van de doorsnede is te bepalen met:

$$EA = (EA)_{flens} + (EA)_{lijf} = \frac{3}{4}E \times 2a \times 16a + E \times 6a \times 4a = 48Ea^2$$

Buigstijfheid:

De vezels op afstand z van het NC zullen in de breedte van de ligger allen dezelfde verlenging ondergaan. Vanwege de symmetrie zal de ligger niet in de y-richting krommen, $\kappa_y^T = 0$. Over de hoogte van de ligger ondergaan de vezels wel verschillende verlengingen, er treedt daardoor in de z-richting wel een kromming op. Voor het verdere verloop van de berekening is het daarom alleen nodig om de EI_{zz} te bepalen.

$$\begin{aligned} EI_{zz} &= \frac{3}{4}E \times \left\{ \frac{1}{12} \times 16a \times (2a)^3 + 16a \times 2a \times (2a)^2 \right\} + \\ &\quad E \times \left\{ \frac{1}{12} \times 4a \times (6a)^3 + 4a \times 6a \times (2a)^2 \right\} = 272Ea^4 \end{aligned}$$

De vervormingen ten gevolge van de temperatuurinvloed zijn nu te bepalen met basisformule 6:

$$\varepsilon^T = \int_{-3a}^{-a} \alpha \times \frac{3}{4} E \times \left\{ -\frac{1}{2} T \left(1 + \frac{z}{a} \right) \right\} \times 16 a dz / EA = \frac{1}{4} \alpha T$$

$$\kappa_y^T = 0$$

$$\kappa_z^T = \int_{-3a}^{-a} \alpha \times z \times \frac{3}{4} E \times \left\{ -\frac{1}{2} T \left(1 + \frac{z}{a} \right) \right\} \times 16 a dz / EI_{zz} = -\frac{7}{68} \frac{\alpha T}{a}$$

Het rekverloop in de doorsnede is bij vrije vervorming:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon^T + \kappa_z^T z$$

Voor de spanningsverdeling in de doorsnede geldt :

$$\begin{aligned} \sigma(y, z) &= E(y, z) \times \varepsilon(y, z) = \\ &= E(y, z) \times \{ \varepsilon(y, z) - \varepsilon^T(y, z) \} \\ &= E(y, z) \times \{ \varepsilon(y, z) - \alpha T(y, z) \} \\ &= E(y, z) \times \{ \varepsilon^T + \kappa_z^T z - \alpha T(y, z) \} \end{aligned}$$

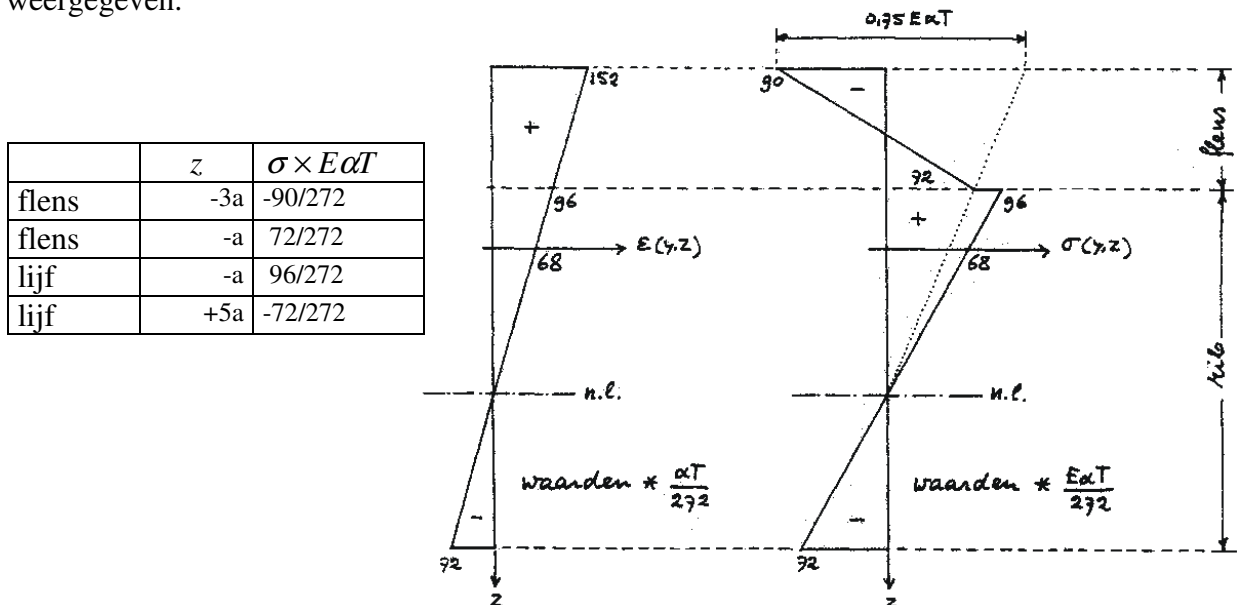
Uitwerken levert voor de flens van de doorsnede:

$$\sigma(y, z) = \frac{3}{4} E \times \left\{ \frac{1}{4} \alpha T - \frac{7}{68} \alpha T \times \frac{z}{a} + \frac{1}{2} \alpha T \left(1 + \frac{z}{a} \right) \right\} = E \alpha T \left(\frac{153}{272} + \frac{81}{272} \frac{z}{a} \right)$$

In het lijf van de doorsnede geldt voor de spanningsverdeling:

$$\sigma(y, z) = E \times \left\{ \frac{1}{4} \alpha T - \frac{7}{68} \alpha T \times \frac{z}{a} \right\} = E \alpha T \left(\frac{68}{272} - \frac{28}{272} \frac{z}{a} \right)$$

Het rekverloop en de spanningsverdeling over de hoogte van de ligger is in figuur 46 weergegeven.

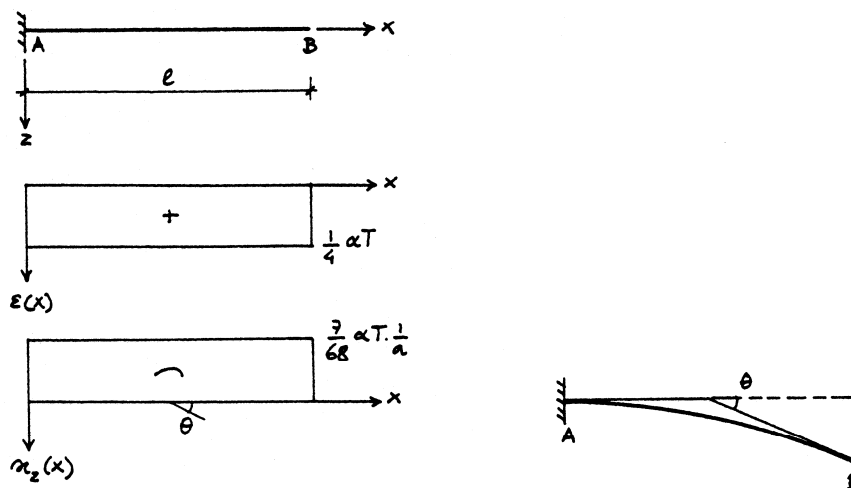


Figuur 46 : Rekverdeling en spanningsverdeling over de hoogte van de doorsnede.

Opvallend aan deze figuur is dat de spanningsverdeling over de hoogte niet congruent is aan de rekverdeling over de hoogte. Nog opvallender is dat de spanningsverdeling tweemaal van teken wisselt en dat terwijl de rekverdeling slechts eenmaal van teken wisselt. De oorzaak ligt in het feit dat slechts een deel van de vezels in de ligger verlengen door een temperatuurverhoging. De overige vezels ondergaan een rek omdat de doorsnede vlak moet blijven (aanname). Deze verlenging of verkorting moet zodanig zijn dat de daarbij optredende spanningen een evenwichtssysteem ($\Sigma N=0$; $\Sigma M=0$) vormen. De ligger kan immers vrij vervormen waardoor er geen snedekrachten kunnen optreden maar blijkbaar wel normaalspanningen!

Uit dit voorbeeld blijkt dat de neutrale lijn niet eenduidig kan worden gedefinieerd als de lijn waarin de spanningen nul zijn. De neutrale lijn deelt de doorsnede slechts in een deel dat wordt gerekt en een deel dat wordt gestuikt. Het begrip neutrale lijn kan bij een temperatuurinvloed dus alleen gehanteerd worden bij de rekverdeling.

- c) Ten gevolge van de temperatuurinvloed en het vrij kunnen vervormen van de ligger zal de rekverdeling in alle doorsneden hetzelfde zijn. In figuur 47 zijn de rek en kromming uitgezet langs de ligger-as.



Figuur 47 : Rek en kromming langs de ligger-as en de vervorming van de ligger.

De verlenging van de ligger is te bepalen uit de rek:

$$u_x = \varepsilon^T l = \frac{1}{4} \alpha T l$$

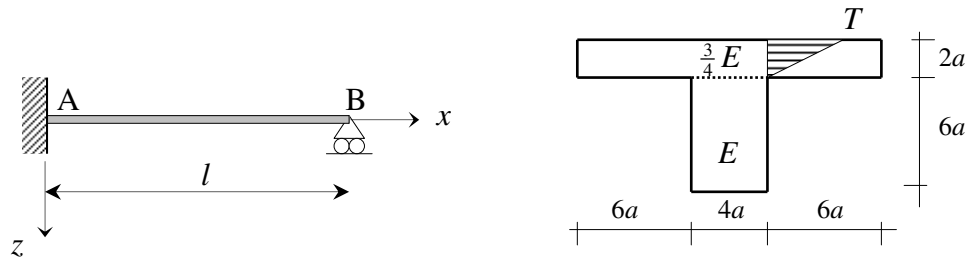
Met behulp van het krommingsvlak is de verticale verplaatsing van de ligger in B te bepalen:

$$\theta = \kappa_z^T l = \frac{7}{68} \alpha T \frac{l}{a}$$

$$u_z = \theta \times \frac{1}{2} l = \frac{7}{136} \alpha T \frac{l^2}{a}$$

1.6.2 Voorbeeld 7 : Statisch onbepaalde constructie onder temperatuurbelasting

Dezelfde doorsnede als in het vorige voorbeeld wordt nu toegepast in een statisch onbepaalde constructie. Ook nu wordt de inhomogene prismatische uitkragende T-ligger alleen belast door dezelfde temperatuurinvloed als in het vorige voorbeeld. De constructie en de doorsnede van de ligger zijn in de onderstaande figuur gegeven.



Figuur 48 : Ingekleemde ligger belast door een temperatuurinvloed.

De constructie is in A ingeklemd en in B opgelegd door middel van een roloplegging.

Gevraagd:

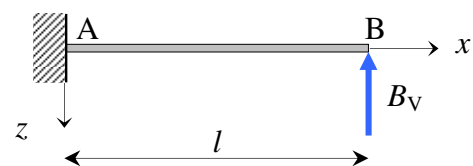
- Bepaal de krachtsverdeling in de constructie,
- bepaal het spanningsverloop in doorsnede A,
- maak een schets van de balk in de verbogen stand,
- bepaal de grootste verticale verplaatsing van de ligger.

Uitwerking:

De constructie is nu statisch onbepaald en de verplaatsing ten gevolge van de temperatuurinvloed kan niet vrij optreden. De krachtsverdeling in de constructie is hierdoor afhankelijk van het vervormingsgedrag. Door een statisch bepaald hoofdsysteem te kiezen met de daarbij behorende statisch onbepaalde en een nader te formuleren vervormingseis kan de krachtsverdeling worden bepaald, zie hiervoor MECH-3. Nieuw element in deze aanpak is dat in de vervormingseis de vrije vervorming t.g.v. de temperatuurinvloed zal moeten worden meegenomen.

- Als statisch bepaald hoofdsysteem wordt gekozen voor de ingekleemde ligger van figuur 49 waarbij de verticale oplegreactie in B de statisch onbepaalde is. De hierbij behorende vormveranderingseis (v.v.v.) is:

$$u_z(B) = 0$$

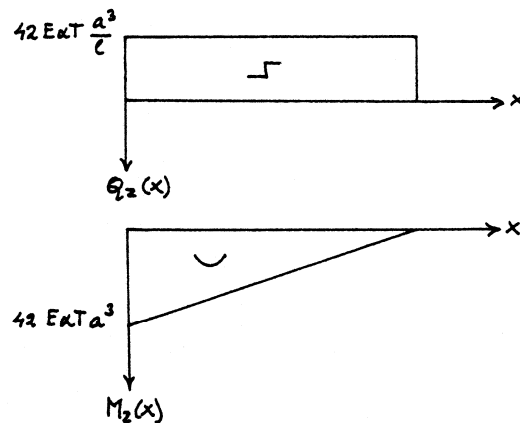


Figuur 49 : Statisch bepaald hoofdsysteem.

Voor het uitwerken van deze v.v.v. kan handig gebruik gemaakt worden van de resultaten uit het vorige voorbeeld. Daar is immers de vrije vervorming t.g.v. de temperatuurinvloed bepaald. Dit levert voor de oplegreactie in B:

$$u_z(B) = \frac{7}{136} \alpha T \frac{l^2}{a} - \frac{B_V l^3}{3EI_{zz}} = 0 \Rightarrow B_V = 42E\alpha T \frac{a^3}{l}$$

De krachtsverdeling in de ligger volgt nu verder uit het evenwicht. In figuur 50 is deze weergegeven.



Figuur 50 : Krachtsverdeling.

- b) In de doorsnede t.p.v. A is het buigend moment:

$$M_z = 42 E \alpha T a^3$$

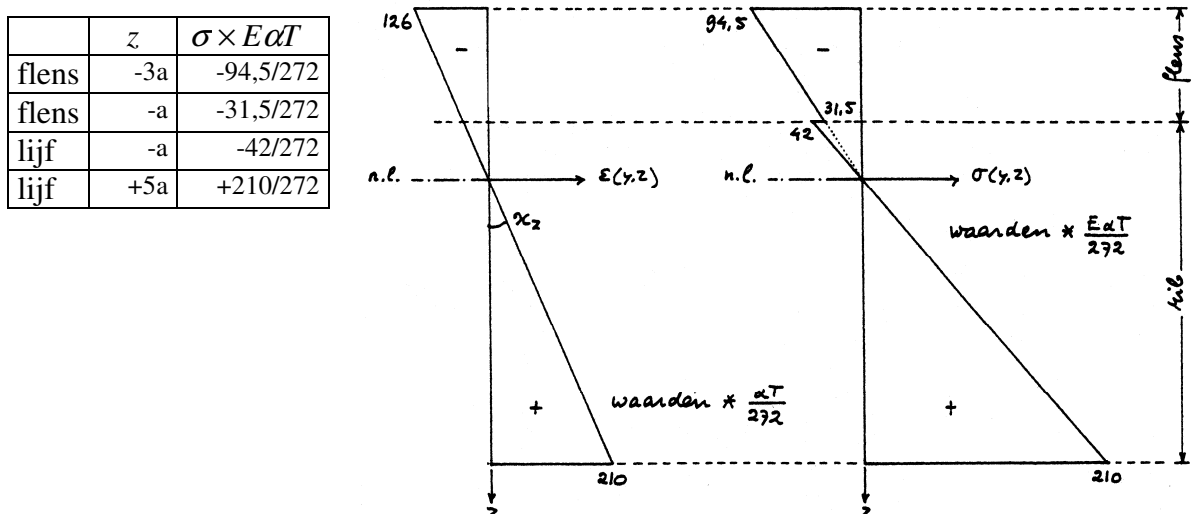
Het y-z-assenstelsel valt samen met de hoofdrichtingen van de doorsnede, in dat geval kan de kromming in de z-richting direct uit dit moment worden bepaald:

$$\kappa_z = \frac{M_z}{EI_{zz}} = \frac{42 E \alpha T a^3}{272 E a^4} = \frac{42 \alpha T}{272 a}$$

De spanningsverdeling die hierbij hoort is:

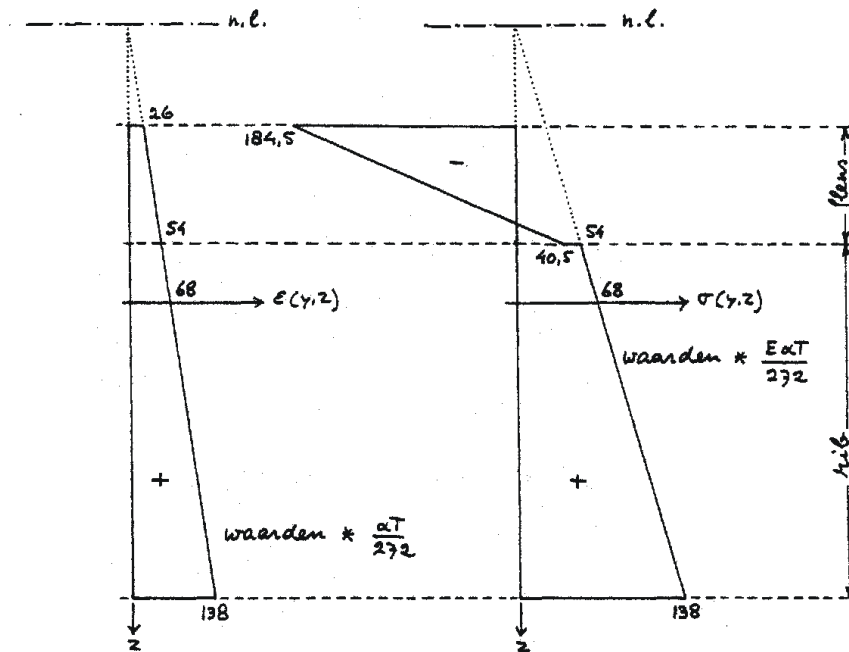
$$\sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z) = E(y, z) \times \kappa_z z = E(y, z) \times \frac{42 \alpha T z}{272 a}$$

Voor een aantal plaatsen in de doorsnede kunnen de spanningen hiermee worden bepaald. De rekverdeling en de spanningsverdeling in doorsnede A zijn hieronder weergegeven.



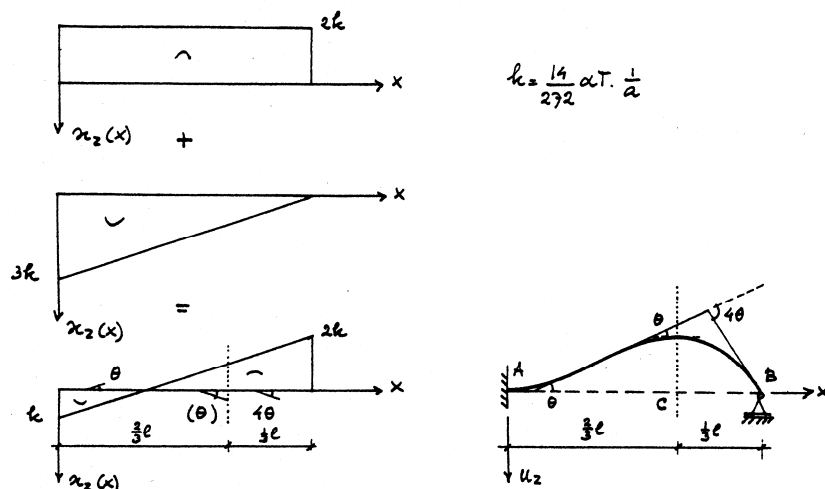
Figuur 51: Rek- en spanningsverloop ten gevolge van de statisch onbepaalde B_V .

De uiteindelijke rek- en spanningstoestand wordt gevonden door die ten gevolge van het buigend moment te superponeren op die ten gevolge van de temperatuurverandering bij vrije vervorming. Het resultaat is in figuur 52 weergegeven in een rek- en spanningsdiagram.



Figuur 52 : Totale rek- en spanningsverdeling voor doorsnede A.

- c) Het uiteindelijke krommingsverloop is ook de superpositie van het krommingsverloop ten gevolge van het buigend moment en dat tengevolge van de temperatuurverandering bij vrije vervorming.



Figuur 53 : Totale kromming.

