

Hertentamen CT3109

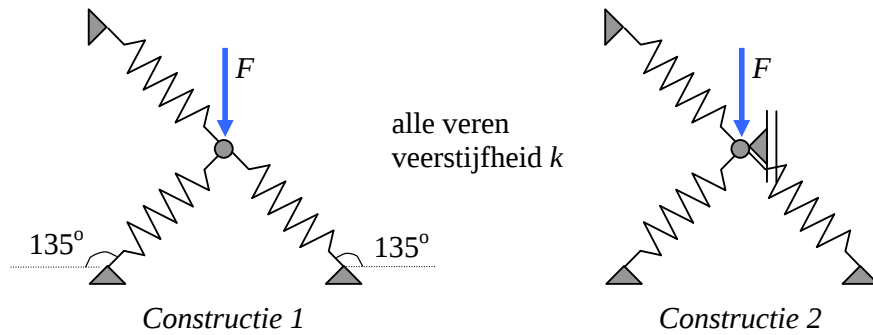
CONSTRUCTIEMECHANICA 4

1 jul 2009,
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 4 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons en UMTS tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan
- Maak zonodig gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Aangegeven tijd per vraagstuk zijn richttijden

OPGAVE 1 : Arbeid en Energie**(ca 45 min)**

In de onderstaande figuur zijn twee veerconstructies getekend belast met alleen een verticale last F . Constructie 1 bestaat uit drie veren, allen onder 45° en met veerstijfheid k , die het verticaal belaste punt steunen. Constructie 2 is gelijk aan 1 alleen wordt het belaste punt ook nog in horizontale richting gesteund. Dit is aangegeven met een verticale roloplegging.



Gegevens : $k = 3000 \text{ kN/m}$;

Vragen:

- a) Toon aan dat de vormveranderingsenergie in een veer uitgedrukt in de veerstijfheid k en de lengteverandering Δl gelijk is aan:

$$E_v = \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

- b) Bepaal m.b.v. Castigliano voor constructie 1 en 2 de *effectieve verticale stijfheid* gedefinieerd als het quotiënt van de verticale belasting F en de daardoor optredende verticale verplaatsing w :

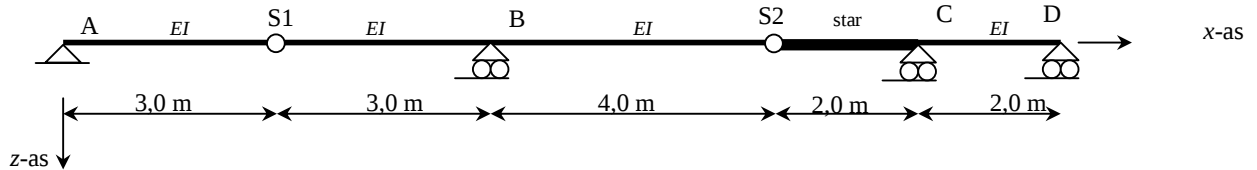
$$k_{\text{eff}} = \frac{F}{w}$$

OPGAVE 2 : Invloedslijnen**(ca 30 min)**

Deze opgave bestaat uit twee delen.

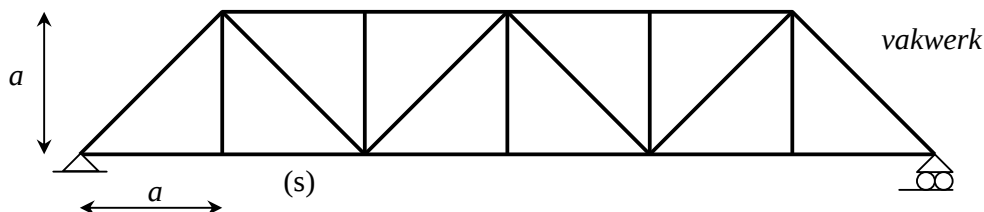
Deel 1 : basiskennis

Hieronder is een liggerconstructie gegeven. De ligger heeft twee scharnieren S1 en S2. Het liggerdeel S2-C is star. Maak voor dit deel gebruik van het antwoordformulier op de volgende bladzijde.

**Vragen:**

- Construeer de invloedslijn voor het liggermoment in B.
- Construeer de invloedslijn voor de oplegreactie in C.
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht direct rechts van A.
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht direct links van B.
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht in S2.
- Schets de invloedslijn voor de zakking van scharnier S2.
- Waar moet een gelijkmatig verdeelde belasting q van 5 kN/m worden geplaatst opdat het liggermoment in B maximaal is en hoe groot is dit maximale moment ?

Let op : Construeren houdt in dat de invloedslijn ook kwantitatief moet worden bepaald, schetsen houdt in dat de invloedslijn kwalitatief moet worden bepaald waarbij duidelijk moet worden aangegeven of lijnen recht of gekromd zijn.

