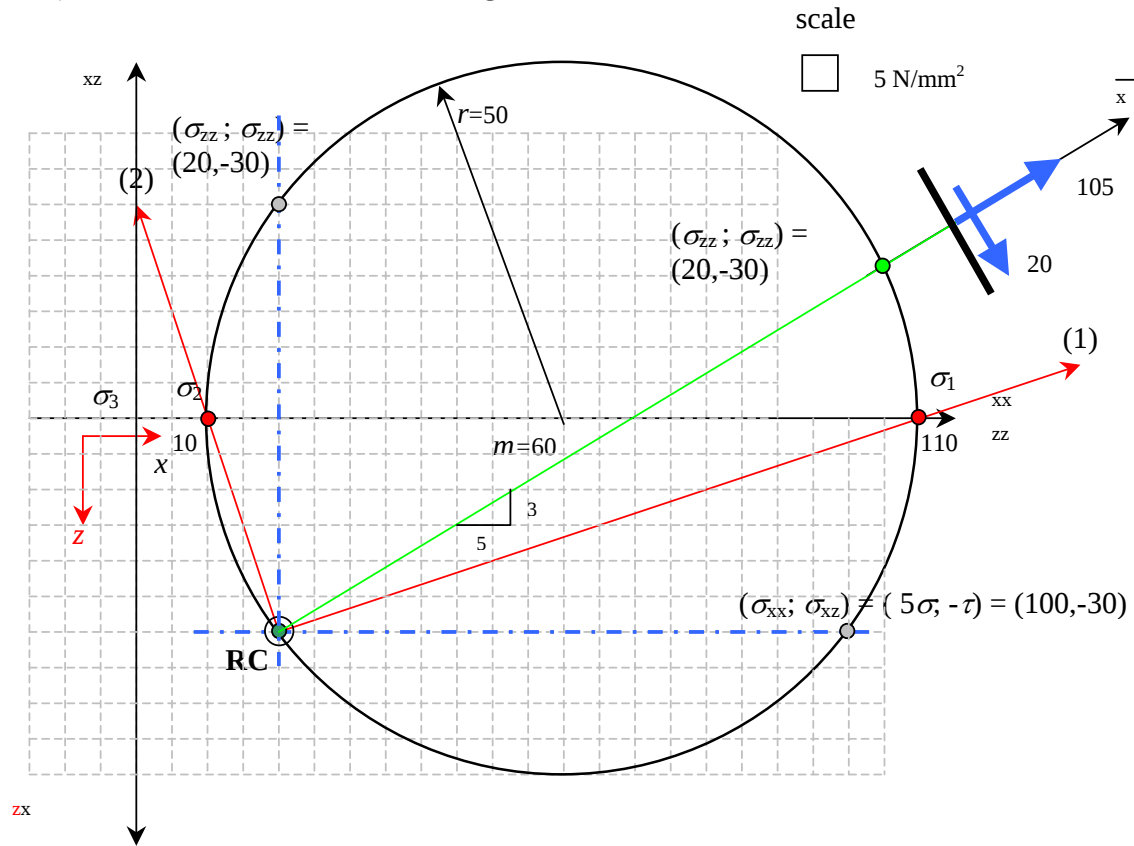


ANTWOORDEN

OPGAVE 1

- Voor theorievragen zie de leermiddelen.
- De cirkel van Mohr is hieronder getekend.



Figuur 1.1 : *Cirkel van Mohr voor de spanningen*

- c) Zie bovenstaande figuur. De normaalspanning is 105 N/mm^2 en de schuifspanning is 20 N/mm^2 met de in de figuur aangegeven richtingen
- d) De Huber-Hencky formule is een speciale toepassing van het von Mises vloeicriterium dat geldt voor spanningen in liggers die volgens het liggermodel zijn bepaald. In dit model worden geen normaalspanningen in verticale richting meegenomen. De gegevens spanningssituatie voldoet hier niet aan. Dit criterium mag dan ook zo niet worden gebruikt. **Het is dus fout om te constateren:**

$$\sqrt{100^2 + 3 \times 30^2} > 110 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{bezwijken})$$

- e) De hoofdspansingen zijn in de bovenstaande figuur weergegeven. hoofdspansingen kunnen worden afgelezen en zijn:

$$\sigma_1 = m + r = 60 + 50 = 110 \text{ N/mm}^2; \sigma_2 = m - r = 10 - 50 = -40 \text{ N/mm}^2; \sigma_3 = 0 \text{ N/mm}^2$$

Controle volgens von Mises levert:

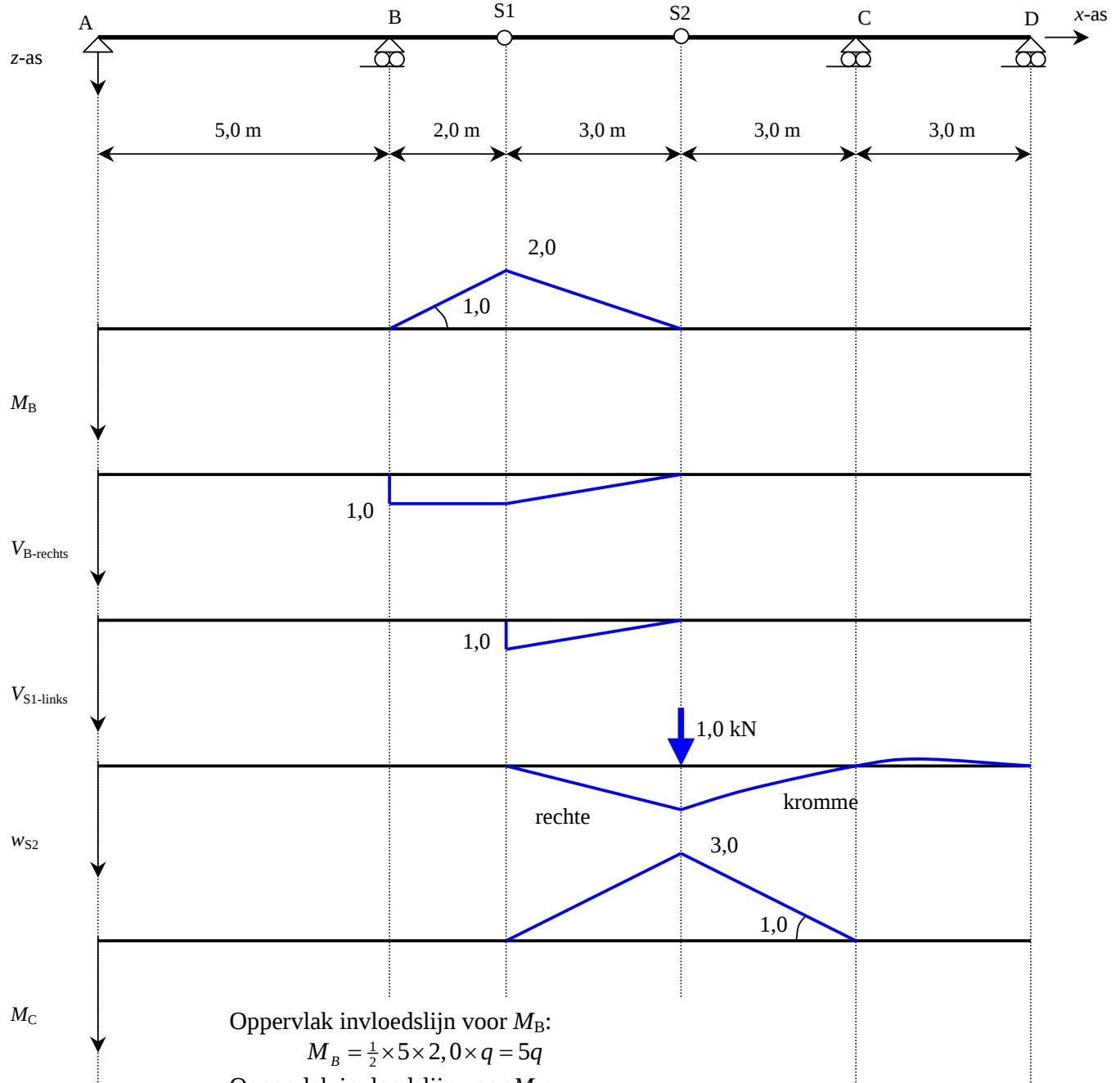
$$\frac{1}{6} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right) \leq \frac{1}{3} f_y^2$$

$$\frac{1}{6} \left((110-10)^2 + (10)^2 + (110)^2 \right) \leq \frac{1}{3} \times 110^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3700 \leq 4033\frac{1}{3} \quad \gamma = 1,04 \text{ OK}$$

Volgens von Mises treedt er **geen bezwijken** op.

OPGAVE 2

deel 1:



Oppervlak invloedslijn voor M_B :

$$M_B = \frac{1}{2} \times 5 \times 2,0 \times q = 5q$$

Oppervlak invloedslijn voor M_C :