Op dezelfde wijze als bij het vorige voorbeeld kan uit het krommingsverloop de verticale verplaatsing worden bepaald. De maximale verticale verplaatsing treedt op waar de hoekverdraaiing gelijk is aan nul. Uit het krommingsdiagram van figuur 53 kunnen we zien dat de hoekverdraaiing in C gelijk zal zijn aan nul. Dit kan ook worden ingezien als

we gebruik maken van de exacte bepaling van de hoekverdraaiing door integratie van de kromming:

$$\varphi_C = \varphi_A + \int_A^C \kappa_z dx = 0 + 0 = 0$$

Aangezien in A de hoekverdraaiing al nul is en het totale oppervlak van het krommingsvlak over het deel AC nul is, is de hoekverdraaiing in C nul. Dit levert voor de plaats waar de grootste verticale verplaatsing optreedt:

$$x_C = \frac{2}{3}l$$

De verticale verplaatsing in C is vervolgens te bepalen met de in figuur 53 tussen haakjes aangegeven verandering van de hoekverdraaiing θ :

$$\theta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} l \times k = \frac{1}{6} kl$$

$$u_z(C) = -\frac{5}{9} l \theta + \frac{1}{9} l \theta = -\frac{4}{54} kl^2 = -\frac{4}{54} \times \frac{14}{272} \frac{\alpha T l^2}{a} \approx -\frac{\alpha T l^2}{272a}$$

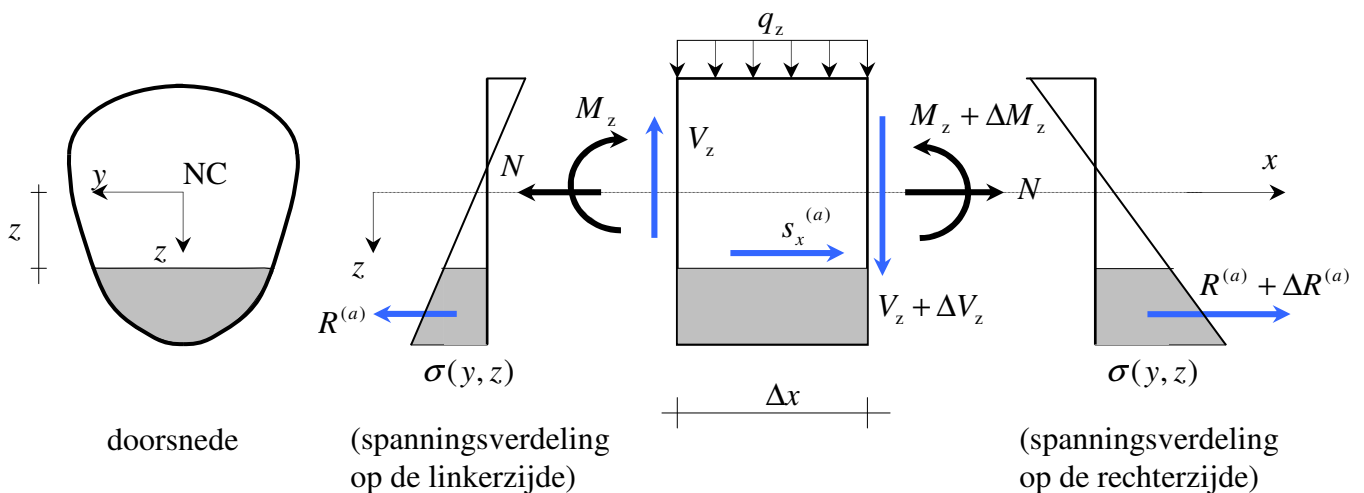
Opmerking:

In beide uitgewerkte voorbeelden geldt in het staafeinde B dat de snedekrachten N en M nul zijn. De berekende spanningsverdeling in doorsnede B is gelijk aan die bij de vrije vervorming van voorbeeld 6. De spanningsverdeling in B is echter niet realistisch. Op het kopse vlak van de staaf in B werkt geen uitwendige belasting, de spanningen in het materiaal zullen daar dan ook nul moeten zijn. De hier geschetste aanpak geeft op dit punt dus een onjuist antwoord. De uitkomsten zijn echter zeer behoorlijk tot op een afstand van ongeveer 1 maal de hoogte van de ligger vanaf de rand B.

1.7 Schuifspanningen in niet-symmetrische en of inhomogene doorsneden

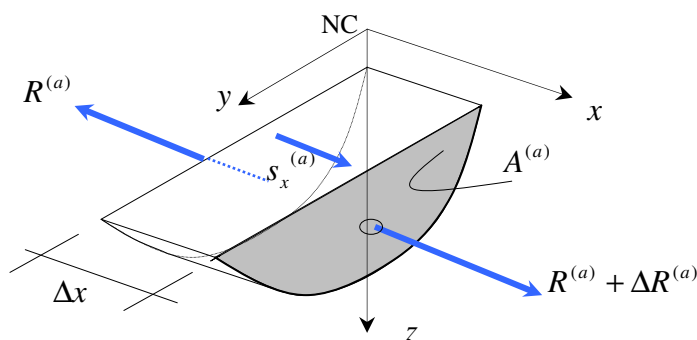
Naast normaalspanningen ontstaan in een doorsnede ook schuifspanningen. In MECH-2 zijn in hoofdstuk 5 de basisbegrippen en de berekeningsmethoden geïntroduceerd. Daarbij is steeds uitgegaan van homogene en symmetrische doorsneden. In deze paragraaf zal de aanpak worden gegeneraliseerd naar niet-symmetrische en of inhomogene doorsneden en zal ook gekeken worden naar de ligging van het *dwarskrachtencentrum* (DC).

Als het buigend moment in een ligger niet constant is moet de ligger ook dwarskrachten overbrengen. Dit leidt tot schuifspanningen in de doorsnede. Met een evenwichtsbeschouwing is echter ook aan te tonen dat hierdoor schuifstromen en daarmee schuifspanningen in de lengterichting ontstaan. In figuur 54 is een stukje Δx van een ligger weergegeven. In de beide sneden van dit liggerdeel zijn de positief werkende snedekrachten aangegeven. De normaalkracht in de ligger wordt constant verondersteld. Door de belasting q_z en q_y (niet aangegeven) op het liggermootje zijn de snedekrachten V_z en M_z in de positieve snede een klein beetje aangegroeid ten opzichte van deze snedekrachten in de negatieve snede.



Figuur 54 : Schuifkrachten in de doorsnede en in de lengterichting.

Om de schuifkracht in langsrichting en daarmee de schuifspanning in langsrichting te kunnen bepalen is in de doorsnede een afschuivend deel met oppervlak $A^{(a)}$ aangegeven. Als het afschuivende deel van het liggermootje wordt vrijgemaakt en alle op de doorsnede werkende horizontale krachten worden aangegeven ontstaat figuur 55. Hierbij zijn op beide verticale snedevlakken de resultante van de normaalkracht $R^{(a)}$ en $R^{(a)} + \Delta R^{(a)}$ op het afschuivende deel aangegeven.



Figuur 55 : Vrijgemaakt, afschuivende deel.

Uit het horizontale evenwicht van dit afgeschoven deel kan de nog onbekende schuifstroom $s_x^{(a)}$ in de horizontale doorsnede met lengte Δx worden bepaald. Het evenwicht in de x -richting van het afschuivende mootje levert:

$$-R^{(a)} + s_x^{(a)} \times \Delta x + R^{(a)} + \Delta R^{(a)} = 0$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{\Delta R^{(a)}}{\Delta x}$$

In de limiet overgang $\Delta x \rightarrow 0$ wordt de schuifkracht per eenheid van lengte bepaald door:

$$s_x^{(a)} = -\frac{dR^{(a)}}{dx} \quad (1)$$

De resultante normaalkracht op het afgeschoven deel is te bepalen met behulp van de verdeling van de normaalspanningen op dit afgeschoven deel:

$$R^{(a)} = \int_{A^{(a)}} \sigma(y, z) dA \quad (2)$$

De spanningsverdeling op het afschuivende deel kan worden bepaald met de eerder ingevoerde relatie:

$$\sigma(y, z) = E(y, z) \times \{\varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z\} \quad (3)$$

Waarbij ε , κ_y en κ_z de vervormingsgrootheden van de doorsnede zijn. De stap om van de schuifkracht te komen tot schuifspanningen wordt eerst uitgewerkt voor het geval dat het y - z -assenstelsel samenvalt met het hoofdasstelsel van de doorsneden, vervolgens wordt de methode afgeleid voor het algemene geval.

1.7.1 Schuifspanningsformules als y - en z hoofdrichtingen zijn

Als het y - z -assenstelsel samenvalt met de hoofdrichtingen gelden de volgende betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}$$

$$\kappa_y = \frac{M_y}{EI_{yy}}$$

$$\kappa_z = \frac{M_z}{EI_{zz}} \quad (4)$$

Door vergelijking (3) met (4) te combineren ontstaat:

$$\sigma(y, z) = E(y, z) \times \left[\frac{N}{EA} + \frac{M_y \times y}{EI_{yy}} + \frac{M_z \times z}{EI_{zz}} \right] \quad (5)$$

Door dit resultaat te substitueren in vergelijking (2) en vervolgens toe te passen op (1) ontstaat:

$$s_x^{(a)} = -\frac{dR^{(a)}}{dx} = -\int_{A^{(a)}} \frac{d\sigma(y, z)}{dx} dA = -\int_{A^{(a)}} E(y, z) \times \left[\frac{1}{EA} \frac{dN}{dx} + \frac{y}{EI_{yy}} \frac{dM_y}{dx} + \frac{z}{EI_{zz}} \frac{dM_z}{dx} \right] dA$$

Deze uitdrukking kan vereenvoudigd worden met behulp van de bekende betrekkingen:

$$V_y = \frac{dM_y}{dx}$$

$$V_z = \frac{dM_z}{dx}$$

Indien zoals aangenomen de normaalkracht N constant is dan geldt:

$$\frac{dN}{dx} = 0$$

Als de balk prismatisch is dan zijn de stijfheidstermen EA , EI_{yy} en EI_{zz} constant over de lengte van de balk. Deze kunnen dan buiten het integraalteken worden gehaald en voor de schuifkracht per eenheid van lengte kan zo worden gevonden:

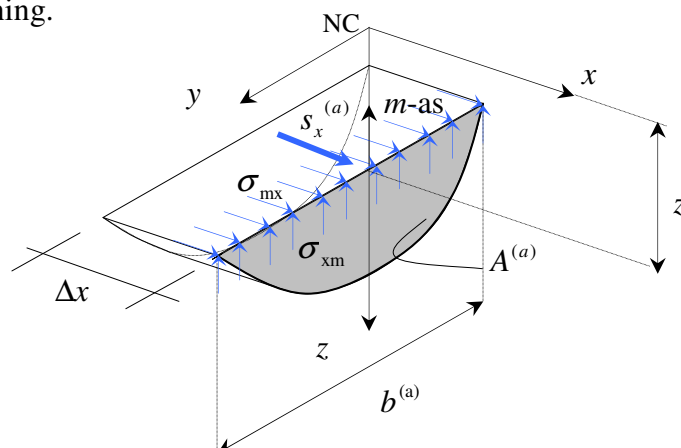
$$s_x^{(a)} = - \left[\frac{V_y}{EI_{yy}} \int_{A^{(a)}} E(y, z) \times y dA + \frac{V_z}{EI_{zz}} \int_{A^{(a)}} E(y, z) \times z dA \right]$$

Met behulp van de "twee-letter-symbolen" kan dit geschreven worden als:

$$s_x^{(a)} = - \frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}} \quad \text{basisformule (7)}$$

Deze uitdrukking is nagenoeg identiek aan de in MECH-2 gevonden uitdrukking. Nieuw element hier is de uitbreiding t.g.v. de belasting in y -richting.

De schuifspanningen kunnen bepaald worden door de gevonden schuifkracht per eenheid van lengte, te delen door de breedte van het oppervlak van vlak waarin deze werkt. In figuur 56 is dit weergegeven waarbij zoals gebruikelijk een m -as is aangegeven voor de benoeming van de schuifspanning.



$$\sigma_{mx} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

Opmerking:

Hier wordt aangenomen dat de schuifspanning constant is over de breedte. In werkelijkheid hoeft dit niet het geval te zijn, echter voor beperkte breedten is deze aanname realistisch.

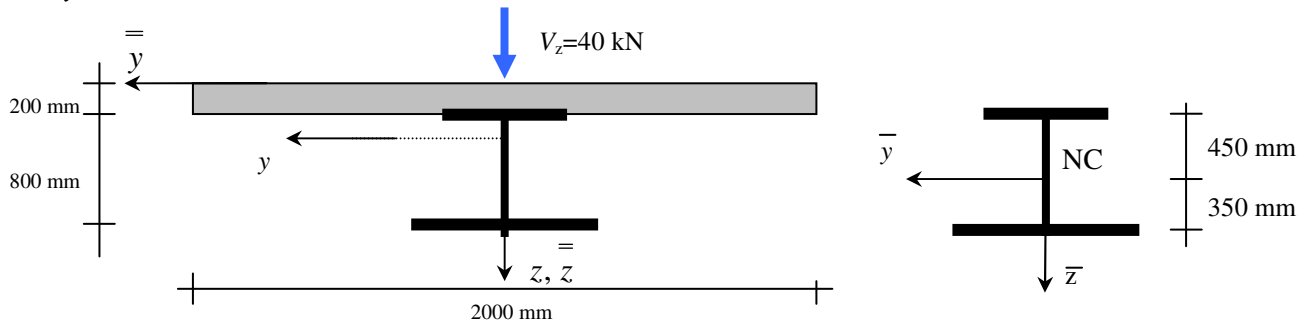
Figuur 56 : Schuifspanningen in de ligger op afstand z vanaf het NC.

De gevraagde schuifspanningen in de doorsnede moeten gelijk zijn aan de gevonden schuifspanning in lengterichting. Het bewijs hiervoor is in paragraaf 5.3.1 van MECH-2 gegeven:

$$\sigma_{xm} = \sigma_{mx}$$

1.7.1.1 Voorbeeld 8 : Schuifspanning in een samengestelde doorsnede

Van een staal-betonligger zoals in figuur 57 is weergegeven vallen de hoofdasen samen met het y - z -assenstelsel door het NC.



Figuur 57 : Staal-betonligger.

De doorsnede wordt belast door een dwarskracht V_z van 40 kN. Van het staalprofiel zijn de doorsnede gegevens t.o.v. het eigen NC bekend. De betonnen flens is volledig stijf bevestigd aan het stalen profiel zodat er sprake is van een volledige samenwerking tussen de beide delen. De overige gegevens zijn hieronder weergegeven:

Oppervlakte staalprofiel	$A_{staal} = 32000 \text{ mm}^2$
Eigentraagheidsmoment staalprofiel	$I_{zz,staal} = 432 \times 10^6 \text{ mm}^4$
Elasticiteitsmodulus staal	$E_{staal} = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$
Elasticiteitsmodulus beton	$E_{beton} = 14000 \text{ N/mm}^2$
Dwarskracht	$V_z = 40 \text{ kN}$

Gevraagd wordt om de schuifkracht in de verbinding tussen beton en staal te berekenen.

Uitwerking:

De schuifkracht kan met basisformule (7) worden bepaald. Hiervoor is het noodzakelijk om eerste de “twee-letter-symbolen” voor de doorsnede uit te werken. Daarvoor is het nodig om eerst de ligging van het NC van de samengestelde doorsnede te bepalen. De horizontale ligging is bekend, vanwege de symmetrie zal het NC op de verticale as van symmetrie moeten liggen. Ten opzichte van het $\bar{y} - \bar{z}$ -assenstelsel ligt het NC van de samengestelde doorsnede op:

$$\bar{z}_{NC} = \frac{E_{beton} \times (200 \times 2000) \times 100 + E_{staal} \times (32000) \times 650}{E_{beton} \times (200 \times 2000) + E_{staal} \times (32000)} = 400 \text{ mm}$$

Aangezien de dwarskracht alleen in de z -richting werkt hoeft de y -term niet te worden uitgewerkt. Alleen de buigstijfheid EI_{zz} hoeft te worden bepaald:

$$EI_{zz} = E_{beton} \left[\frac{1}{12} \times 2000 \times 200^3 + (200 \times 2000) \times (300)^2 \right] + E_{staal} \left[432 \times 10^6 + 32 \times 10^3 \times (250)^2 \right]$$

$$EI_{zz} = 1033,4 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Als afschuivend deel wordt de betonflens gekozen. De schuifkracht volgens basisformule (7) wordt hiermee:

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_z E S_z^{(a)}}{EI_{zz}} = -\frac{40 \times 10^3 \times [E_{beton} \times (2000 \times 200) \times (-300)]}{1033,4 \times 10^{12}} = 65 \text{ N/mm}$$

1.7.2 Algemeen geldende schuifspanningsformules

Als de hoofdasen van de doorsnede niet samenvallen met het y - z -assenstelsel kan geen gebruik gemaakt worden van basisformule (7). Deze formule is immers gebaseerd op de ont koppeling van buiging om de y - en z -as. Voor willekeurige doorsneden moet daarom teruggerepen worden naar het uitgangspunt voor het bepalen van de schuifkracht per eenheid van lengte:

$$s_x^{(a)} = -\frac{dR^{(a)}}{dx} \quad (1)$$

De normaalspanningen op het afschuivende deel $A^{(a)}$ verlopen lineair en worden voor een deel veroorzaakt door de normaalkracht N en voor een deel door het resulterend moment M in de doorsnede. De grootte van de resultante $R^{(a)}$ kan gesplitst worden in een aandeel $R_N^{(a)}$ t.g.v. N en een aandeel $R_M^{(a)}$ t.g.v. M . Vanwege het lineair verloop van de spanningen zijn deze aandelen daarbij lineair afhankelijk van de grootte van de normaalkracht N en het resulterend moment M in de doorsnede.

$$R^{(a)} = R_N^{(a)} + R_M^{(a)} = c_1 N + c_2 M \quad \text{met:} \quad M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

Ga zelf na dat de coëfficiënten c_1 en c_2 eenvoudig te bepalen zijn met:

$$c_1 = \frac{R_N^{(a)}}{N}; \quad c_2 = \frac{R_M^{(a)}}{M}$$

Door de kettingregel toe te passen op vergelijking (1) ontstaat:

$$s_x^{(a)} = -\frac{dR^{(a)}}{dM} \frac{dM}{dx} = -\frac{dR^{(a)}}{dM} V \quad \text{met:} \quad V = \sqrt{V_y^2 + V_z^2}$$

Hierin is V de resulterende dwarskracht in het vlak van de doorsnede. Vanwege de lineaire relatie tussen $R^{(a)}$ en N , M is deze vergelijking te herschrijven tot:

$$s_x^{(a)} = -\frac{d(c_1 N + c_2 M)}{dM} V = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V = -c_2 V \quad \text{basisformule (8)}$$

Hier staat in woorden dat de schuifkracht per eenheid van lengte gelijk is aan een schalingsfactor maal de resultante dwarskracht in de doorsnede. De schalingsfactor is gelijk aan de resultante normaalkracht op het *afschuivende deel* t.g.v. **alleen het moment M** , gedeeld door de grootte van dit moment M .

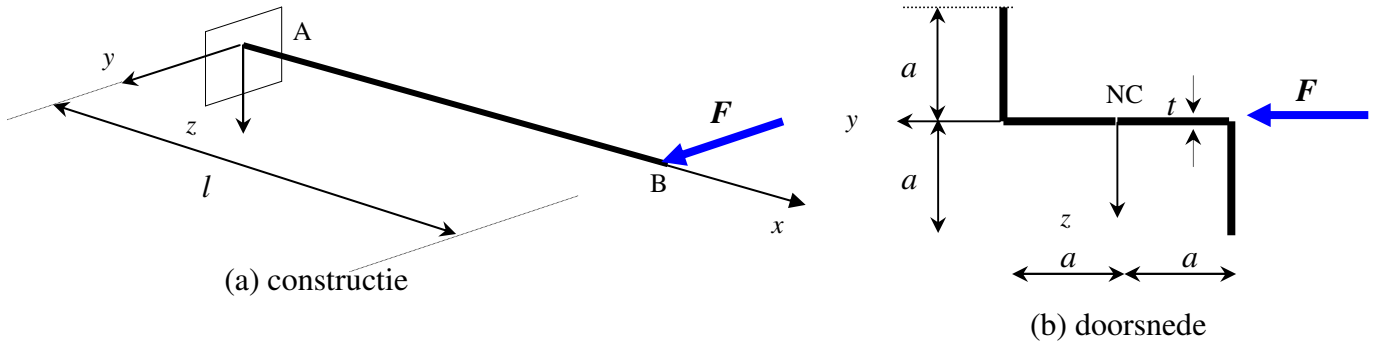
Merk op dat de schalingsfactor onafhankelijk is van de grootte van M . Belangrijk is wel dat het resulterend moment M en de resulterende dwarskracht V in hetzelfde (*belastings*-)vlak moeten werken aangezien gebruik is gemaakt van de relatie:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Indien er op de doorsnede alleen een dwarskracht werkt kan een willekeurig *dummy* moment worden aangenomen om de schalingsfactor c_2 te bepalen. Met een voorbeeld zal dit worden verduidelijkt.