Deel 2 : applicatie van de theorie

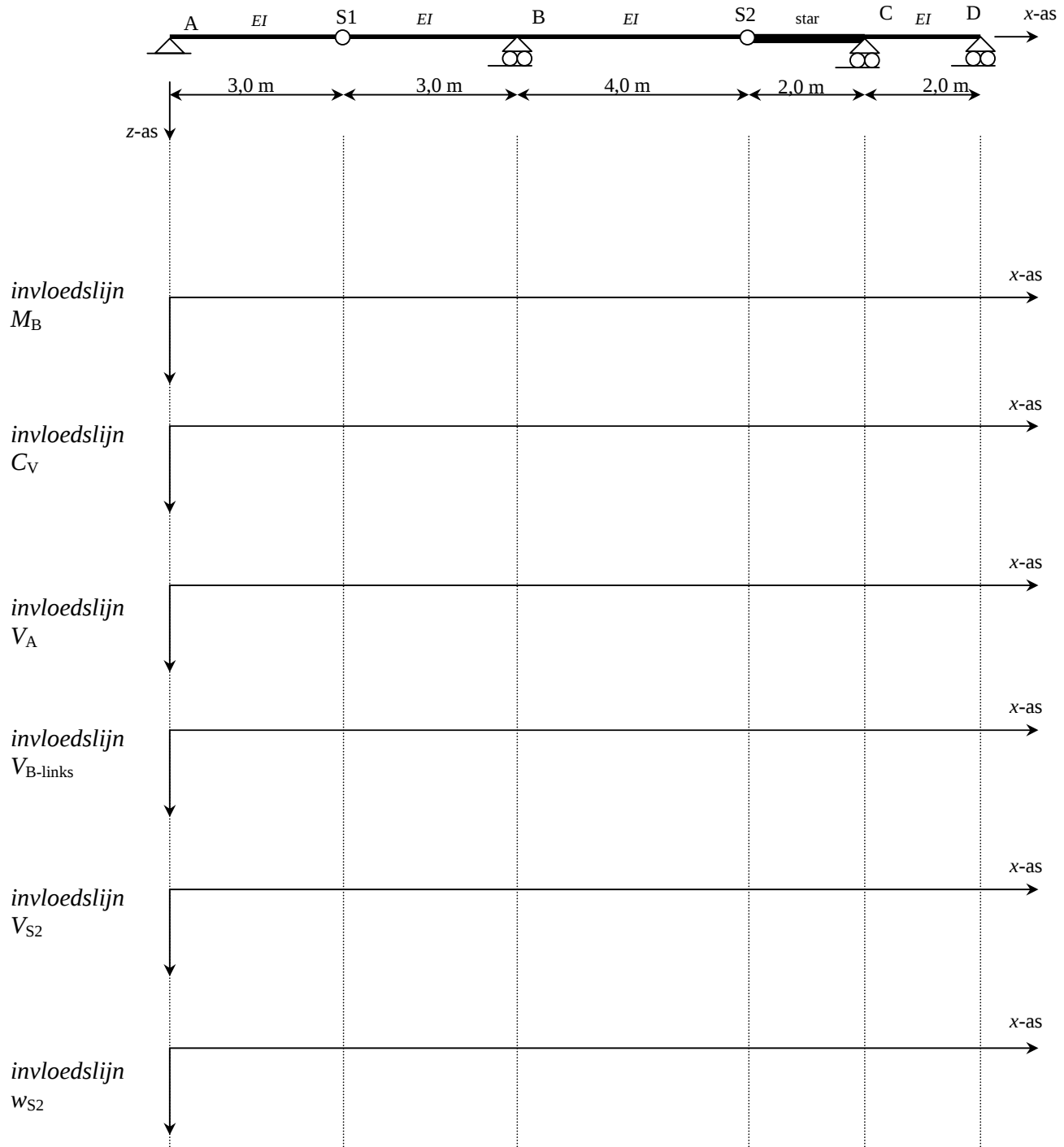
- Construeer de invloedslijn voor de normaalkracht in staaf (s) van het hierboven weergegeven vakwerk

NAAM :

Studienr:

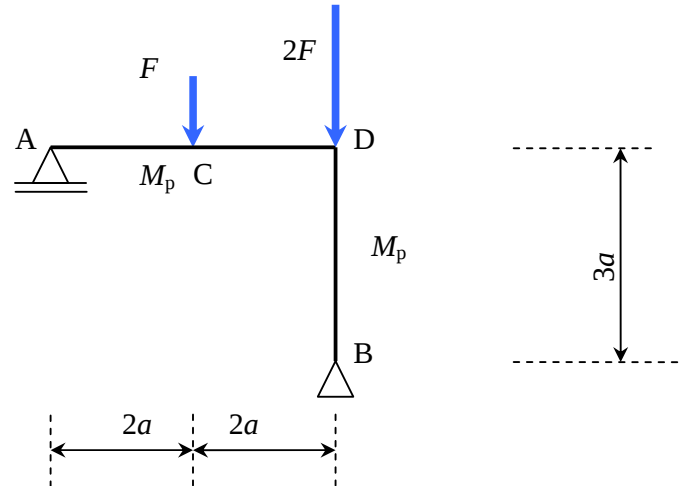
UITWERKINGSBLAD

**SCHEUR DIT BLAD UIT
HET TENTAMEN EN
LEVER DIT IN MET UW
WERK. Vergeet niet uw naam!**

OPGAVE 2 deel 1 : basiskennis

OPGAVE 3 : Plasticiteit en bezwijkanalyse**(ca 30 min)**

Hieronder is een raamwerk getekend waarvan de bezwijklast moet worden bepaald. De staafdelen hebben de in de figuur aangegeven sterkte.

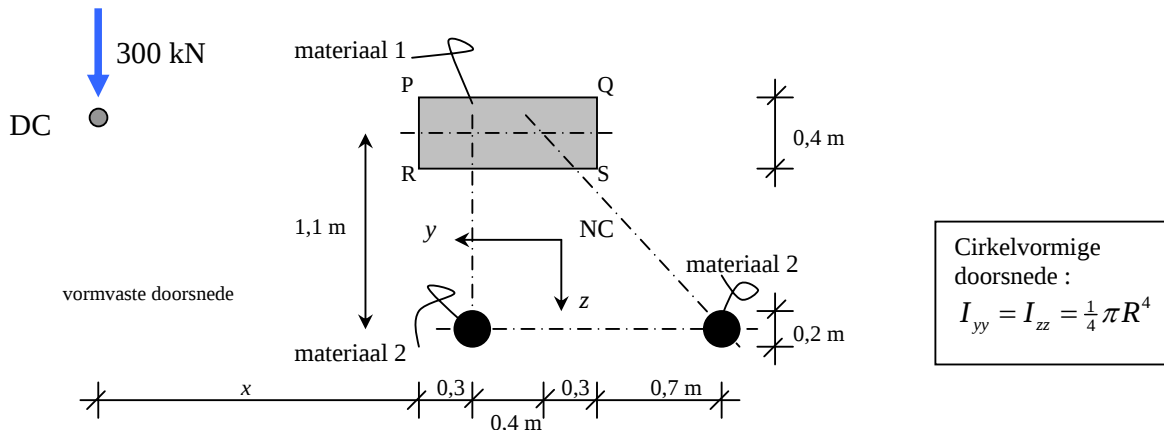
**Vragen :**

- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen en geef deze met schetsjes weer.
- Bepaal de bezwijkbelasting F_p .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.
- Er wordt voorgesteld, ten einde de bezwijklast te verhogen, het deel BD sterker te maken. Is dit naar Uw mening zinvol? (voorzie uw antwoord uiteraard met een argumentatie!)

OPGAVE 4

(ca 45 min)

Een statisch bepaalde ligger heeft een samengestelde (educatieve) doorsnede zoals in de figuur is aangegeven. De doorsnede bestaat uit twee materialen. Materiaal 2 is geconcentreerd in twee cirkelvormige doorsneden die elk vormvast zijn en onderdeel uitmaken van de complete vormvaste doorsnede. De doorsnede wordt in het *dwarskrachtencentrum* DC belast met een puntlast van 300 kN in de lokale z-richting van een y-z-assenstelsel dat zijn oorsprong heeft in het *normaalkrachtencentrum* NC. De doorsnede wordt belast op een moment $M_z = 4500$ kNm



Gegevens:

materiaal 1 : $f_y = 35$ N/mm² ; $E = 30 \times 10^3$ N/mm²materiaal 2 : $f_y = 360$ N/mm² ; $E = 2,0 \times 10^5$ N/mm²

Merk op : De verbinding tussen materiaal 1 en 2 is niet getekend. U mag ervan uitgaan dat in langsrichting de delen op regelmatige afstand met elkaar worden verbonden door afstandhouders die zodanig stijf zijn dat er een vormvaste doorsnede ontstaat.

Vragen:

- Wat is de definitie van het *normaalkrachtencentrum* NC en waar ligt dit punt?
- Wat is het belang van een kracht die aangrijpt in het *dwarskrachtencentrum* DC en is dat in de praktijk ook realistisch?
- De absolute waarden van de elementen van de buigstijfheidstensor zijn hieronder gegeven. Toon de onderstaande waarden aan en geef aan wat het bijbehorende teken moet zijn:

$$3376,08 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2; \quad 7618,79 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2; \quad 8723,52 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2;$$

Merk op: Gezien de grilligheid van de doorsnede zullen de uitkomsten geen afgeronde getallen zijn. Werk dus zo lang mogelijk met niet afgeronde getallen en rond pas het eindantwoord af.