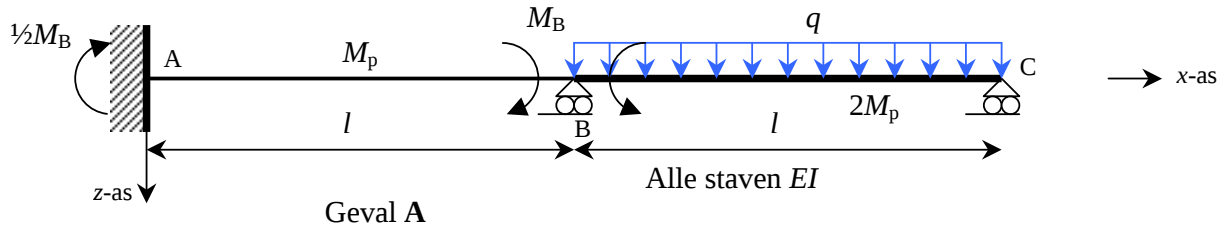
$$M_C = \frac{1}{2} \times 6 \times 3,0 \times q = 9q$$

Maximaal steunpuntsmoment voor C indien $S1$ -C is belast.

deel 2: Zie voorbeeld dictaat.

OPGAVE 3

- a) Daar waar het maximale moment de sterkte overschrijdt zal voor het eerst een plastisch scharnier ontstaan. Er zijn drie punten om te controleren, de inklemming A, het steunpunt B en het maximum veldmoment "ergens" tussen B en C.



De constructie is twee-voudig statisch onbepaald maar met de voorkennis van S.O. constructies is bekend dat het inklemmingsmoment in A de helft is van het steunpuntsmoment in B. Hiermee laat zich de krachtsverdeling in de elastische fase eenvoudig bepalen door de onderstaande vormveranderingsvoorwaarde voor de rotatie in B op te lossen:

$$\frac{-M_B \times l}{3EI} + \frac{\frac{1}{2} M_B \times l}{6EI} = \frac{M_B \times l}{3EI} - \frac{q \times (l)^3}{24EI} \Leftrightarrow$$

$$M_B = \frac{ql^2}{14} \Rightarrow M_p = \frac{ql^2}{14} \Leftrightarrow q = \frac{14M_p}{l^2}$$

Het (negatieve) inklemmingsmoment in A wordt in grootte:

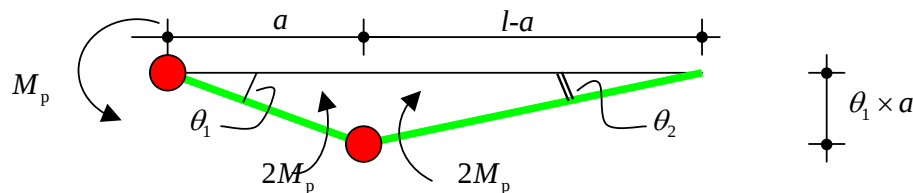
$$M_A = \frac{ql^2}{28} \Rightarrow M_p = \frac{ql^2}{28} \Rightarrow q = \frac{28M_p}{l^2}$$

Het (positieve) veldmoment halverwege BC wordt hiermee in grootte :

$$M_{\text{veld-BC}} = \frac{-ql^2}{28} + \frac{q \times l^2}{8} = \frac{5ql^2}{56} \Rightarrow 2M_p = \frac{5ql^2}{56} \Leftrightarrow q = \frac{22,4M_p}{l^2}$$

Dit veldmoment is niet het maximum veldmoment maar zal er niet ver naast zitten. De maatgevende doorsnede is het steunpunt B, hier zal dus het eerste volplastische scharnier ontstaan (laagste belasting q).

- b) Voor een (partiële) liggermechanisme op deel BC zijn slechts twee scharnieren nodig. De plaats a van het scharnier in het veld BC is onbekend. Bekend is wel dat de laagste bezwijklast maatgevend zal zijn.



De virtuele arbeid die het mechanisme levert moet gelijk zijn aan nul (evenwichtseis), hieruit volgt voor de bezwijkbelasting (let op de bijdrage van de q -last !):

$$-M_p \times \delta\theta_1 - 2M_p \times \delta\theta_1 - 2M_p \times \delta\theta_2 + q \times l \times \frac{1}{2} a \times \delta\theta_1 = 0 \quad \text{met: } \delta\theta_2 = \frac{a}{l-a} \times \delta\theta_1$$

$$q = \frac{6l-2a}{a(l-a)} \times \frac{M_p}{l} \quad (1)$$

De bezwijklast is de kleinste waarde voor q . Er moet dus gezocht worden naar het minimum voor q :

$$\frac{dq}{da} = \frac{-2 \times (a \times (l-a)) - (6l-2a) \times (l-a)}{a^2 \times (l-a)^2} \times \frac{M_p}{l}$$