1.7.2.1 Voorbeeld 9 : Schuifspanning in niet-symmetrische doorsnede

Een uitkragende ligger wordt op het uiteinde belast door een horizontale kracht F zoals in figuur 58(a) is weergegeven. Het stalen profiel bestaat uit een dunwandige doorsnede waarvan de gegevens in figuur 58(b) zijn gegeven. Het profiel heeft over de gehele doorsnede een dikte t die klein is ten opzichte van de afmeting a .



Figuur 58 : Uitkragende ligger.

De overige gegevens zijn:

lengte	l	= 2000 mm
profiel	a	= 150 mm
	t	= 12 mm
Elasticiteitsmodulus staal	E_{staal}	= $2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$
Belasting	F	= 19,85 kN

Gevraagd wordt om het schuifspanningsverloop over de doorsnede t.p.v. A te bepalen.

Uitwerking:

Het gegeven y - z -assenstelsel door het NC valt niet samen met de hoofdassen van dit profiel. De schuifkracht en daarmee de schuifspanning kunnen daarom **niet** worden bepaald met basisformule (7). Het schuifspanningsverloop zal daarom met de algemeen geldende formules uit de vorige paragraaf worden bepaald. Deze algemene methode is gebaseerd op het verloop van de normaalspanning in de doorsnede. Daarom zal eerst de normaalspanningsverdeling moeten worden bepaald.

a) Normaaalspanningsverdeling

De ligging van het NC kan op basis van puntsymmetrie worden bepaald en is aangegeven in figuur 58 (b). De overige doorsnede gegevens ten opzichte van het NC zijn:

$$EI_{yy} = \frac{8}{3} Ea^3 t = 2268 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{zz} = \frac{2}{3} Ea^3 t = 567 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{yz} = EI_{zy} = -Ea^3 t = -850,5 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

In de doorsnede ter plaatse van A zijn de snedekrachten op basis van het evenwicht te bepalen:

$$N = 0$$

$$M_y = -F \times l = -39,6 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_z = 0$$

Met behulp van de bekende constitutieve relatie zijn de vervormingsgrootheden van de doorsnede te bepalen waarmee vervolgens de rek- en de normaalspanningsverdeling in de doorsnede kunnen worden bepaald:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -39,7 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^6 = 10^{12} \begin{bmatrix} 22,68 & -8,505 \\ -8,505 & 5,67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - (EI_{yz})^2} \begin{bmatrix} EI_{zz} & -EI_{yz} \\ -EI_{zy} & EI_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Uitwerken levert voor de componenten van de kromming:

$$\kappa_y = -4,0 \times 10^{-6} \text{ 1/mm} \quad \kappa_z = -6,0 \times 10^{-6} \text{ 1/mm}$$

De spanning in ieder willekeurig punt van de doorsnede kan nu bepaald worden met:

$$\sigma(y, z) = E \times \varepsilon(y, z) = E \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z)$$

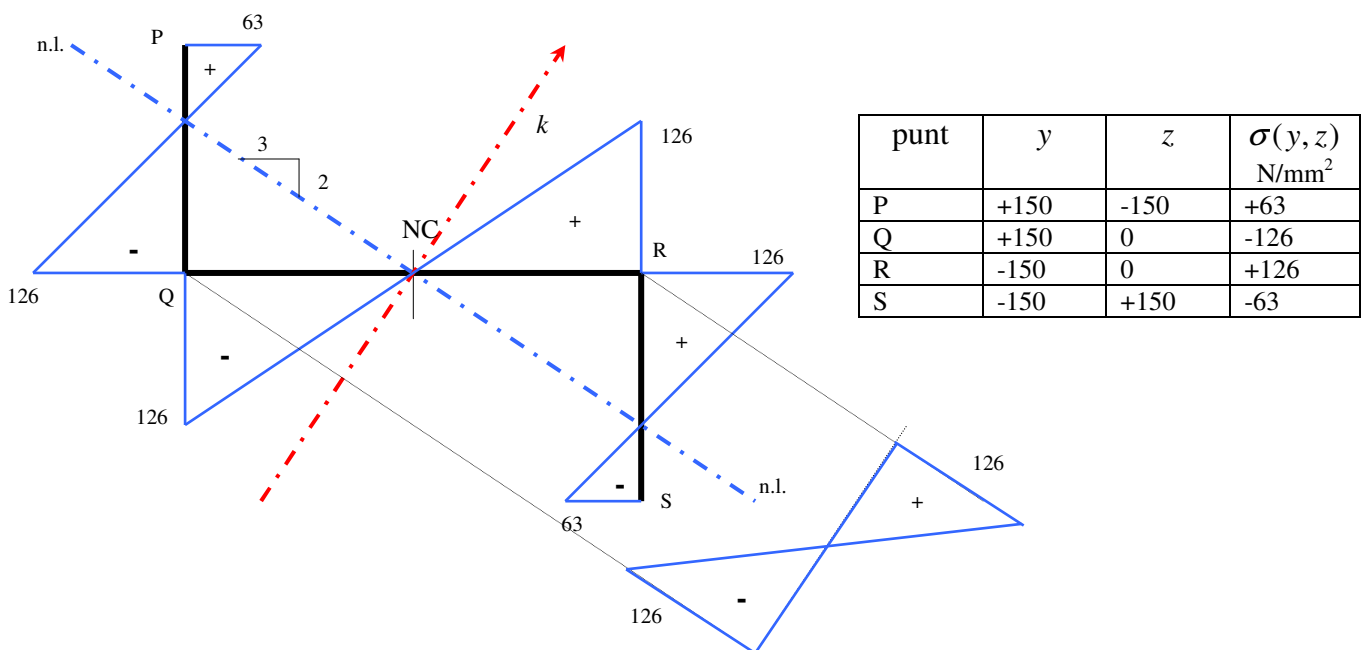
In de doorsnede werkt geen normaalkracht, hierdoor ontstaat er ook geen rek ε in de vezel die samenvalt met de staafas (NC). De vergelijking voor de spanning wordt hiermee:

$$\sigma(y, z) = 2,1 \times 10^5 \times (-4y - 6z) \times 10^{-6} = 0,21 \times (-4y - 6z) \text{ N/mm}^2 \text{ met } y \text{ en } z \text{ in mm}$$

Uit deze vergelijking volgt direct de ligging van de neutrale lijn:

$$-4y - 6z = 0$$

In figuur 59 is de spanningsverdeling op twee manieren weergegeven. De eerste manier is de gebruikelijke, loodrecht op de neutrale lijn. De tweede manier is om de spanningen loodrecht op de doorsnede van het profiel uit te zetten. Dit is alleen mogelijk voor dunwandige profielen (dikte $t \ll a$) waarvoor de spanning over de dikte als constant mag worden beschouwd.



Figuur 59 : Normaalspanningsverdeling in doorsnede A.

b) Schuifspanningsverdeling

Op basis van deze normaalspanningen kan het verloop van de schuifspanning met behulp van basisformule (8) worden bepaald :

$$S_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M}V$$

hierin zijn V en M de totale, op de doorsnede werkende, dwarskracht en buigend moment:

$$V = \sqrt{V_y^2 + V_z^2} = V_y = 19850 \text{ N}$$

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = M_y = -39,7 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

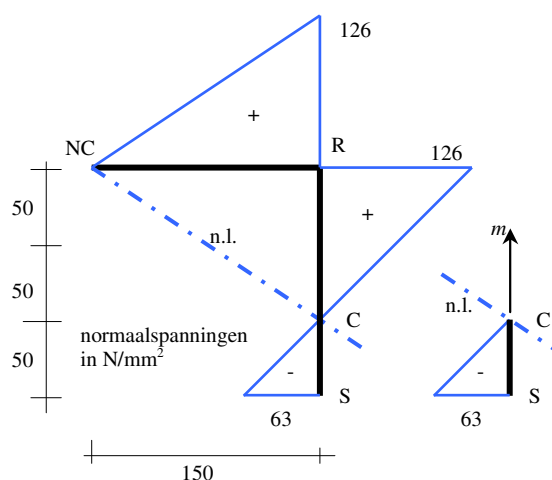
Invullen in de bovenstaande basisformule levert:

$$s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)} \times 19850}{-39,7 \times 10^6} = +\frac{R_M^{(a)}}{2000} \text{ N/mm} \quad \text{met } R_M^{(a)} \text{ in N}$$

Om het schuifspanningsverloop in de doorsnede te kunnen tekenen moet op een aantal karakteristieke plaatsen de schuifspanning worden bepaald. Daarbij kan gebruik worden gemaakt van de in MECH-2 gegeven eigenschappen (paragraaf 5.4.2, blz 301) :

1	Als de normaalspanning constant is, verloopt de schuifspanning lineair
2	Als de normaalspanning lineair is, verloopt de schuifspanning parabolisch
3	De schuifspanning is extreem in die punten, waar de <i>n.l.</i> t.g.v. alleen <i>M</i> de doorsnede snijdt
4	De richting van de schuifspanning is vaak eenvoudig af te leiden uit de richting van de dwarskracht.
5	De schuifspanningen zijn nul aan de randen van de flenzen
6	In een knooppunt van flens en lijf moet de som van alle schuifkrachten nul zijn, dit houdt in dit geval in dat de totale “instroom” gelijk is aan de totale “uitstroom” in een knooppunt

Vanwege de symmetrie en rekening houdend met de hierboven gegeven eigenschappen kan worden volstaan met het bepalen van de schuifspanningen in het deel SR-NC van het profiel. De punten waar de schuifspanning moet worden bepaald zijn NC,R, C en S waarbij C een extra punt is t.p.v. het snijpunt van de neutrale lijn met SR, zie figuur 60.



Figuur 60 : Resultante normaalspanning van SC.

Punt S:

Dit is een buitenrand, $s_y^{(a)} = 0$

Punt C:

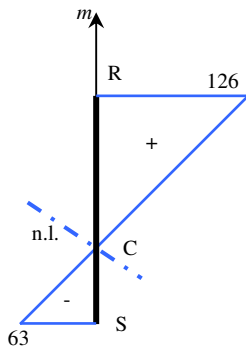
Afgeschoven deel is CS, de resultante
normaalspanning t.g.v. alleen het moment is :

$$R_M^{(a)} = -\frac{1}{2} \times 63 \times 50 \times 12 = -18900 \text{ N}$$

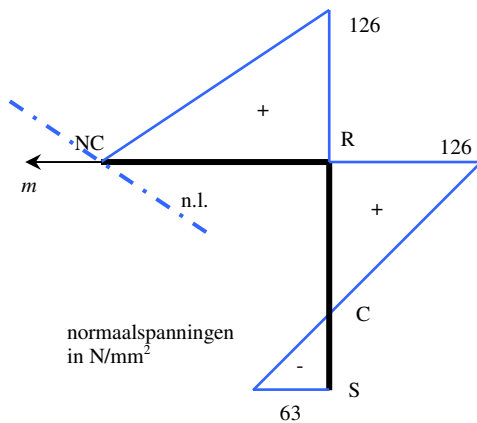
De schuifkracht per eenheid van lengte en de daarbij behorende schuifspanning in C wordt:

$$s_x^{(a)} = \frac{R_M^{(a)}}{2000} = -9,45 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_{xm} = \frac{s_x^{(a)}}{t} = -0,79 \text{ N/mm}^2$$



Figuur 61 : Resultante normaalspanningen over deel SR.



Figuur 62 : Resultante normaalspanningen over deel SR-NC.

Punt R

Het afschuivende deel is nu SCR. De resultante normaalspanning over dit afschuivende deel t.g.v. alleen het moment M is:

$$R_M^{(a)} = -\frac{1}{2} \times 63 \times 50 \times 12 + \frac{1}{2} \times 126 \times 100 \times 12 = 56700 \text{ N}$$

De schuifkracht per eenheid van lengte en de daarbij behorende schuifspanning in R wordt:

$$s_x^{(a)} = \frac{R_M^{(a)}}{2000} = 28,35 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_{xm} = \frac{s_x^{(a)}}{t} = 2,36 \text{ N/mm}^2$$

Punt NC

Het afschuivende deel is nu SR-NC. De resultante normaalspanning over dit afschuivende deel t.g.v. alleen het moment M is:

$$R_M^{(a)} = -\frac{1}{2} \times 63 \times 50 \times 12 + \frac{1}{2} \times 126 \times 100 \times 12 + \frac{1}{2} \times 126 \times 150 \times 12 = +170100 \text{ N}$$

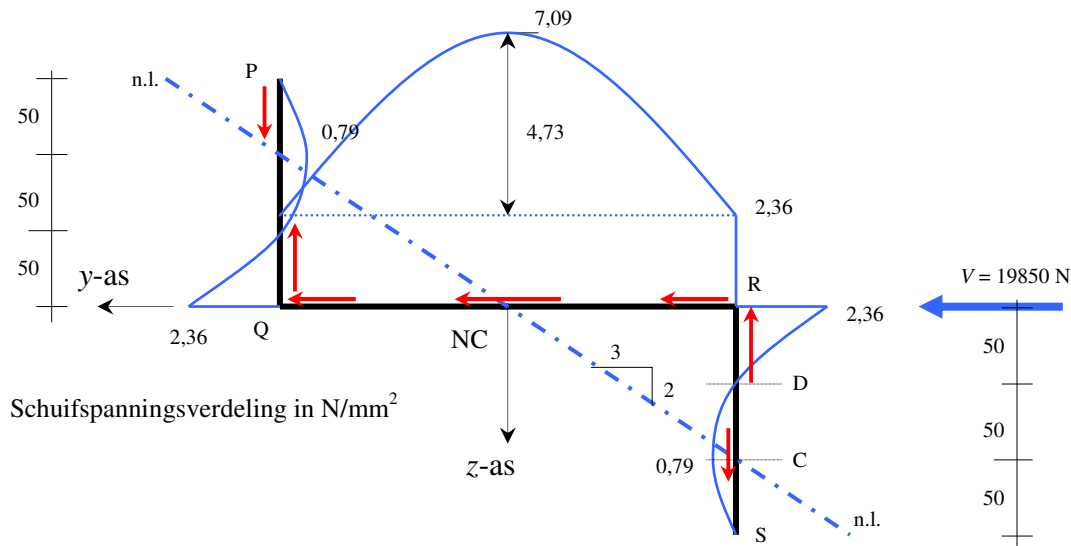
De schuifkracht per eenheid van lengte en de daarbij behorende schuifspanning in R wordt:

$$s_x^{(a)} = \frac{R_M^{(a)}}{2000} = 85,05 \text{ N/mm}$$

$$\sigma_{xm} = \frac{s_x^{(a)}}{t} = 7,09 \text{ N/mm}^2$$

Bij de bovenstaande berekening is steeds de m -as aangegeven. Dit is tevens de richting waarin een positieve schuifspanning zal werken. De gevonden richting van de schuifspanning in het NC voldoet wat dat betreft ook aan de verwachtingen, de (horizontale) dwarskracht werkt immers in dezelfde richting als de gevonden richting van de schuifspanning.

Rekening houdend met de eigenschappen van de schuifspanningsverdeling kan nu voor de doorsnede het schuifspanningsdiagram worden getekend. In figuur 63 is dit weergegeven.



Figuur 63 : Schuifspanningsverdeling.

Aangezien de normaalspanningen over ieder deel van de doorsnede lineair verlopen is de schuifspanningsverdeling overal parabolisch. Voor het deel SR kan gebruik worden gemaakt van het feit dat de schuifspanning in S nul, in C een extreem heeft en parabolisch verloopt. In D zal de schuifspanning dus ook nul moeten zijn !

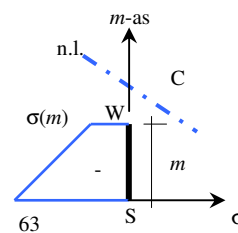
c) Exact schuifspanningsverloop

Als voor een deel van de doorsnede het exacte verloop van de schuifspanning gevonden moet worden, kan ook op een analytische wijze met behulp van basisformule (8) het verloop worden bepaald. Voor het gedeelte SR zal dit worden uitgewerkt.

Voor de schuifspanning op deel SR wordt een afschuivend deel SW aangenomen zoals afgebeeld in figuur 64.

Het lineaire verloop van de normaalspanning als functie van m is met een lineaire interpolatie te bepalen:

$$\sigma(m) = -63 + \frac{189}{150}m$$



Figuur 64 : Resultante normaalspanning.

Deze normaalspanning wordt veroorzaakt door alleen het moment M in de doorsnede, de normaalkracht N is immers nul.

De resultante van de normaalspanning op het deel SW is:

$$R_M^{(a)} = \int_0^t \sigma(m) \times t dm = \frac{1}{2}(-63 + \sigma(m)) \times 12 \times m$$

Combineren van deze beide uitdrukkingen leidt tot:

$$R_M^{(a)} = \frac{1}{2} \left(-63 + \left(-63 + \frac{189}{150} m \right) \right) \times 12 \times m = -756m + \frac{189}{25} m^2$$

De schuifkracht als functie van m over het deel SR kan nu met basisformule (8) worden bepaald:

$$s_x^{(a)} = \frac{R_M^{(a)}}{2000} = \frac{-756m + \frac{189}{25}m^2}{2000}$$

$$\sigma_{xm}(m) = \frac{s_x^{(a)}}{t} = \frac{-756m + \frac{189}{25}m^2}{2000 \times 12}$$

Deze uitkomst geeft de parabolische oplossing weer zoals die in figuur 63 is weergegeven.

De schuifspanning is extreem daar waar de afgeleide naar m nul is. Dit levert:

$$\frac{d\sigma_{xm}(m)}{dm} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-756 + \frac{189}{25}2m}{24000} = 0 \Rightarrow m = 50 \text{ mm}$$

Ook deze uitkomst klopt met het eerder gevonden verloop van de schuifspanning. De waarden voor de schuifspanning zijn in de onderstaande tabel voor het deel SR verzameld.

m (mm)	σ_{xm} (N/mm ²)
0	0
50	-0,79
100	0
150	2,36

Het zal duidelijk zijn dat het bepalen van de schuifspanningen op deze manier zeer bewerkelijk wordt. De hiervoor gehanteerde methode op basis van de eigenschappen van het schuifspanningsverloop verdient indien mogelijk de voorkeur.