- Teken in één figuur de ligging van het NC, het krommingsvlak k , het belastingsvlak m en de *neutrale lijn*.
- Zal de doorsnede roteren om de ligger-as?
- Treedt er wringing op in deze doorsnede?
- Bepaal de normaalspanningsverdeling over de **bovenrand PQ van materiaal 1** en teken deze.
- Bepaal de langskracht per eenheid van lengte die moet worden overgedragen in het vlak van de verbinding tussen materiaal 1 en 2 juist aan de **onderzijde RS van materiaal 1**.

FORMULEBLAD

Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en: } \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} \begin{bmatrix} EI_{zz} & -EI_{yz} \\ -EI_{yz} & EI_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of: } s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xm} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \varepsilon$$

$$M = EI \kappa$$

Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

Hulpmiddelen bij het integreren van producten van functies e.d. :

M				
	$\frac{1}{3} jkl$	$\frac{1}{6} jkl$	$\frac{1}{6} (j_1 + 2j_2) kl$	$\frac{1}{2} jkl$
	$\frac{1}{6} jkl$	$\frac{1}{3} jkl$	$\frac{1}{6} (2j_1 + j_2) kl$	$\frac{1}{2} jkl$
	$\frac{1}{6} j(k_1 + 2k_2) l$	$\frac{1}{6} j(2k_1 + k_2) l$	$\frac{1}{6} \{j_1(2k_1 + k_2) + j_2(k_1 + 2k_2)\} l$	$\frac{1}{2} j(k_1 + k_2) l$
	$\frac{1}{2} jkl$	$\frac{1}{2} jkl$	$\frac{1}{2} (j_1 + j_2) kl$	jkl
	$\frac{1}{6} jk(l+a)$	$\frac{1}{6} jk(l+b)$	$\frac{1}{6} \{j_1(l+b) + j_2(l+a)\} k$	$\frac{1}{2} jkl$
	$\frac{5}{12} jkl$	$\frac{1}{4} jkl$	$\frac{1}{12} (3j_1 + 5j_2) kl$	$\frac{2}{3} jkl$
	$\frac{1}{4} jkl$	$\frac{5}{12} jkl$	$\frac{1}{12} (5j_1 + 3j_2) kl$	$\frac{2}{3} jkl$
	$\frac{1}{4} jkl$	$\frac{1}{12} jkl$	$\frac{1}{12} (j_1 + 3j_2) kl$	$\frac{1}{3} jkl$
	$\frac{1}{12} jkl$	$\frac{1}{4} jkl$	$\frac{1}{12} (3j_1 + j_2) kl$	$\frac{1}{3} jkl$
	$\frac{1}{3} jkl$	$\frac{1}{3} jkl$	$\frac{1}{3} (j_1 + j_2) kl$	$\frac{2}{3} jkl$

(1)		$\theta_2 = \frac{TL}{EI}; \quad w_2 = \frac{TL^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{FL^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{FL^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{TL}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{TL}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{TL^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{FL^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{FL^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{TL}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{TL}{EI}; \quad w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

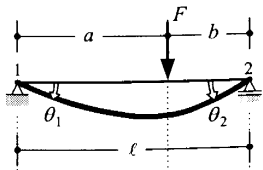
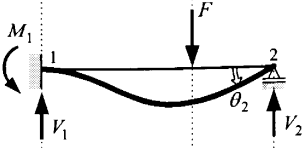
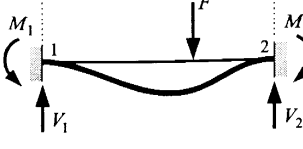
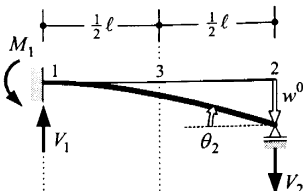
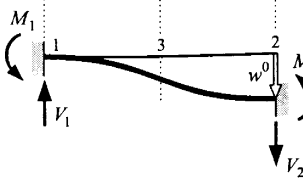
vergeet-mij-nietjes

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{TL}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{32} \frac{TL^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{FL^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{7}{768} \frac{FL^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} FL; \quad V_1 = \frac{11}{16} F; \quad V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; \quad V_1 = \frac{5}{8} q\ell; \quad V_2 = \frac{3}{8} q\ell$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{FL^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} FL; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$
(b)		$\theta_3 = \frac{1}{16} \frac{TL}{EI}; \quad w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

Enkele formules voor prismaïsche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppell, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fb(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{2\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{2\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fb^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

zettingen