Opmerking

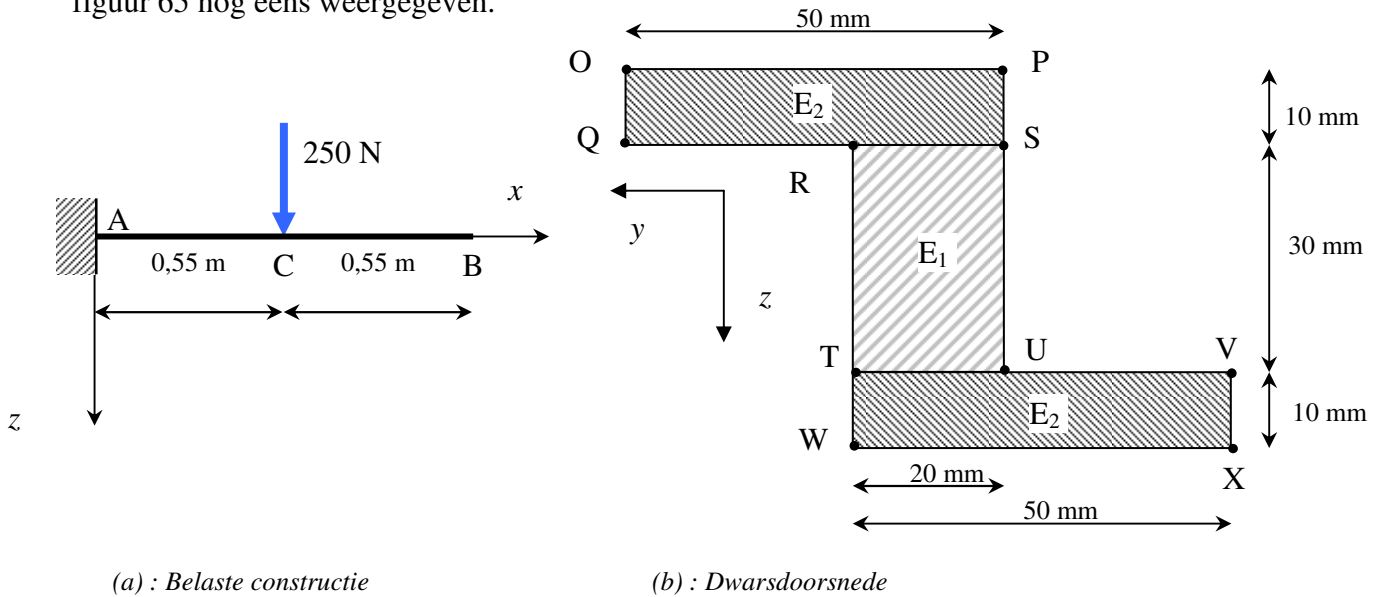
In dit voorbeeld werd gevraagd de schuifspanningsverdeling nabij de inklemming te bepalen. Aangezien de dwarskracht over de gehele ligger constant is zal de gevonden schuifspanningsverdeling in iedere doorsnede van de ligger hetzelfde zijn. Als echter in eerste instantie gevraagd was om de schuifspanningsverdeling links van B te bepalen dan doet zich een nieuwe situatie voor. De algemene methode vereist een buigend moment M in de doorsnede waardoor een resultante normaalkracht ten gevolge van dit buigend moment kan worden bepaald op het afschuivende deel van de doorsnede. Nabij punt B is het buigend moment echter nul! Aangezien de schuifspanningen ontstaan door de aanwezigheid van een dwarskracht, en het moment M alleen een schalingsfactor oplevert voor de verdeling van de schuifspanningen over de doorsnede, kan voor het bepalen van de schalingsfactor een **willekeurig moment** M worden aangenomen. De schalingsfactor :

$$c_2 = \frac{R_M^{(a)}}{M}$$

zal hetzelfde opleveren als die t.p.v. de inklemming. Ga dit zelf maar eens na!

1.7.2.2 Voorbeeld 10 : Schuifkracht in een inhomogene doorsnede

Van de eerder berekende constructie van voorbeeld 4 wordt gevraagd de schuifkracht in de lijmverbinding RS te bepalen over het liggerdeel AC. De gegevens van dit voorbeeld zijn in figuur 65 nog eens weergegeven.



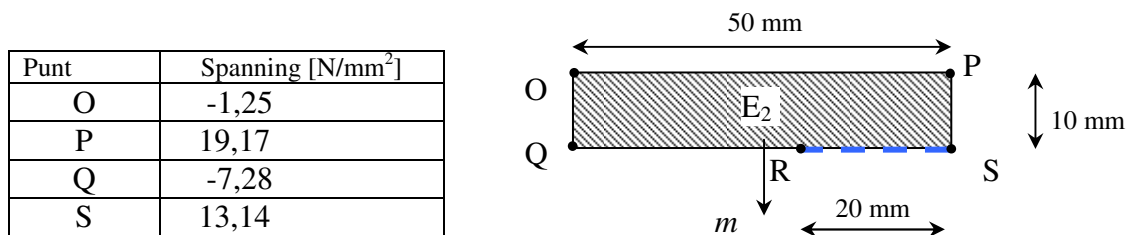
Gegevens : $E_1 = 6000 \text{ N/mm}^2$ $E_2 = 12000 \text{ N/mm}^2$

Figuur 65 : Voorbeeld 10, gegevens van voorbeeld 4.

De y- en z-as van de doorsnede vallen niet samen met de hoofdassen van de doorsnede. Daarom zal de schuifkracht per eenheid van lengte met de algemene methode moeten worden bepaald. Hiervoor is de normaalspanningsverdeling in de doorsnede nodig. Deze is in voorbeeld 4 bepaald. Deze normaalspanningen zijn spanningen tengevolge van alleen een buigend moment M , de normaalkracht N in de ligger is immers nul.

Voor de bepaling van de schuifkracht in de lijmverbinding wordt het deel OPQS als afschuivend deel beschouwd. De normaalspanningen in de vier hoekpunten zijn in voorbeeld 4 al bepaald en zijn in figuur 66 nog eens weergegeven.

:



Figuur 66 : Afschuivend deel OPQS.

Aangezien de spanningsverdeling over OPQS lineair is, is de resultante normaalkracht op het afschuivende deel te bepalen door de gemiddelde spanning te vermenigvuldigen met het oppervlak van het afschuivende deel:

$$R_M^{(a)} = \frac{(-1,25 + 19,17 - 7,28 + 13,14)}{4} \times 50 \times 10 = 2972,5 \text{ N}$$

De uitwendige normaal van het horizontale schuifvlak RS is in figuur 66 aangegeven met m . De schuifkracht in dit vlak kan worden bepaald met basisformule (8):

$$s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V$$

De dwarskracht V en het moment M in de doorsnede zijn in voorbeeld 4 bepaald :

$$V = 250 \text{ N}$$

$$M = -137500 \text{ N}$$

De schuifkracht per eenheid van lengte in de richting van de staafas in het afschuifvlak RS wordt hiermee:

$$s_x^{(a)} = -\frac{2972,5}{-137500} \times 250 = 5,4 \text{ N/mm}$$

Als we aannemen dat deze schuifkracht gelijkmatig over het afschuifvlak verdeeld is, levert dit een schuifspanning in de lijmverbinding op van:

$$\sigma_{\text{mx}} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}} = \frac{5,4}{20} = 0,27 \text{ N/mm}^2$$

De lijmverbinding zal in staat moeten zijn om deze spanningen over te kunnen dragen zonder dat er “slip” ontstaat in de verbinding. Er is immers uitgegaan van een volledige samenwerking tussen de beide materiaaldelen.

1.7.3 Dwarskrachtencentrum voor niet-symmetrische dunwandige doorsneden

Voor dunwandige profielen, waarbij aangenomen wordt dat de schuifspanningsverdeling over de breedte van een dunwandige snede constant is, kan de resultante kracht in een doorsnede worden bepaald. Deze zal uiteraard evengroot moeten zijn als de aanwezige dwarskracht. De werklijn van deze resultante zal in het algemeen niet door het normaalkrachtencentrum NC gaan maar door het dwarskrachtencentrum DC. In MECH-2 (paragraaf 5.5) is deze problematiek geïntroduceerd waarbij het dwarskrachtencentrum is gedefinieerd als :

Het dwarskrachtencentrum DC is dat punt in de doorsnede waar de werklijn van de dwarskracht door moet gaan opdat er geen wrining optreedt.

Bij rotatiesymmetrische doorsneden valt het dwarskrachtencentrum DC samen met het normaalkrachtencentrum NC. In het algemene geval zal dat niet zo zijn. Is er een symmetrieas, dan ligt hierop altijd het dwarskrachtencentrum. In MECH-2 blz 331 is voor die gevallen aangegeven hoe de plaats van het dwarskrachtencentrum kan worden bepaald.

In deze paragraaf wordt onderzocht hoe het dwarskrachtencentrum kan worden bepaald voor een niet-symmetrisch (dunwandig) profiel. De daarbij te volgen procedure is in feite een logisch vervolg op hetgeen in de vorige paragraaf is besproken en laat zich eenvoudig samenvatten tot de volgende stappen:

Stap 1 : Bepaal voor een willekeurige dwarskracht het schuifspanningsverloop in de doorsnede en bepaal de ligging van de werklijn van de resultante dwarskracht R_1 op basis van het gevonden schuifspanningsverloop

Stap 2 : Bepaal voor een tweede willekeurige dwarskracht die niet evenwijdig gekozen is aan de eerste dwarskracht, het schuifspanningsverloop in de doorsnede en bepaal de ligging van de werklijn van de resultante dwarskracht R_2 op basis van het gevonden schuifspanningsverloop

Stap 3 : Het dwarskrachtencentrum ligt op het snijpunt van de beide werklijnen R_1 en R_2

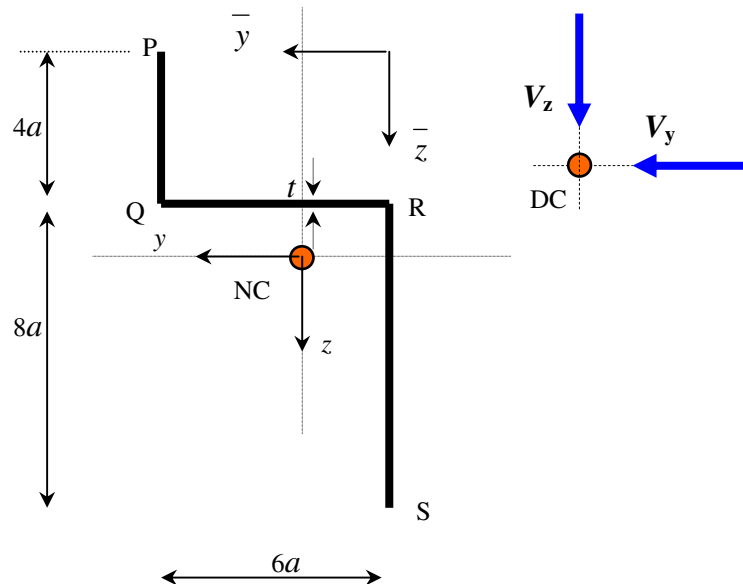
Het zal duidelijk zijn dat er alleen een snijpunt wordt gevonden indien de werklijnen van de beide dwarskrachten niet evenwijdig aan elkaar zijn en daaruit volgt de eis dat de willekeurig gekozen dwarskrachten niet evenwijdig aan elkaar gekozen kunnen worden.

Uiteraard is het niet nodig om “willekeurig gekozen” dwarskrachten voor de berekening te gebruiken. Een handige keuze kan zijn om de dwarskracht in de y - en z -richtingen te kiezen aangezien alle doorsnede gegevens in dit assenstelsel zijn opgesteld. De grootte van de dwarskracht is verder niet van belang mits ongelijk aan nul, een eenheidskracht voldoet.

In een voorbeeld zal de werkwijze worden toegelicht.

1.7.3.1 Voorbeeld 11 : Dwarskrachtencentrum in een niet-symmetrische dunwandige doorsnede

Van de onderstaande dunwandige doorsnede PQRS wordt gevraagd de ligging van het dwarskrachtencentrum DC te bepalen.



Gegevens : $a = 10 \text{ mm}$; $t = 6 \text{ mm}$; $E = 2,0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

Figuur 67 : Gegevens van voorbeeld 11.

Het schuifspanningsverloop behorende bij een dwarskracht wordt bepaald op basis van het normaalspanningsverloop t.g.v. een aangenomen moment. Dit normaalspanningsverloop is afhankelijk van de doorsnede grootheden ten opzichte van het NC. De berekening wordt daarom gestart met het bepalen van het NC en de doorsnede grootheden.

Doorsnedegegevens

Ten opzichte van het in figuur 67 aangegeven $\bar{y} - \bar{z}$ -assenstelsel kan de ligging van het NC op de gebruikelijke manier worden bepaald:

$$\bar{y}_{\text{NC}} = \frac{4at \times 6a + 6at \times 3a + 8at \times 0}{4at + 6at + 8at} = \frac{7a}{3} = 23,33 \text{ mm}$$

$$\bar{z}_{\text{NC}} = \frac{4at \times 2a + 6at \times 4a + 8at \times 8a}{4at + 6at + 8at} = \frac{16a}{3} = 53,33 \text{ mm}$$

Vervolgens worden de doorsnedegegevens berekend in een $y-z$ -assenstelsel met de oorsprong in het normaalkrachtenstroom NC.

$$EI_{yy} = 118Ea^3t = 708000E \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{zz} = 160Ea^3t = 960000E \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{yz} = EI_{zy} = -104Ea^3t = -624000E \text{ Nmm}^2$$

Aangezien het profiel niet symmetrisch is, zal voor het vinden van de schuifspanningsverdeling gebruik moeten worden gemaakt van de algemene methode uit paragraaf 1.7.2. In deze methode wordt gebruik gemaakt van de normaalspanningsverdeling ten gevolge van een moment dat in hetzelfde vlak werkt als de dwarskracht. Aangezien dit moment als een soort schalingsfactor werkt kan de grootte vrij gekozen worden, hier wordt gekozen voor een eenheidsmoment.

Er worden twee belastingsgevallen beschouwd, als eerste die voor een dwarskracht V_y met bijbehorend moment M_y en als tweede die voor een dwarskracht V_z met bijbehorend moment M_z . Voor de grootte van zowel de dwarskrachten als de momenten wordt hier gekozen voor eenheidswaarden. De berekeningen zijn uitgevoerd met MAPLE.

$$\text{Belastingsgeval 1 : } \begin{bmatrix} V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \text{ N} \quad ; \quad \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \text{ Nmm}$$

$$\text{Belastingsgeval 2 : } \begin{bmatrix} V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 1,0 \end{bmatrix} \text{ N} \quad ; \quad \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 1,0 \end{bmatrix} \text{ Nmm}$$

Door deze “handige” keuze kan voor deze berekening basisformule 8 vereenvoudigd worden tot :

$$s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V = -R_M^{(a)} \quad (\text{aangepaste formule 8})$$

$$\sigma_{xm} = \frac{s_x^{(a)}}{b} = \frac{-R_M^{(a)}}{b}$$

Hiermee is eenvoudig de schuifstroom en daarmee de schuifspanning t.g.v. de eenheidswaarden te bepalen.

Normaalspanningsverdeling belastingsgeval 1

Op dezelfde manier als uiteengezet in voorbeeld 9 zijn de normaalspanningen t.g.v. de gekozen belasting te bepalen.

$$\begin{bmatrix} 1,0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2,0 \times 10^8 \begin{bmatrix} 708 & -624 \\ -624 & 960 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - (EI_{yz})^2} \begin{bmatrix} EI_{zz} & -EI_{yz} \\ -EI_{zy} & EI_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uitwerken levert voor de componenten van de kromming:

$$\kappa_y = 0,165344 \times 10^{-10} \quad 1/\text{mm} \quad \kappa_z = 0,107474 \times 10^{-10} \quad 1/\text{mm}$$

De spanning in ieder willekeurig punt van de doorsnede kan nu bepaald worden met:

$$\sigma(y, z) = E \times \varepsilon(y, z) = E \times (\varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z)$$

De rek ε is de rek in de vezel die samenvalt met de staafas door het NC. In de doorsnede werkt echter geen normaalkracht waardoor deze rek nul is.

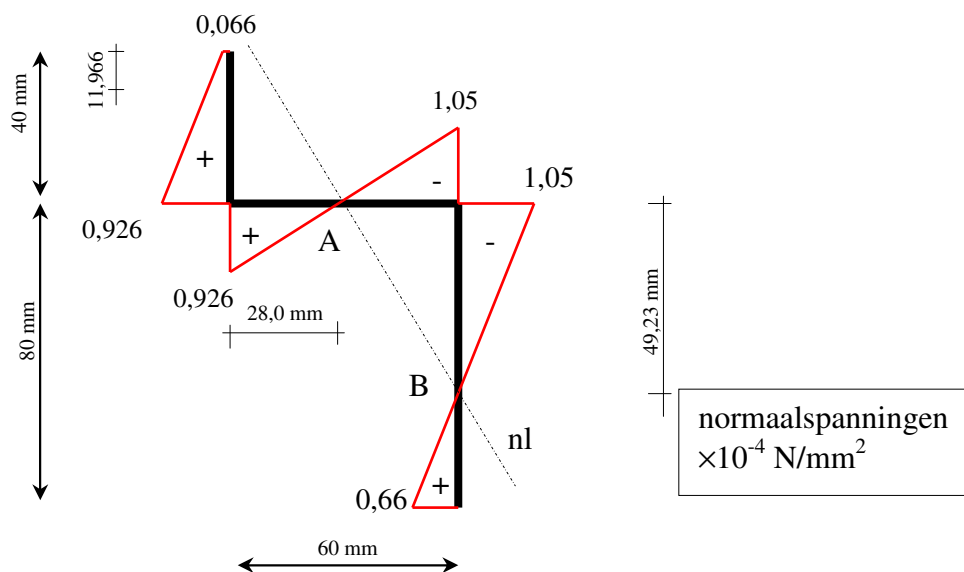
De spanning in een willekeurige vezel wordt daarmee :

$$\sigma(y, z) = 0,330688 \times 10^{-5} y + 0,214947 \times 10^{-5} z \quad \text{N/mm}^2 \text{ met } y \text{ en } z \text{ in mm}$$

De spanningen in de punten P, Q, R en S zijn hiermee te bepalen.

punt	y	z	$\sigma(y, z)$ N/mm ²
P	+36,67	-53,33	$0,066e^{-4}$
Q	+36,67	-13,33	$0,926e^{-4}$
R	-23,33	-13,33	$-1,058e^{-4}$
S	-23,33	+66,67	$0,661e^{-4}$

De normaalspanningsverdeling over de doorsnede is in figuur 68 schematisch weergegeven.



Figuur 68 : Normaalspanningen in N/mm² behorende bij belastingsgeval 1.

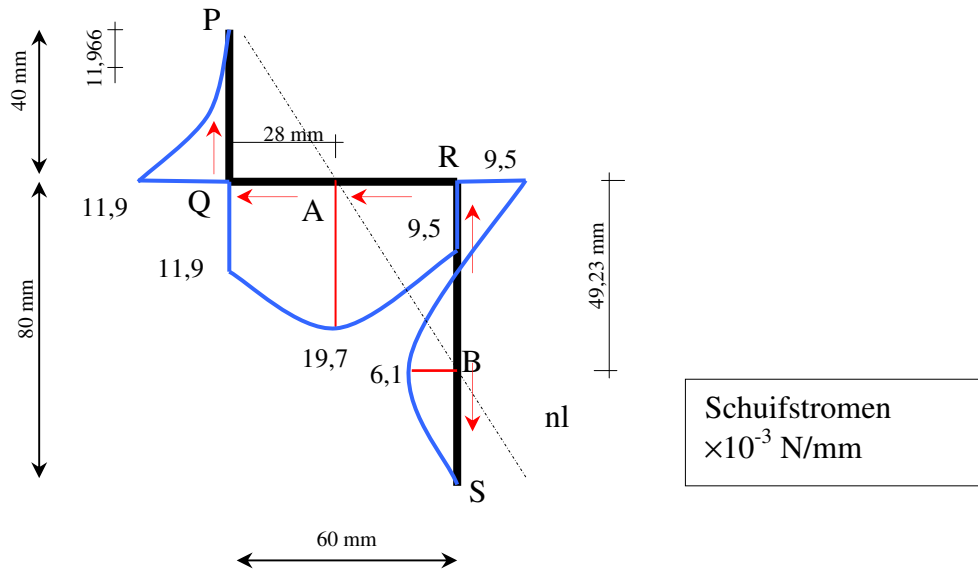
Voor het bepalen van het schuifspanningsverloop zijn een paar karakteristieke punten voldoende :

- de schuifspanning is nul in de punten P en S
- de schuifspanning is maximaal waar de normaalspanning nul is (in A en B)
- de schuifspanningsverdeling is parabolisch daar waar de normaalspanning een lineair verloop heeft.

Om het schuifspanningsverloop te kunnen *tekenen* zijn zodoende vier punten van belang; A, B, Q en R. Met basisformule 8 kunnen de volgende schuifstromen worden bepaald:

$$\begin{aligned}
 s_{x-Q}^{(a)} &= -\frac{R_M^{(a)}}{M} \times V = -R_M^{(a)} = -\frac{1}{2} \times 40 \times 6 \times (0,066 + 0,926) \times 10^{-4} = -11,905 \times 10^{-3} \text{ N/mm} \\
 s_{x-A}^{(a)} &= s_{x-Q}^{(a)} + \left(-\frac{1}{2} \times 28 \times 6 \times 0,926 \times 10^{-4}\right) = -19,683 \times 10^{-3} \text{ N/mm} \\
 s_{x-R}^{(a)} &= s_{x-A}^{(a)} + \left(-\frac{1}{2} \times 32 \times 6 \times -1,058 \times 10^{-4}\right) = -9,524 \times 10^{-3} \text{ N/mm} \\
 s_{x-B}^{(a)} &= s_{x-R}^{(a)} + \left(-\frac{1}{2} \times 49,23 \times 6 \times -1,058 \times 10^{-4}\right) = 6,105 \times 10^{-3} \text{ N/mm}
 \end{aligned}$$

De gevonden schuifstromen zijn in figuur 69 in de doorsnede aangegeven waarbij met pijlen de richting zoals deze werkt is aangegeven.



Figuur 69 : Schuifstromen behorende bij belastingsgeval 1.

Door voor ieder continu deel van de schuifstroomverdeling het functievoorschrift te bepalen kan vervolgens door integratie per deel de schuifkracht worden bepaald. Merk op dat voor het bepalen van deze functies alleen de schuifstromen in Q en R bekend moeten zijn.

Voor het deel PQ geldt voor de resultante schuifkracht indien de plaatsvariabele x wordt gekozen van P naar Q :

$$R^{PQ} = \int_0^{4a} -t \times x \times \left(\sigma_P + \frac{\frac{1}{2}(\sigma_Q - \sigma_P)x}{4 \times a} \right) dx = -0,1693 \text{ N}$$

Voor het deel QR geldt voor de resultante schuifkracht indien de plaatsvariabele x wordt gekozen van Q naar R :

$$R^{QR} = \int_0^{6a} s^{(a)}_{x-Q} - t \times x \times \left(\sigma_Q + \frac{\frac{1}{2}(\sigma_R - \sigma_Q)x}{6 \times a} \right) dx = -1,0 \text{ N}$$

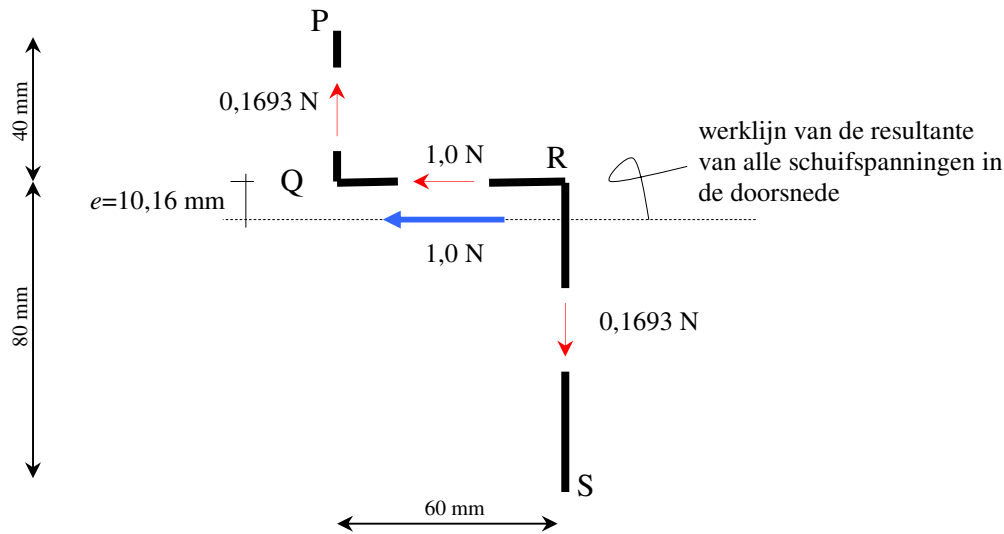
Voor het deel RS geldt voor de resultante schuifkracht indien de plaatsvariabele x wordt gekozen van R naar S :

$$R^{RS} = \int_0^{8a} s^{(a)}_{x-R} - t \times x \times \left(\sigma_R + \frac{\frac{1}{2}(\sigma_S - \sigma_R)x}{8 \times a} \right) dx = 0,1693 \text{ N}$$

De grootte van de horizontale en verticale resultanten komen overeen met de op de doorsnede werkende dwarskrachten $V_y (1,0)$ en $V_z (0,0)$.

Ook het teken van de bepaalde schuifkracht over het deel QR is juist, immers deze schuifkracht is bepaald met de lokale m -as van Q naar R. (maak zelf een schets hiervan !)

Met de bepaalde resultante schuifkrachten over de delen PQ, QR en RS kan de werklijn van de dwarskracht in de doorsnede worden bepaald. In figuur 70 is dit weergegeven.



Figuur 70 : Werklijn van de resultante schuifkracht voor belastinggeval 1.

Het dwarskrachtencentrum DC zal ergens op deze werklijn moeten liggen. Om het DC te vinden is een tweede berekening nodig. De gehele procedure moet dus worden herhaald voor belastinggeval 2. Een samenvatting van de rekenresultaten wordt hieronder weergegeven.

Normaalspanningsverdeling belastinggeval 2

Met behulp van de momentbelasting van belastinggeval 2 kan de normaalspanning in de doorsnede worden gevonden :

$$\begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - (EI_{yz})^2} \begin{bmatrix} EI_{zz} & -EI_{yz} \\ -EI_{yz} & EI_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

Uitwerken levert voor de componenten van de kromming:

$$\kappa_y = 0,107474 \times 10^{-10} \text{ 1/mm} \quad \kappa_z = 0,121941 \times 10^{-10} \text{ 1/mm}$$

De normaalspanningsverdeling over de doorsnede kan vervolgens worden bepaald met :

$$\sigma(y, z) = 0,214947 \times 10^{-5} y + 0,243882 \times 10^{-5} z \text{ N/mm}^2 \text{ met } y \text{ en } z \text{ in mm}$$

De spanningen in de punten P, Q, R en S zijn hiermee te bepalen.

punt	y	z	$\sigma(y, z)$ N/mm ²
P	+36,67	-53,33	-0,513e ⁻⁴
Q	+36,67	-13,33	0,463e ⁻⁴
R	-23,33	-13,33	-0,827e ⁻⁴
S	-23,33	+66,67	1,124e ⁻⁴

Voor het verloop van de schuifstroom over de delen PQ, QR en RS zijn de schuifstromen in Q en R noodzakelijk.

$$s_{x-Q}^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} \times V = -R_M^{(a)} = -\frac{1}{2} \times 40 \times 6 \times (-0,513 + 0,463) \times 10^{-4} = -0,595 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$$

$$s_{x-R}^{(a)} = s_{x-Q}^{(a)} + \left(-\frac{1}{2} \times 60 \times 6 \times (0,463 - 0,827) \times 10^{-4}\right) = 7,143 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$$

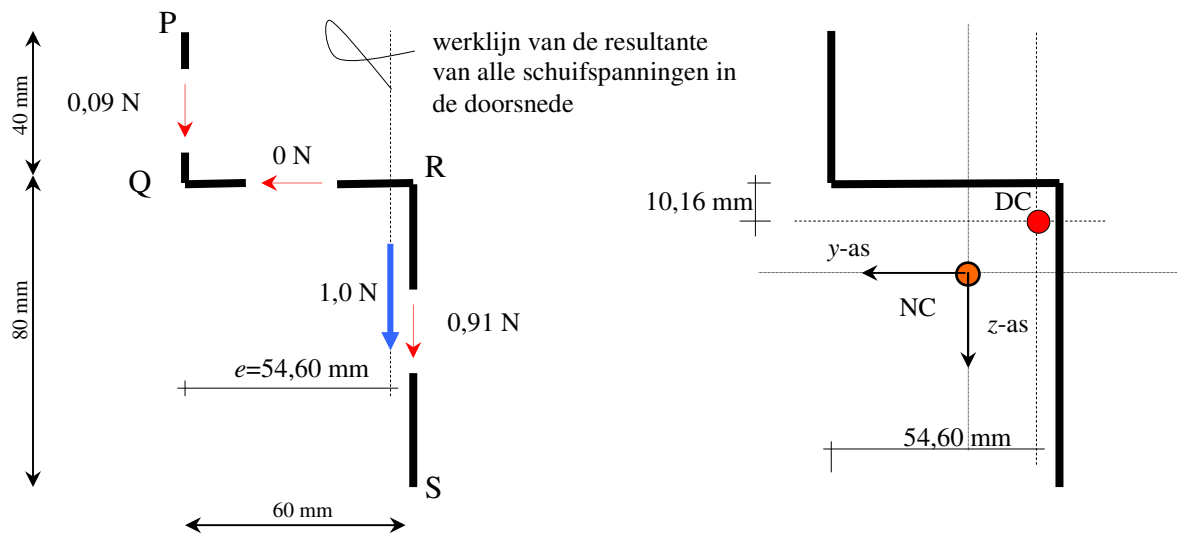
De resultanten schuifkrachten op de delen PQ, QR en RS zijn door integratie van het verloop van de schuifstroom eenvoudig te verkrijgen :

$$R^{PQ} = \int_0^{4a} -t \times x \times \left(\sigma_P + \frac{\frac{1}{2}(\sigma_Q - \sigma_P)x}{4 \times a} \right) dx = 0,090 \text{ N}$$

$$R^{QR} = \int_0^{6a} s_{x-Q}^{(a)} - t \times x \times \left(\sigma_Q + \frac{\frac{1}{2}(\sigma_R - \sigma_Q)x}{6 \times a} \right) dx = 0 \text{ N}$$

$$R^{RS} = \int_0^{8a} s_{x-R}^{(a)} - t \times x \times \left(\sigma_R + \frac{\frac{1}{2}(\sigma_S - \sigma_R)x}{8 \times a} \right) dx = 0,910 \text{ N}$$

De grootte van de horizontale en verticale resultanten komen overeen met de op de doorsnede werkende dwarskracht $V_z(1,0)$. De gevonden resultanten zijn in figuur 71 (a) weergegeven.



(a) : Werklijn t.g.v. belastingsgeval 2

(b) : Normalkrachten centrum NC en dwarskrachten centrum DC

Figuur 71 : Werklijn van de resultante schuifkracht voor belastingsgeval 2.

In figuur 71 (b) is het snijpunt van de gevonden werklijnen weergegeven. Dit snijpunt is het gezochte dwarskrachten centrum DC. In de figuur is ook het eerder bepaalde normaalkrachten centrum NC weergegeven.

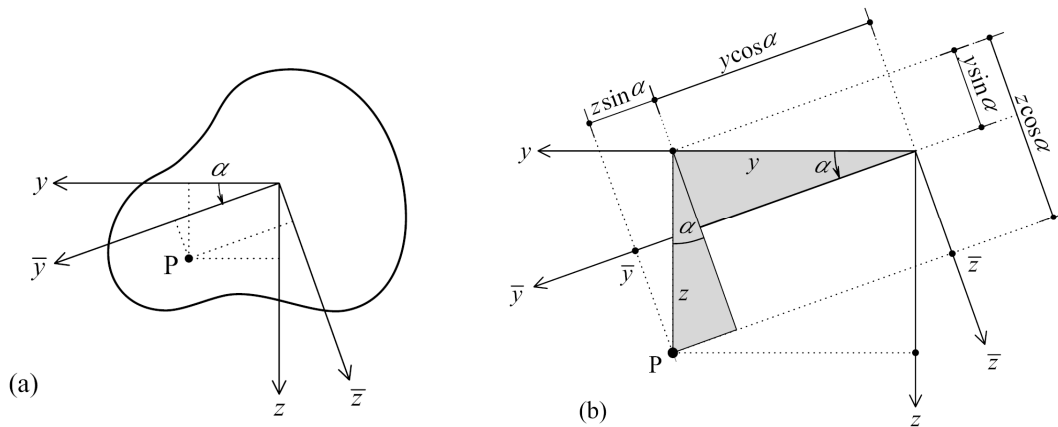
Als in de doorsnede alleen een normaalkracht werkt en deze aangrijpt in het NC ontstaan geen krommingen en daarmee ook geen spanningen t.g.v. buigende momenten. Als in de doorsnede alleen een dwarskracht werkt en deze aangrijpt in het DC dan wordt de doorsnede niet op wringing belast en zijn de gevonden schuifkrachten alleen het resultaat van de dwarskracht.

BIJLAGE A

Het bewijs dat de krommingsvector kan worden beschouwd als een 1^e orde tensor kan op de volgende wijze worden geleverd. Hiervoor dient onderzocht te worden wat het effect is van een assentransformatie (rotatie) op de rek als functie van de plaats in het y-z-assenstelsel.

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z$$

Voor een gegeven punt P, zie de onderstaande figuur, in de doorsnede is de relatie tussen de coördinaten in het oorspronkelijke y-z-assenstelsel en het gerooteerde $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -assenstelsel gegeven door:



Figuur 72 : Coördinaattransformatie in de doorsnede bij een rotatie van het assenstelsel.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y \cos \alpha + z \sin \alpha \\ \bar{z} &= -y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{aligned} \quad \text{en de inverse :} \quad \begin{aligned} y &= \bar{y} \cos \alpha - \bar{z} \sin \alpha \\ z &= \bar{y} \sin \alpha + \bar{z} \cos \alpha \end{aligned}$$

Deze relatie is de transformatieregel voor een 1^e orde tensor. De rek in het y-z-assenstelsel kan met de inverse uitdrukking worden geschreven in termen van het gerooteerde assenstelsel met behulp van:

$$\begin{aligned} \varepsilon(y, z) &= \varepsilon + y\kappa_y + z\kappa_z \\ &= \varepsilon + (\bar{y} \cos \alpha - \bar{z} \sin \alpha) \kappa_y + (\bar{y} \sin \alpha + \bar{z} \cos \alpha) \kappa_z \\ &= \varepsilon + \bar{y} (\kappa_y \cos \alpha + \kappa_z \sin \alpha) + \bar{z} (-\kappa_y \sin \alpha + \kappa_z \cos \alpha) \\ &= \varepsilon + \bar{y} \bar{\kappa}_{\bar{y}} + \bar{z} \bar{\kappa}_{\bar{z}} \end{aligned}$$

Uit deze laatste uitdrukking blijkt dat de componenten van de kromming in y- en z-richting de transformatieregel volgt van een 1^e orde tensor.

Een dergelijk bewijs kan ook voor het moment worden geleverd.

Hiervoor onderzoeken we het effect van een rotatie van het assenstelsel op de uitdrukkingen voor de snedekrachten N en M . De eerder gevonden uitdrukking in het y - z -assenstelsel gelden ook voor het geroteerde assenstelsel:

$$N = \int \sigma(\bar{y}, \bar{z}) dA$$

$$M_{\bar{y}} = \int \bar{y} \sigma(\bar{y}, \bar{z}) dA$$

$$M_{\bar{z}} = \int \bar{z} \sigma(\bar{y}, \bar{z}) dA$$

Voor het oorspronkelijke assenstelsel geldt:

$$N = \int \sigma(y, z) dA$$

$$M_y = \int y \sigma(y, z) dA$$

$$M_z = \int z \sigma(y, z) dA$$

Door gebruik te maken van de inverse transformatieregel van de vorige pagina:

$$y = \bar{y} \cos \alpha - \bar{z} \sin \alpha$$

$$z = \bar{y} \sin \alpha + \bar{z} \cos \alpha$$

ontstaat:

$$N = \int \sigma(\bar{y}, \bar{z}) dA$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int (\bar{y} \cos \alpha - \bar{z} \sin \alpha) \sigma(\bar{y}, \bar{z}) dA \\ &= \left(\int \bar{y} \sigma(\bar{y}, \bar{z}) dA \right) \cos \alpha - \left(\int \bar{z} \sigma(\bar{y}, \bar{z}) dA \right) \sin \alpha \\ &= M_{\bar{y}} \cos \alpha - M_{\bar{z}} \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z &= \int (\bar{y} \sin \alpha + \bar{z} \cos \alpha) \sigma(\bar{y}, \bar{z}) dA \\ &= \left(\int \bar{y} \sigma(\bar{y}, \bar{z}) dA \right) \sin \alpha + \left(\int \bar{z} \sigma(\bar{y}, \bar{z}) dA \right) \cos \alpha \\ &= M_{\bar{y}} \sin \alpha + M_{\bar{z}} \cos \alpha \end{aligned}$$

De componenten van het moment zien er uiteindelijk uit als:

$$M_y = M_{\bar{y}} \cos \alpha - M_{\bar{z}} \sin \alpha$$

$$M_z = M_{\bar{y}} \sin \alpha + M_{\bar{z}} \cos \alpha$$

Hieruit volgt dat ook de componenten van het moment in de doorsnede transformeren als een 1^e orde tensor. Zowel de kromming als het moment zijn daarom *1^e orde tensoren*.

APPENDIX B

De momentenlijnen in het xy - en xz -vlak van een statisch onbepaalde ligger vertonen een opmerkelijke koppeling als de randvoorwaarden in de beide vlakken niet hetzelfde zijn. We kijken hiervoor even specifiek naar het voorbeeld uit **figuur 19-2** en zullen op basis van deze figuur de randvoorwaarden wijzigen. De ligger is met een gelijkmatig verdeelde belasting q_y en q_z belast. De op te lossen differentiaalvergelijkingen luiden:

$$u_y'''' = \frac{EI_{zz}q_y - EI_{yz}q_z}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2}$$

$$u_z'''' = \frac{-EI_{yz}q_y + EI_{yy}q_z}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2}$$

De algemene oplossingen van deze differentiaalvergelijkingen zijn:

$$u_y = \frac{(EI_{zz}q_y - EI_{yz}q_z)x^4}{24(EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2)} + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{4} + C_3x + C_4$$

$$u_z = \frac{(-EI_{yz}q_y + EI_{yy}q_z)x^4}{24(EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2)} + \frac{D_1x^3}{6} + \frac{D_2x^2}{4} + D_3x + D_4$$

Situatie 1:

De balk is volledig ingeklemd op $x = 0$ en opgelegd op $x = l$. De acht randvoorwaarden die noodzakelijk zijn, kunnen worden beschreven met:

$$x = 0: (u_y = 0; u_z = 0; \varphi_y = 0; \varphi_z = 0)$$

$$x = l: (u_y = 0; u_z = 0; M_y = 0; M_z = 0)$$

Na oplossen worden de volgende momentenverdelingen gevonden:

$$M_y(x) = -\frac{1}{8}q_y(4x^2 - 5xl + l^2)$$

$$M_z(x) = -\frac{1}{8}q_z(4x^2 - 5xl + l^2)$$

Dit is de gebruikelijke verdeling die we ook hadden gevonden op basis van eenvoudige analyse in één vlak. Het moment bij de inklemming is hiermee:

$$M_y(0) = -\frac{1}{8}q_y l^2$$

$$M_z(0) = -\frac{1}{8}q_z l^2$$

Situatie 2:

De balk is alleen volledig ingeklemd in het xz -vlak op $x = 0$. In het xy -vlak is de balk op deze plaats scharnierend ondersteund. Aan de rechterzijde op $x = l$ is nog steeds de ligger enkelvoudig ondersteund in zowel het xy - als het xz -vlak. De acht randvoorwaarden zijn nu:

$$x = 0: (u_y = 0; u_z = 0; M_y = 0; \varphi_y = 0)$$

$$x = l: (u_y = 0; u_z = 0; M_y = 0; M_z = 0)$$

De oplossing levert de volgende momentenverdelingen:

$$M_y(x) = -\frac{1}{2}q_y x(x-l)$$

$$M_z(x) = -\frac{1}{8EI_{yy}}(4EI_{yy}q_zx^2 - 5EI_{yy}q_zxl + EI_{yy}q_zl^2 + EI_{yz}q_yxl - EI_{yz}q_y l^2)$$

Uit dit resultaat laat een koppeling zien tussen het xy - en het xz -vlak. Het moment in het xz -vlak bij de inklemming wordt gereduceerd vanwege de koppeling in de constitutieve relatie:

$$M_y(0) = 0; \quad M_z(0) = \frac{(-EI_{yy}q_z + EI_{yz}q_y) \times l^2}{8EI_{yy}} = -\frac{1}{8}q_z l^2 + \boxed{\frac{EI_{yz}q_y l^2}{8EI_{yy}}} \quad \text{koppeling}$$

Met de hieronder weergegeven MAPLE code kunnen deze resultaten worden gereproduceerd. De regels met de randvoorwaarden kunnen voor situatie 1 en 2 eenvoudig worden gewisseld door het toevoegen van een commentaar-teken # aan het begin van de regel. (Alle tekst na het # karakter wordt gezien als commentaar.)

```
> restart;
Double bending for unsymmetrical and or inhomogeneous cross sections,
one side clamped beam and simply supported at the other end,
loaded with a constant distributed load qy and gz :
> DV1:=diff(uy(x),x$4)=(EIzz*qy-EIyz*qz)/(EIyy*EIzz-EIyz^2);
> DV2:=diff(uz(x),x$4)=(EIyy*qz-EIyz*qy)/(EIyy*EIzz-EIyz^2);
General solution of the two differential equations:
> sol:=(dsolve({DV1,DV2},{uy(x),uz(x)})); assign(sol);
> uy:=uy(x); uz:=uz(x);
related quantities:
> phiz:=diff(uy,x): kappay:=diff(-phiz,x):
> phiy:=-diff(uz,x): kappaz:=diff(phiy,x):
> My:=EIyy*kappay+EIyz*kappaz: Vy:=diff(My,x):
> Mz:=EIyz*kappay+EIzz*kappaz: Vz:=diff(Mz,x):
8 boundary conditions, clamped end at x=0 and a simply supported end at x=L:
> #x:=0: eq1:=uy=0: eq2:=phiy=0: eq3:=uz=0: eq4:=phiz=0: # situation1
> x:=0: eq1:=uy=0: eq2:=My=0: eq3:=uz=0: eq4:=phiy=0: # situation2
> x:=L: eq5:=uy=0: eq6:=My=0: eq7:=uz=0: eq8:=Mz=0:
> x:='x':
solve the integration constants:
> sol:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8},
{C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8}): assign(sol):
Moment and Shear distribution in the beam:
> simplify(My); simplify(Vy):
> simplify(Mz); simplify(Vz):
> x:=0: simplify(My); simplify(Mz);
Example from lecture notes:
> x:='x': L:=10; qy:=0; qz:=8;
> Emod:=100e6; a:=0.1:
> EIyy:=(4/9)*Emod*a^4; EIyz:=(1/2)*EIyy; EIzz:=EIyy;
joke: very unsuspected behaviour, remove the # to play with this !!
> #EIzz:=10000; EIyy:=20000; EIyz:=4000;
plot: I plot graphs with a minus to obtain visually positive downwards graphs
> plot([-uy,-uz],x=0..L,title="displacements uy and uz",legend=["uy","uz"]);
plot: I plot graphs with minus to obtain visually positive moments downwards
> plot([-My,-Mz],x=0..L,title="moments My and Mz",legend=["My","Mz"]);
> x:=0: evalf(My); evalf(Vy); evalf(Mz); evalf(Vz);
> x:=L/2: evalf(uy); evalf(uz); evalf(My); evalf(Mz);
```

2. OPGAVEN

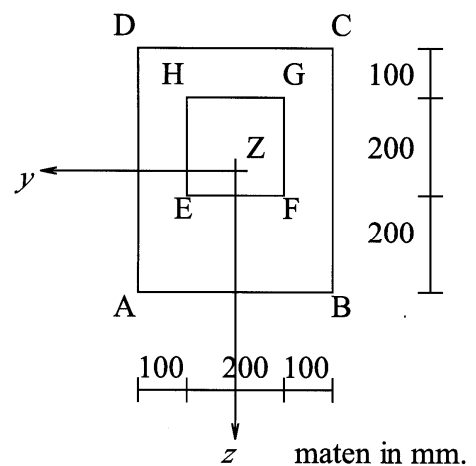
2.1 Doorsnede grootheden

De hieronder weergegeven vraagstukken hebben allen betrekking op het bepalen van de doorsnede grootheden van niet-symmetrische profielen.

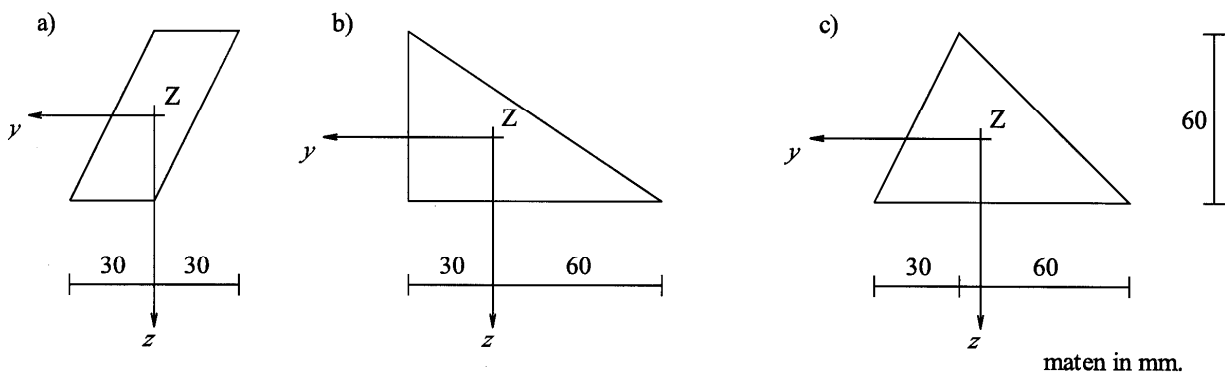
Vraagstuk 1

Gevraagd:

- Bepaal de ligging van het zwaartepunt z .
- Bepaal de traagheidsmomenten ten opzichte van het gekozen assenstelsel.
- Bepaal de traagheidsmomenten ten opzichte van een assenstelsel dat 45° is gedraaid.
- Bepaal de traagheidsmomenten van deze doorsnede ten opzichte van een assenstelsel evenwijdig aan het gegeven assenstelsel door hoekpunt C.



Vraagstuk 2



Gevraagd:

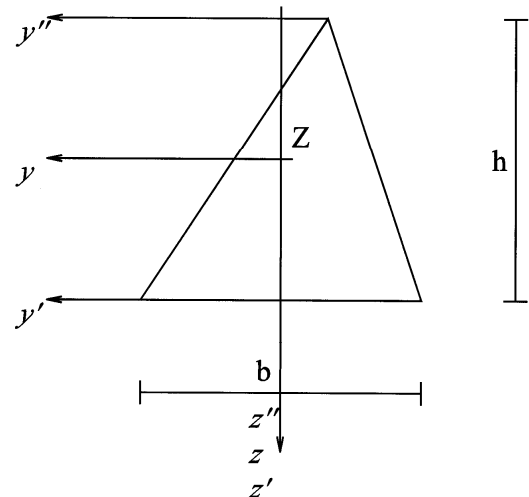
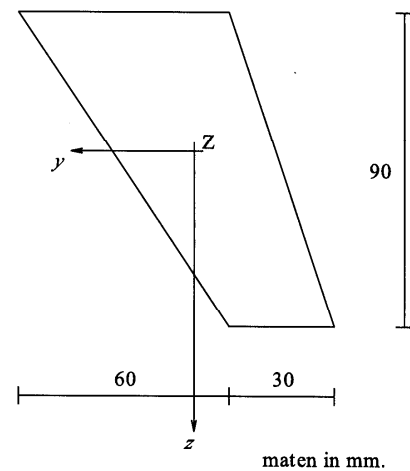
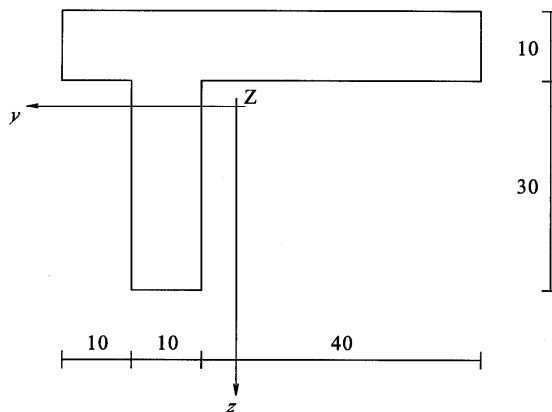
- Zwaartepunt
- I_{yy} , I_{zz} , I_{yz}
- Hoofdrichtingen
- Hoofdtraagheidsmomenten

Vraagstuk 3

Gegeven is dat $I_{z'z'} = 1/12 \times bh^3$

Gevraagd:

- Dit met de regel van Steiner te controleren.
- Bereken met dezelfde verschuivingsstelling de grootte van $I_{z''z''}$

**Vraagstuk 4**

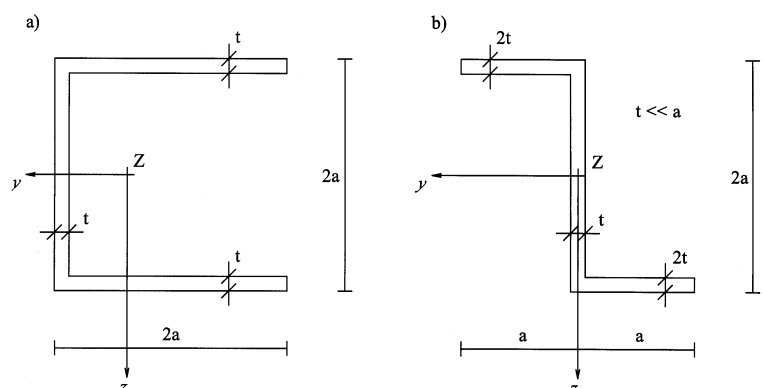
Gevraagd:

- Zwaartepunt
- I_{yy} , I_{zz} , I_{yz}
- De hoofdtraagheidsassen
- De hoofdtraagheidsmomenten

Vraagstuk 5

Gevraagd:

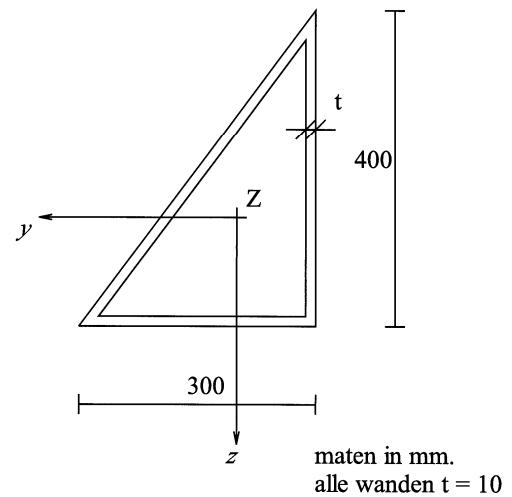
- Zwaartepunt
- I_{yy} , I_{zz} , I_{yz}
- De hoofdrichtingen
- De hoofdtraagheidsmomenten
- Voor welke asrichting is de waarde van $I_{y'z'}$ zo groot mogelijk?



Vraagstuk 6

Gevraagd:

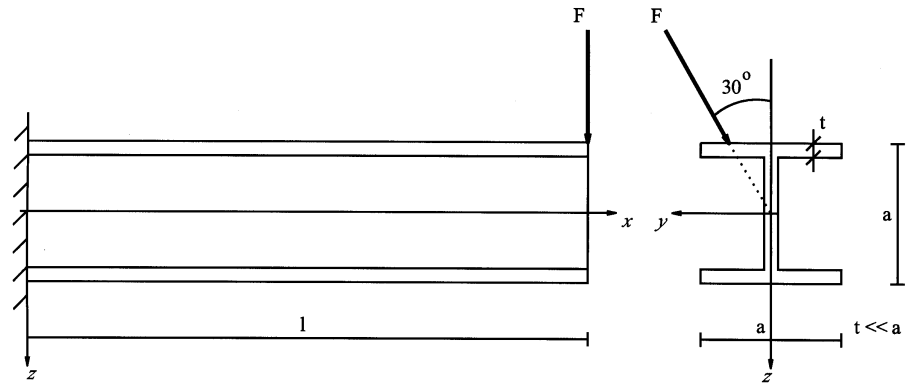
- Bepaal de ligging van het zwaartepunt.
- Bepaal de grootheden I_{yy} , I_{zz} , I_{yz} .
- Teken de cirkel van Mohr en bepaal de hoofdrichtingen, alsmede de grootte van I_1 en I_2 .



2.2 Normalspanningen bij buiging

De hieronder weergegeven opgaven hebben betrekking op niet-symmetrische doorsneden die uitsluitend op buiging worden belast.

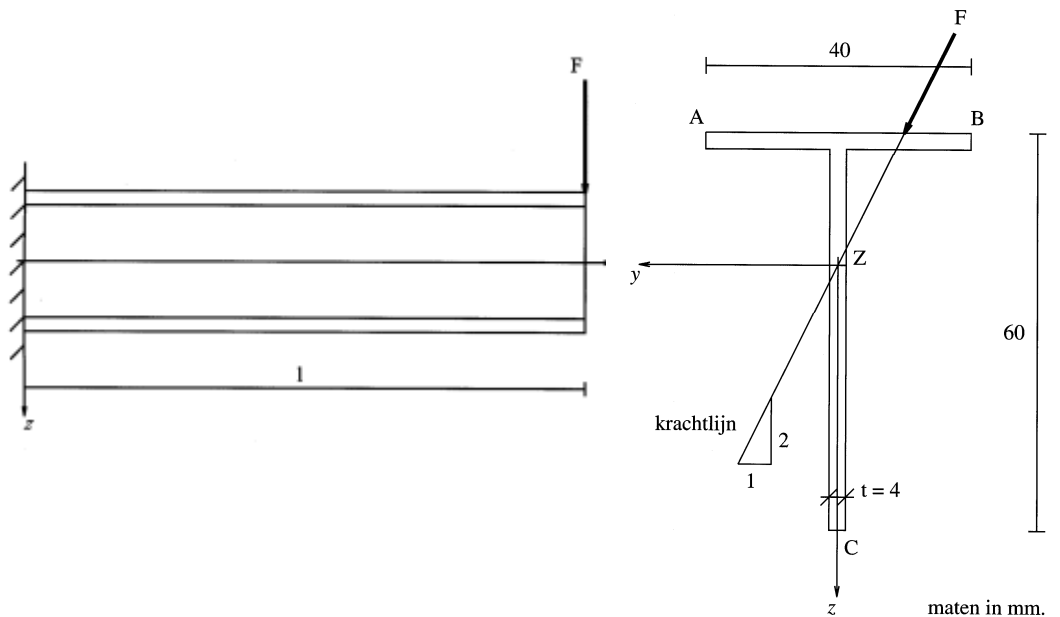
Vraagstuk 1



Gevraagd:

Bepaal de verdeling van de normalspanningen over de doorsnede ter plaatse van de inklemming.

Vraagstuk 2



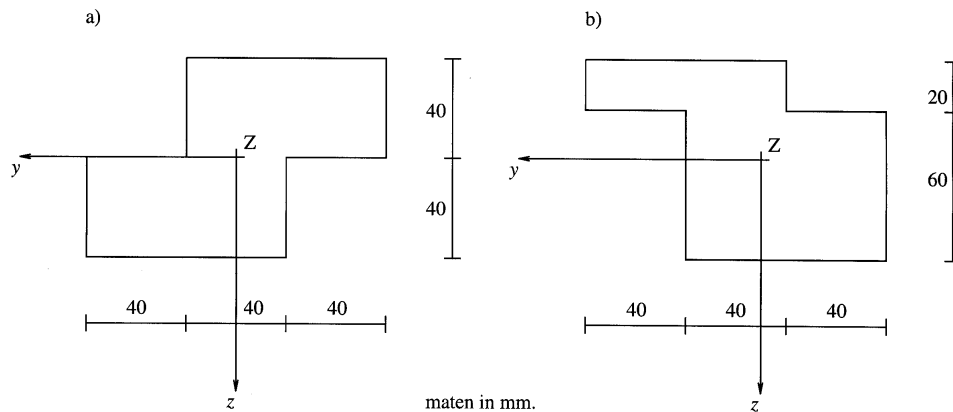
Een doorsnede moet een resulterend buigend moment M ter grootte van 100 Nm overbrengen. De krachtlijn is in de doorsnede weergegeven. De belasting op de constructie is in de linker figuur aangegeven, F en l zijn onbekend.

Gevraagd:

- De normalspanningsverdeling te berekenen en in een diagram buiten de doorsnede weer te geven.
- De neutrale lijn
- De doorbuigingsrichting aan te geven

Vraagstuk 3

De gegeven doorsneden worden zodanig belast door een buigend moment dat de neutrale lijn samenvalt met de y-as.



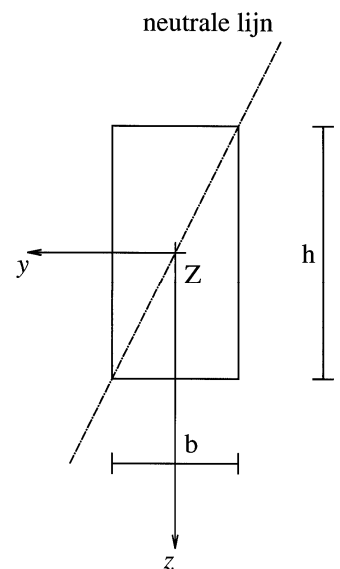
Gevraagd:

- Bepaal rechtstreeks uit het spanningsdiagram de ligging van de krachtlijn.
- Bepaal de grootheden I_{yy} , I_{zz} , I_{yz} en de ligging van de hoofdassen.
- Bepaal de onder a) gevonden richting van de krachtlijn opnieuw, nu uit de ligging van de neutrale lijn t.o.v. de hoofdassen

Vraagstuk 4

Bepaal de ligging van de krachtlijn in de nevenstaande doorsnede voor aangegeven ligging van de neutrale lijn.

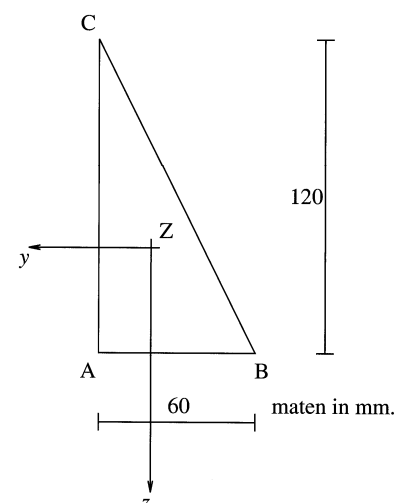
Kan de krachtlijn ook via een eenvoudige redenering uit het normaalspanningsdiagram gevonden worden?

**Vraagstuk 5**

Een balk met een normaaldoorsnede zoals hiernaast geschetst, wordt belast op zuivere buiging. Hierdoor treden in A en C gelijke trekspanningen op van +10 MPa.

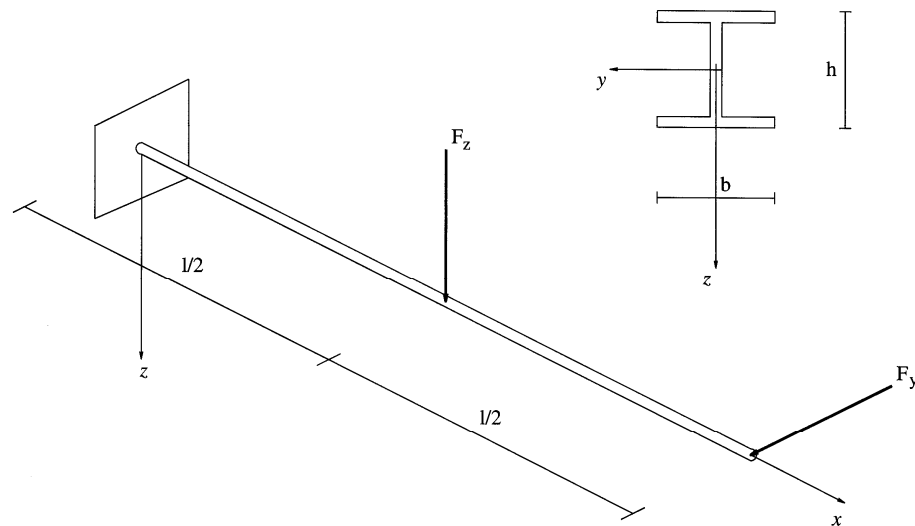
Gevraagd:

- Bepaal de grootte van het buigend moment
- Bepaal de spanning in punt B



Vraagstuk 6

Een uitgekraagde balk HE 160 A is belast met twee krachten F_y en F_z , zoals aangegeven in de figuur.



Gegeven: HE 160A

$b = 160 \text{ mm}$; $h = 152 \text{ mm}$; $l = 3000 \text{ mm}$

$I_{yy} = 612 \times 10^4 \text{ mm}^4$ $I_{zz} = 1673 \times 10^4 \text{ mm}^4$

$\sigma_{\max} = 100 \text{ MPa}$

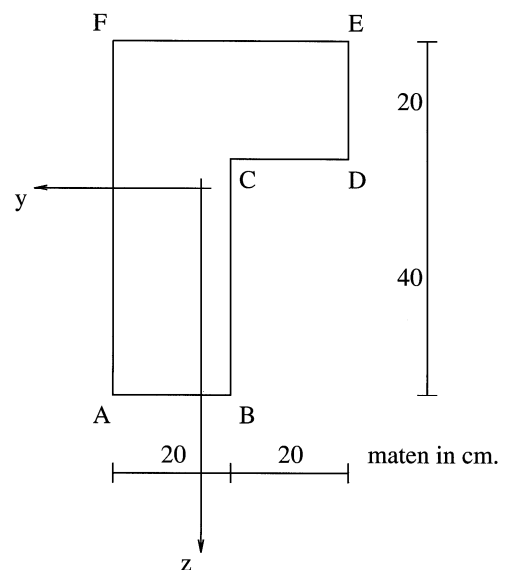
Gevraagd: Bepaal de maximale grootte van F_y en F_z waarvoor geldt : $F_y = F_z$.

Vraagstuk 7

Een balk met een normaaldoorsnede zoals hiernaast is getekend, wordt belast op zuivere buiging. Hierbij is de grootste drukspanning -50 MPa en de grootste trekspanning $+70 \text{ MPa}$.

Gevraagd:

- a) Bepaal de grootte en de richting van het door de doorsnede over te brengen moment.



Vraagstuk 8

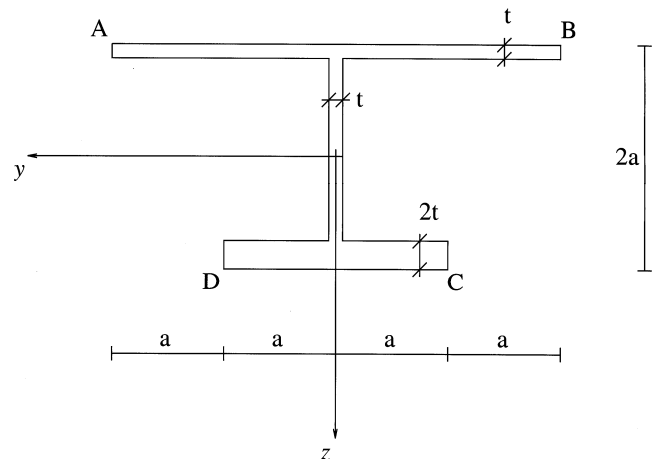
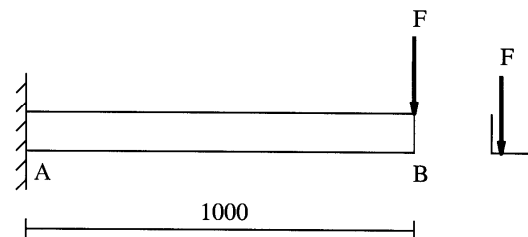
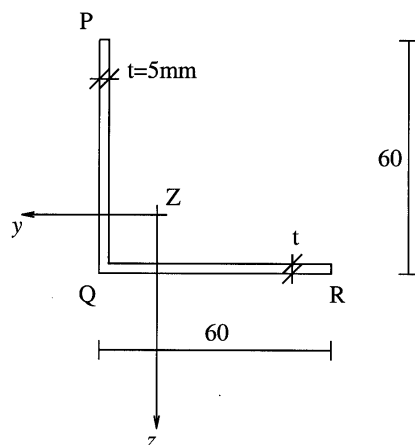
Een dunwandig profiel wordt belast met

$$M_y = +80 \sigma a^2 t$$

$$M_z = +52 \sigma a^2 t$$

Gevraagd:

- Bereken de spanningen in de hoekpunten A, B, C en D
- Bepaal de ligging van de neutrale lijn
- Bepaal het traagheidsmoment I_{yy} in de richting loodrecht op de neutrale lijn.
- Controleer hieruit de gevonden spanning in punt A

**Vraagstuk 9**

Gegeven:

$$I_{yy} = I_{zz} = 22,5 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = -13,5 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

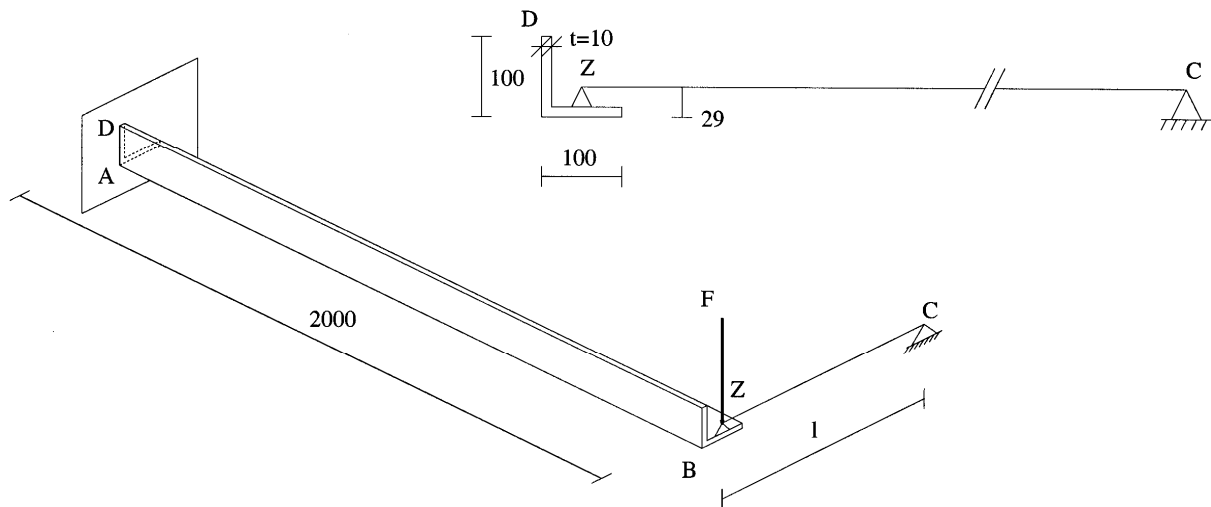
$$E = 200 \text{ GPa}$$

Ligger AB met een hoekprofiel als in de tekening is in A horizontaal ingeklemd met één been verticaal. In het vrije uiteinde B is de ligger belast met een verticale kracht $F = 500 \text{ N}$ aangrijpend in het zwaartepunt van het profiel. Het profiel is als dunwandig te beschouwen.

Gevraagd:

- Teken het normaalspanningsdiagram in de normaaldoorsnede ter plaatse van de inklemming. Geef tekens en waarden.
- Bepaal de ligging van het *dwarskrachtencentrum* D.C. en bepaal vervolgens het wringend koppel in deze normaaldoorsnede?
- Bereken de verplaatsing van het punt Z van doorsnede B
- Bereken de maximale schuifspanning in een normaaldoorsnede en bepaal de plaats waar deze optreedt.

Vraagstuk 10



Een gelijkbenig hoekstaal 100 / 100 / 10 is uitgekraagd. In het zwaartepunt Z van de einddoorsnede is een rekloze horizontale staaf ZC aangebracht, zodat punt Z alleen verticaal kan bewegen. De verticale puntlast van 1000 N grijpt aan in Z. De doorsnede mag in eerste instantie **NIET** als dunwandig worden beschouwd. Houd in de berekening voor de elasticiteitsmodulus aan $E = 210 \text{ GPa}$.

Gevraagd:

- Bepaal de normaalkracht in staaf ZC zodanig dat staaf AB alleen een verticale verplaatsing ondergaat. TIP : Maak gebruik van de pseudo-belasting.
- Toon aan, dat voor iedere normale doorsnede van A tot B de neutrale lijn horizontaal is.
- Teken het normaalspanningsdiagram t.g.v. het buigend moment voor de doorsnede ter plaatse van de inklemming AD met vermelding van de uiterste waarden.
- Teken het schuifspanningsdiagram behorende bij de over te brengen dwarskracht. Voor de bepaling van de schuifspanningen mag het profiel **WEL** als dunwandig worden beschouwd.
- Bepaal de grootte van het wringend moment dat de doorsnede over moet brengen.

2.3 Normalspanningen bij buiging met normaalkracht

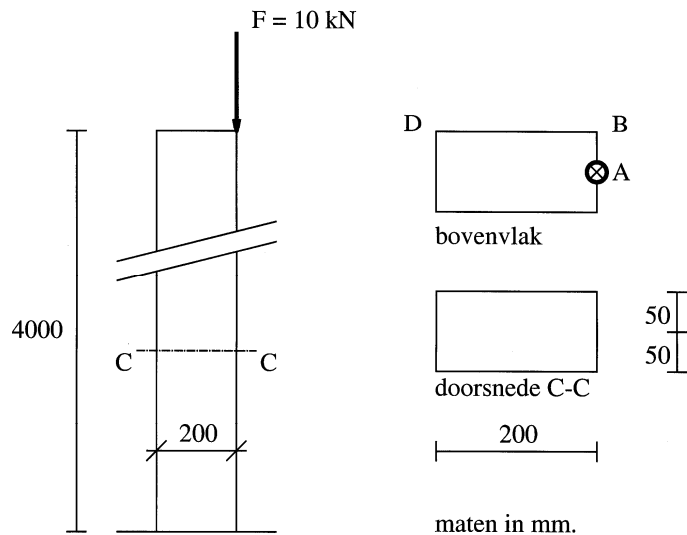
De hieronder weergegeven opgaven hebben betrekking op niet-symmetrische doorsneden die belast worden op zowel buiging als normaalkracht.

Vraagstuk 1

Een kolom wordt excentrisch belast zoals aangegeven in de figuur.

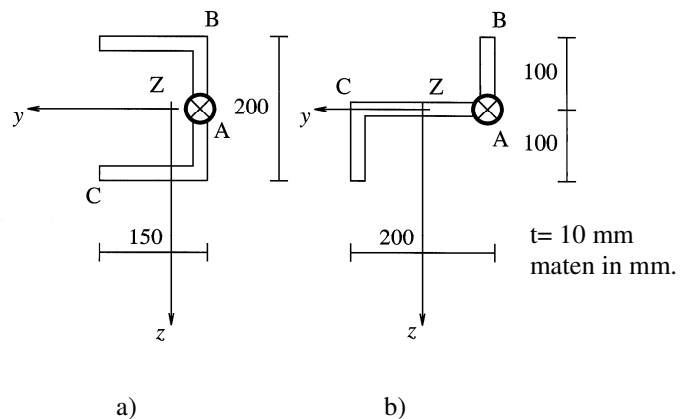
Gevraagd:

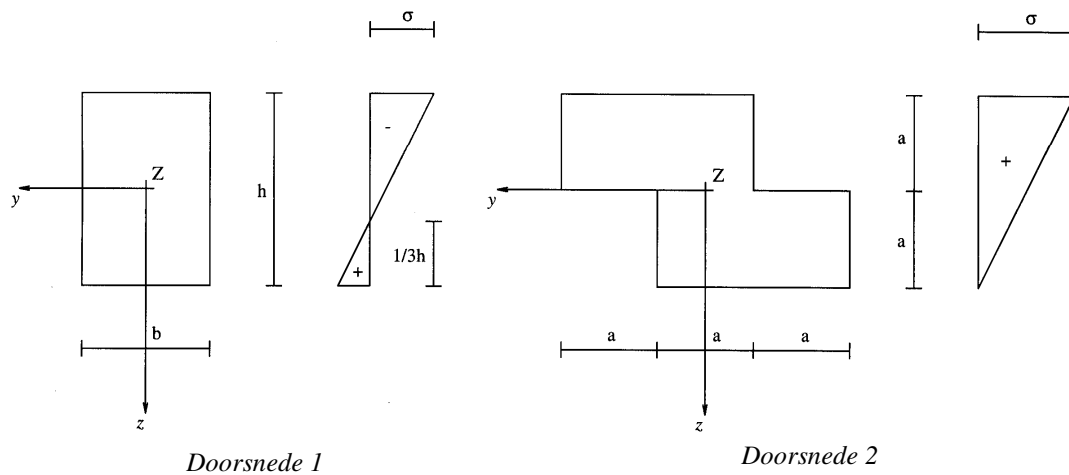
- Bereken de verdeling van de normalspanningen over de doorsnede C-C als $F = 10 \text{ kN}$ aangrijpt in punt A van het bovenzvlak.
- Idem, als F aangrijpt in punt B van het bovenzvlak.



Vraagstuk 2

Beantwoord de vraagstelling van de vorige vraag als de kolom een dunwandige profieldoorsnede heeft zoals in de tekening is aangegeven.



Vraagstuk 3

De getekende doorsneden moeten elk een normaalkracht overbrengen. Gegeven zijn de normaalspanningverdelingen.

Gevraagd:

- Bepaal de grootte van de normaalkracht
- Bepaal de ligging van het krachtpunt in de doorsnede.

2.4 Inhomogene doorsneden belast op normaalkracht

Vraagstuk 1

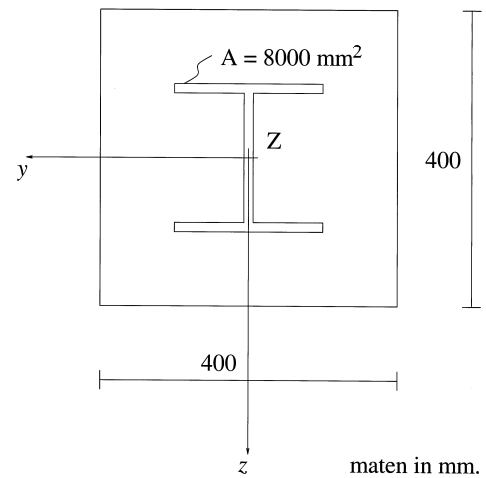
Een betonnen kolom van 4 m lengte is gewapend met een stalen HEA-profiel. De kolom moet een drukkracht van 160 kN overbrengen.

$$E_{st} = 200 \text{ GPa} \quad E_b = 14 \text{ GPa}$$

Gevraagd:

- De verdeling van de normaalspanningen over de doorsnede
- De verkorting van de kolom
- Bepaal de toelaatbare drukkracht op de kolom als

$$\bar{\sigma}_{\text{beton}} = 10 \text{ MPa} \quad \text{en} \quad \bar{\sigma}_{\text{staal}} = 160 \text{ MPa}$$



Vraagstuk 2

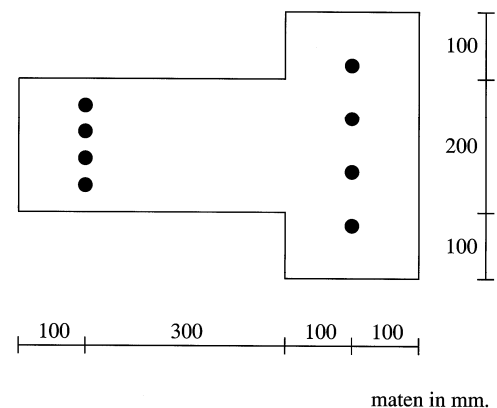
Getekende doorsnede van beton is gewapend met 8 stalen staven $\varnothing 25$.

$$E_s = 210 \text{ GPa} \quad E_b = 14 \text{ GPa}$$

De toelaatbare spanningen in het beton en het staal zijn 10 MPa resp. 160 MPa.

Gevraagd:

- De toelaatbare drukkracht op de kolom
- Het aangrijpingspunt van deze drukkracht voor het geval geen buiging optreedt



Vraagstuk 3

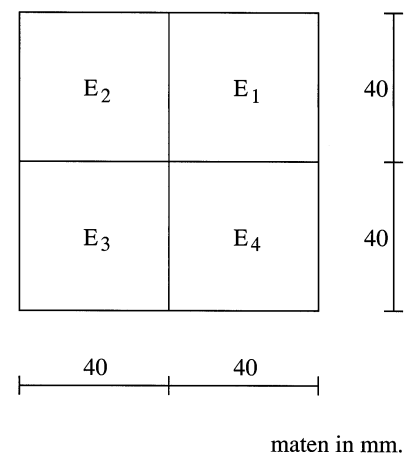
Een kolom met lengte $l = 3 \text{ m}$ met vierkante doorsnede is opgebouwd uit vier vierkanten van $40 \times 40 \text{ mm}^2$ van verschillende materialen.

$$E_1 = 30 \text{ GPa} \quad E_3 = 100 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 60 \text{ GPa} \quad E_4 = 200 \text{ GPa}$$

Gevraagd:

- Bepaal het elastisch zwaartepunt van deze inhomogene doorsnede
- Als voor alle materialen de toelaatbare drukspanning is 100 MPa wat is dan de grootste toelaatbare drukkracht F aangrijpend in het elastisch zwaartepunt?



2.5 Inhomogene doorsneden belast op buiging

Vraagstuk 1

Een houten ligger, lang 6 m wordt op verschillende wijzen versterkt met stalen strippen die zo zijn bevestigd dat hout en staal als een geheel samenwerken.

$$E_h = 15 \text{ GPa} \quad E_{st} = 210 \text{ GPa}$$

$$\bar{\sigma}_h = 7 \text{ MPa} \quad \bar{\sigma}_{st} = 140 \text{ MPa}$$

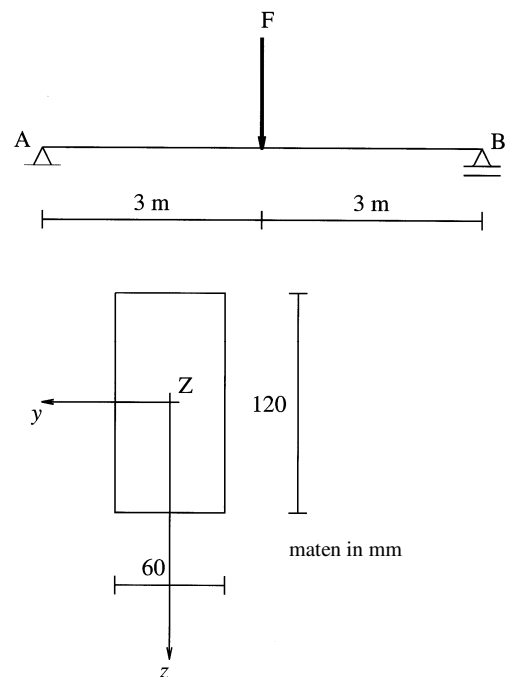
Gevraagd:

Bepaal de toelaatbare last F als:

a) De houten ligger niet versterkt wordt

Als de ligger wel versterkt wordt met:

- b) Twee platen van $120 \times 10 \text{ mm}$ aan de zijkanten,
- c) Een strip van $60 \times 10 \text{ mm}$ aan de bovenkant,
- d) Twee strippen $60 \times 10 \text{ mm}$, één aan de boven en één aan de onderkant



Vraagstuk 2

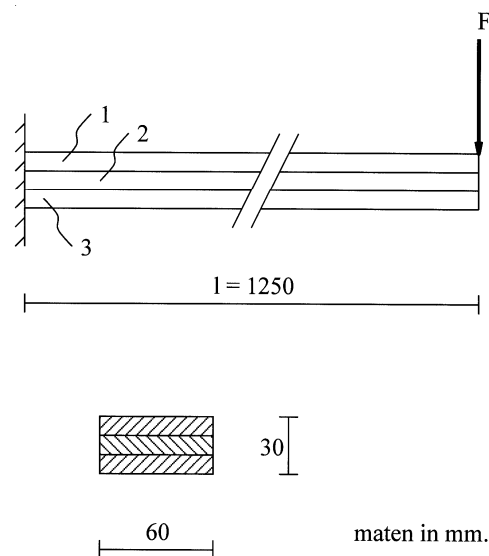
Een uitgekraagde ligger is opgebouwd uit 3 strippen $60 \times 10 \text{ mm}^2$, zodanig aan elkaar verbonden dat ze ten opzichte van elkaar niet kunnen verschuiven.

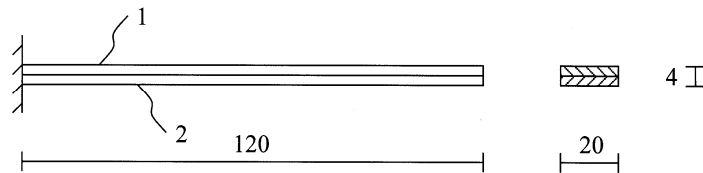
$$F = 500 \text{ N} \quad E_1 = 60 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 80 \text{ GPa} \quad E_3 = 100 \text{ GPa}$$

Gevraagd:

Bepaal het spanningsdiagram van de doorsnede bij de inklemmingsdoorsnede.



Vraagstuk 3

Een staaf bi-metaal, opgebouwd uit strips van $2 \times 20 \text{ mm}^2$, van 120 mm lengte ondergaat een temperatuursdaling van 200 K.

$$E_1 = 200 \text{ GPa} \quad \alpha_1 = 12 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

$$E_2 = 67 \text{ GPa} \quad \alpha_2 = 15 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

Gevraagd:

De spanningsverdeling over een doorsnede.

Vraagstuk 4

Een betonnen kolom is aan de korte zijde gewapend met

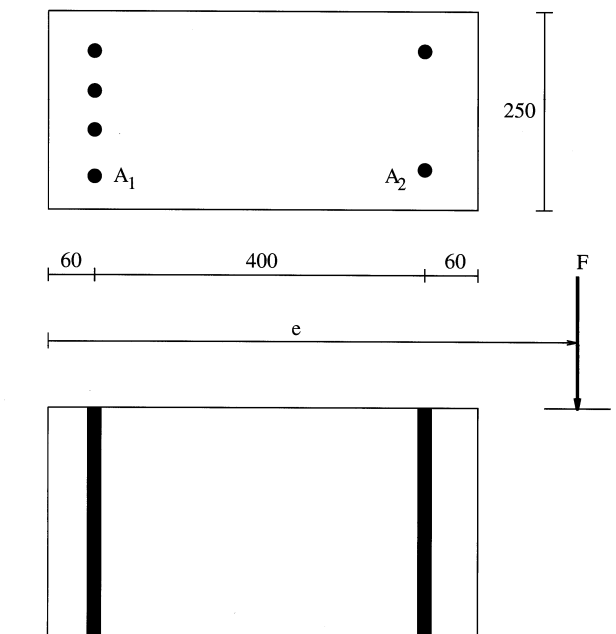
$$A_1 = 1000 \text{ mm}^2 \text{ resp. } A_2 = 500 \text{ mm}^2.$$

In de wapening met A_1 is een trekspanning aanwezig van 20 MPa en in A_2 een drukspanning van 60 MPa. In het getrokken gebied is het beton gescheurd verondersteld.

$$\frac{E_{st}}{E_b} = 15$$

Gevraagd:

- bepaal de grootte van de excentrische kracht F .
- bepaal de afstand e (t.o.v. links) van het krachtpunt.

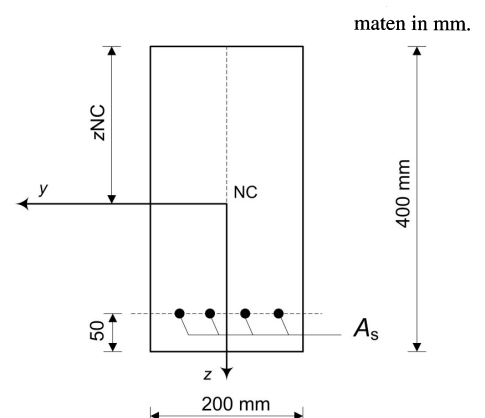
**Vraagstuk 5**

Een ligger $200 \times 400 \text{ mm}^2$ van een materiaal met elasticiteitsmodulus 14 GPa wordt versterkt door een stalen wapening ($E_{staal} = 210 \text{ GPa}$) op een afstand van 50 mm van de onderkant. De oppervlakte A_s van de wapening is 4800 mm^2 .

Gevraagd:

De verdeling van de normaalspanningen bij zuivere buiging in het x - z -vlak ten gevolge van een positief buigend moment van 20 kNm. Neem een volledig elastische doorsnede aan.

Dit vraagstuk heeft een vervolg in vraagstuk 6.



Vraagstuk 6

Als de ligger uit de vorige opgave van gewapend beton is, moet er rekening gehouden worden met het feit dat het beton nauwelijks trek kan opnemen. Veelal stelt men daarom dat het beton in de trekzône als het ware volledig gescheurd is, en verwaarloost men zo de trekspanningen in het beton. Bepaal in dat geval de verdeling van de normaalspanningen.

2.6 Kern

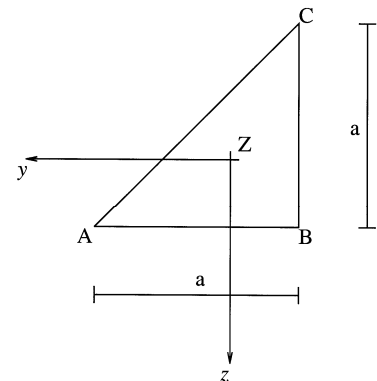
Vraagstuk 1

Bepaal de kern van de getekende doorsnede:

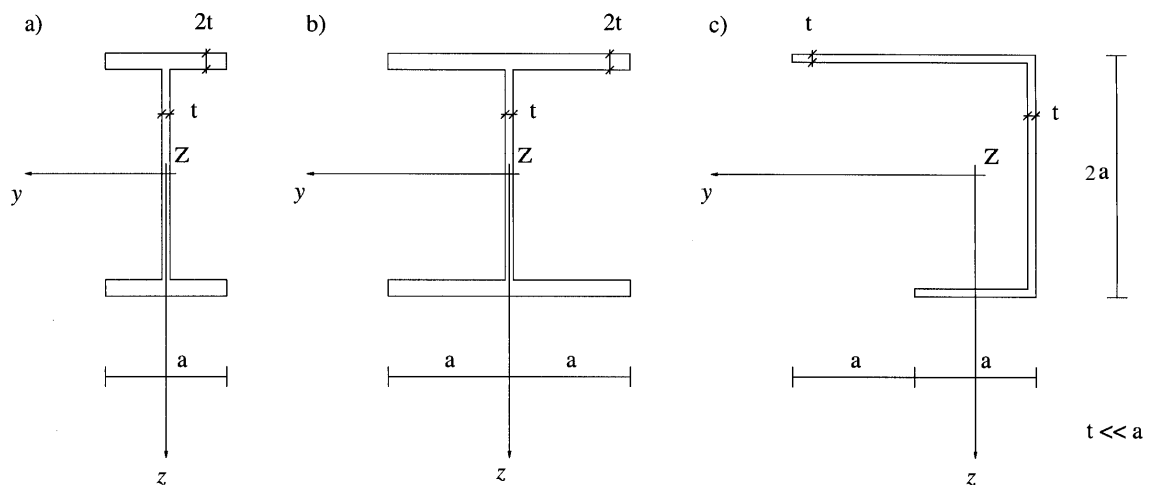
- analytisch
- grafisch

Bepaal verder:

- de in de hoekpunten A, B en C optredende spanningen ten gevolge van een buigend moment $M_y = M$
- de krachtlijn wanneer de neutrale lijn samenvalt met de y-as.

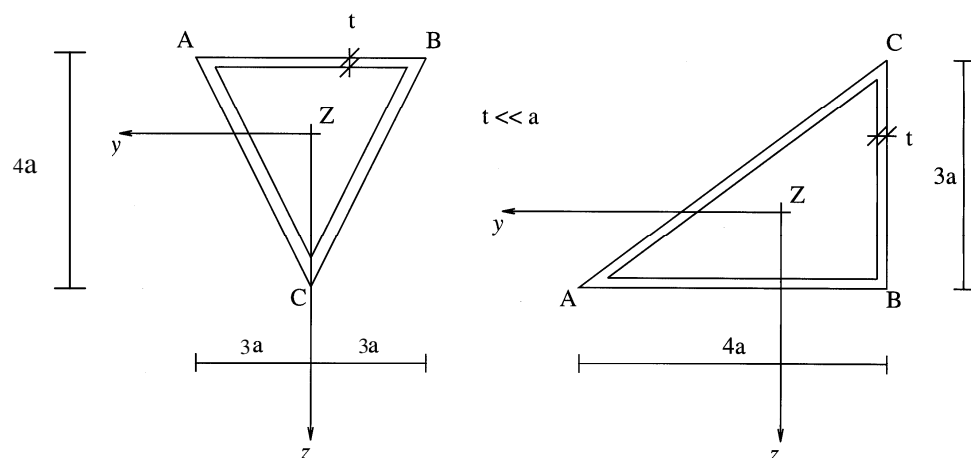


Vraagstuk 2



Bepaal van de drie hier getekende doorsneden de kern.

Vraagstuk 3



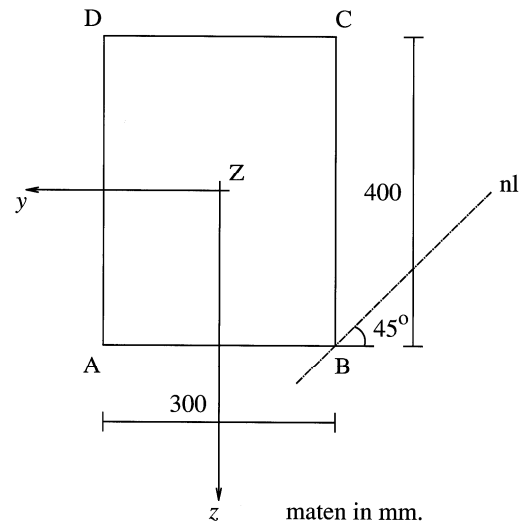
- Bepaal voor de gegeven doorsneden de kern.
- Bepaal verder de spanningsverdeling als de doorsnede belast wordt met een drukkracht in A.

Vraagstuk 4

De gegeven doorsnede brengt een normaalkracht (druk) van 100 kN over.

Gevraagd:

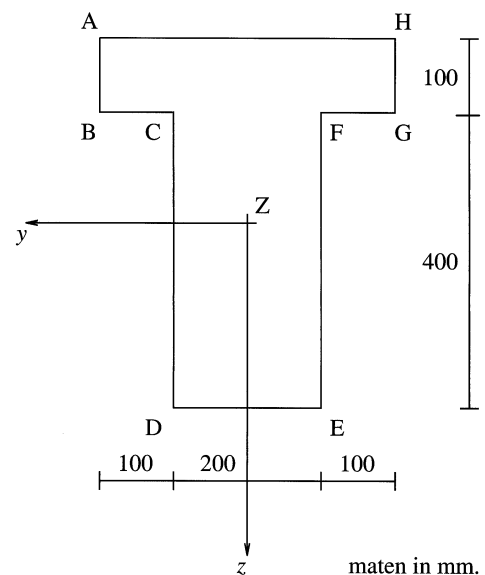
- bepaal de ligging van het krachtpunt
- teken het spanningsdiagram

**Vraagstuk 5**

Het getekende profiel is de normaaldoorsnede van een aan beide zijden vrij opgelegde betonnen balk met lengte l die wordt belast met een variabele gelijkmatig verdeelde belasting.

Geef aan, hoe in deze balk voorspankabels moeten worden gelegd, opdat het opneembare buigend moment zo groot mogelijk zal zijn.

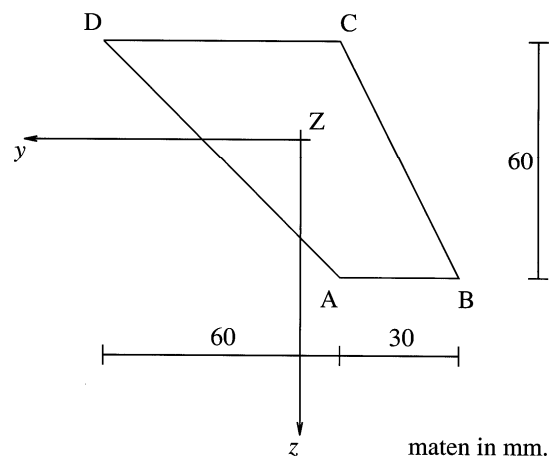
$$l = 8 \text{ m}$$

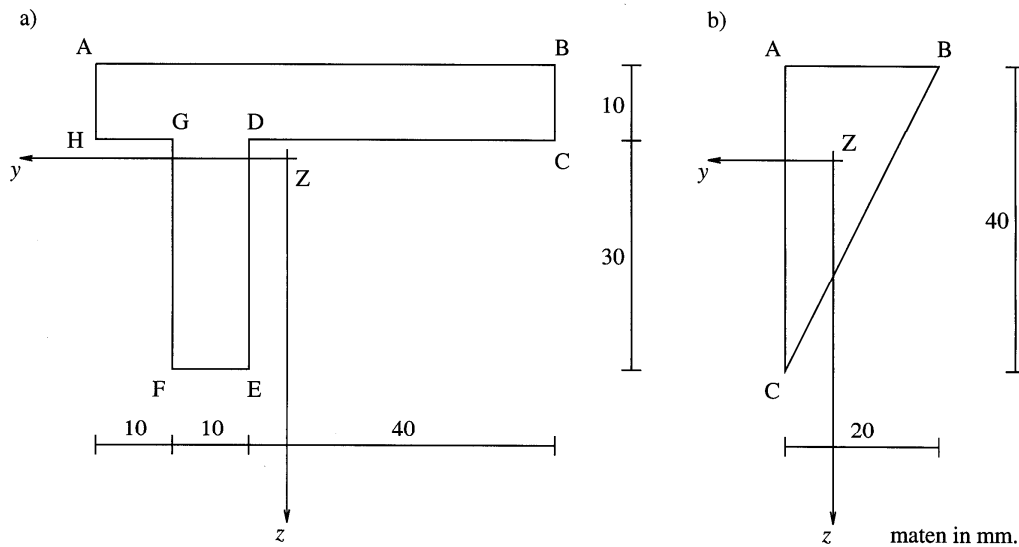
**Vraagstuk 6**

De getekende doorsnede brengt een buigend moment $M_z = 150 \text{ kNm}$ over.

Gevraagd:

- bepaal de kern van deze doorsnede
- teken het normaalspanningsdiagram met waarden en tekens
- voor welke richting van de krachtlijn is de doorbuigingsrichting vertikaal?



Vraagstuk 7

Twee liggers:

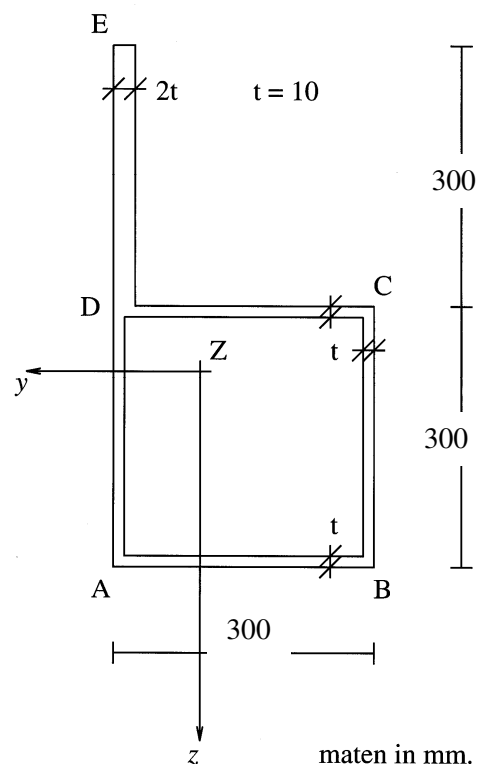
- Bepaal de buigspanningen optredend in de middendoorsneden van twee vrij opgelegde liggers belast met een gelijkmatig verdeelde verticale belasting van 2 kN/m. De lengte van de liggers is 2 meter en de normaaldoorsneden van de liggers zijn volgens de getekende profielen a en b.
- Hoe moeten de liggers om hun as gedraaid worden, opdat de optredende buigspanningen minimaal zijn?
- Hoe moeten de liggers om hun as gedraaid worden, opdat de doorbuigingsrichting verticaal is?

Vraagstuk 8

Een holle dunwandige kolom heeft een dwarsdoorsnede zoals getekend.

Gevraagd:

- Bepaal de traagheidsgrootheden voor het gegeven assenstelsel door het zwaartepunt
- teken de kern van deze doorsnede
- als gegeven is dat de neutrale lijn ten gevolge van een normaalkracht van 2 kN samenvalt met AE, schets dan het spanningsdiagram en bepaal de ligging van het krachtpunt



2.7 Schuifspanningen bij buiging

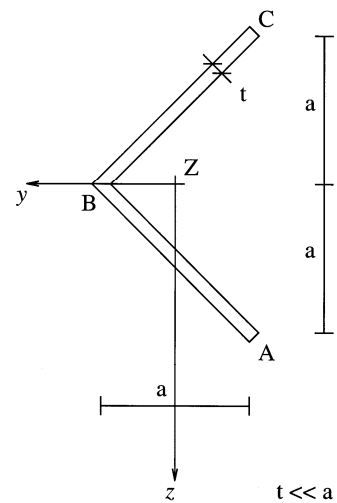
Vraagstuk 1

Gegeven: een ligger met een profiel zoals getekend moet een verticaal naar beneden gerichte dwarskracht Q overbrengen.

Gevraagd:

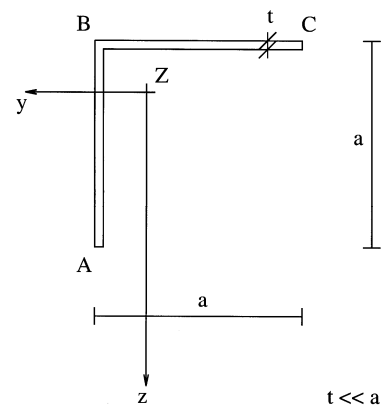
De verdeling van de schuifspanning te bepalen

Wat is de werklijn van Q , opdat geen wringing optreedt?



Vraagstuk 2

Beantwoord de vorige vragen van de hiernaast getekende doorsnede

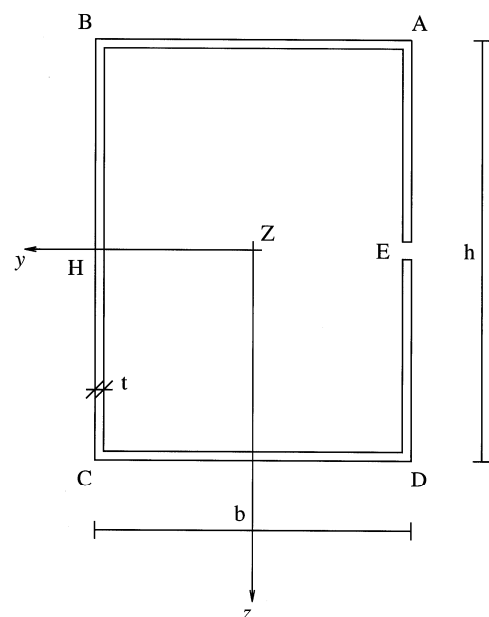


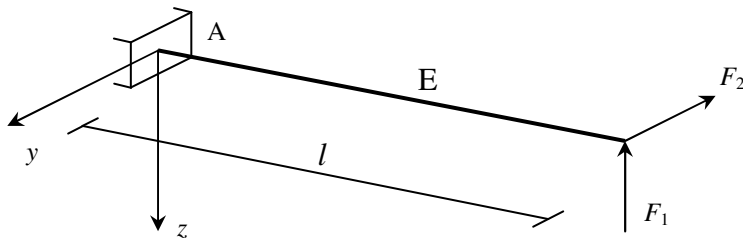
Vraagstuk 3

Het getekende profiel moet een verticale dwarskracht Q zonder wringing overbrengen. ($t \ll h$, $b = 2/3 \times h$)

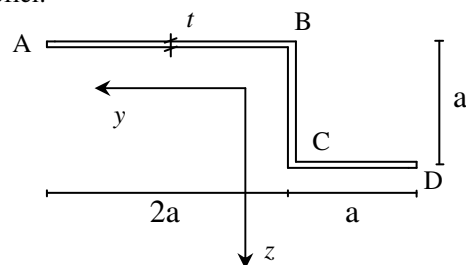
Gevraagd:

- Bepaal de werklijn van Q
- Bepaal het verloop en de richting van de schuifspanningen in de doorsnede



Vraagstuk 4

Dwarsdoorsnede profiel:



Een uitkragende balk met een dunwandige doorsnede is belast door twee krachten F_1 en F_2 , zoals aangegeven in de figuur.

Gegeven:

$$F_1 = F$$

$$F_2 = 2F$$

Gevraagd:

Bepaal de verdeling van de schuifspanning in doorsnede A.