$$\frac{dq}{da} = 0 \Rightarrow -6l^2 + 12al - 2a^2 = 0$$

$$a_1 = l \times (3 + \sqrt{6}) \quad \vee \quad a_2 = l \times (3 - \sqrt{6})$$

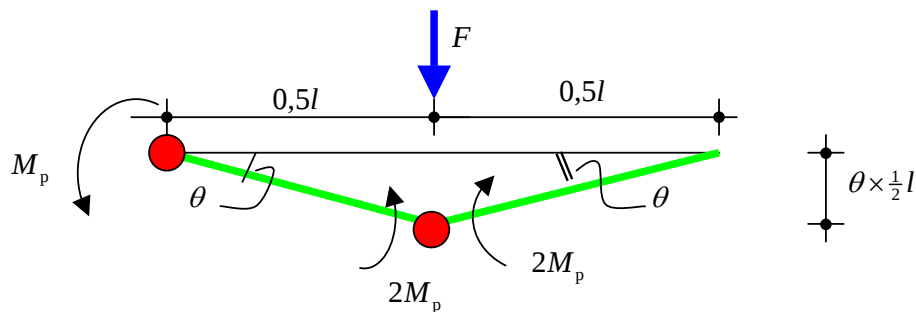
Er is slechts 1 zinvolle oplossing mogelijk:

$$a = l \times (3 - \sqrt{6}) = 0,5505 \times l$$

Met formule (1) is nu de bezwijklast te bepalen:

$$q_p = 19,80 \frac{M_p}{l^2}$$

c) Het bezwijkmechanisme voor deze belasting is op voorhand bekend:



Met behulp van het principe van virtuele arbeid wordt nu gevonden voor de bezwijklast:

$$-M_p \times \delta\theta - 4M_p \times \delta\theta + F \times \frac{1}{2} l \times \delta\theta = 0$$

$$F_p = \frac{10M_p}{l}$$

OPGAVE 4

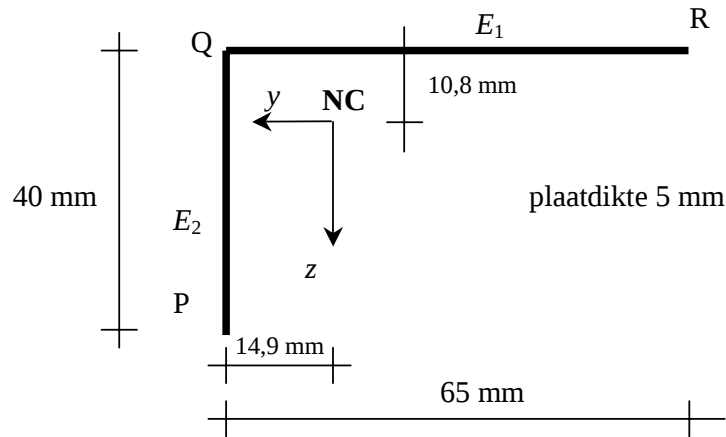
Ten opzichte van de bovenrand QR ligt het NC op:

$$z_{NC} = \frac{E_1 \times 65 \times 5 \times 0 + E_2 \times 40 \times 5 \times 20}{E_1 \times 65 \times 5 + E_2 \times 40 \times 5} = 10,8 \text{ mm}$$

Ten opzichte van de linkerrand PQ ligt het NC op:

$$y_{NC} = \frac{E_1 \times 65 \times 5 \times -32,5 + E_2 \times 40 \times 5 \times 0}{E_1 \times 65 \times 5 + E_2 \times 40 \times 5} = -14,9 \text{ mm}$$

Het NC ligt hiermee 14,9 mm rechts en 10,8 mm onder Q.



Figuur 4.1 : Profiel met ligging van normaalkrachtencentrum

De traagheidsgrootheden kunnen nu worden bepaald t.o.v. het NC:

$$EA = E_1 \times 65 \times 5 + E_2 \times 40 \times 5 = 777,5 \times 10^5 \text{ N}$$

$$EI_{yy} = E_1 \left[\frac{1}{12} \times 5 \times 65^3 + 5 \times 65 \times (32,5 - 14,9)^2 \right] + E_2 \left[40 \times 5 \times 14,9^2 \right] = 329,8 \times 10^8 \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{zz} = E_1 \left[5 \times 65 \times 10,8^2 \right] + E_2 \left[\frac{1}{12} \times 5 \times 40^3 + 40 \times 5 \times (20 - 10,8)^2 \right] = 133,2 \times 10^8 \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{yz} = E_1 \left[5 \times 65 \times (32,5 - 14,9) \times (10,8) \right] + E_2 \left[5 \times 40 \times (-14,9) \times (10,8 - 20) \right] = 125,5 \times 10^8 \text{ Nmm}^2$$

De rek in de vezel die samenvalt met de staafas door het NC kan worden bepaald m.b.v.:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} = \frac{40 \times 10^3}{777,5 \times 10^5} = 51,45 \times 10^{-5}$$

De krommingen in y en z-richting moeten worden bepaald met de constitutieve relatie voor de doorsnede :

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1,0 \times 10^6 \end{bmatrix} = 10^8 \times \begin{bmatrix} 329,8 & 125,5 \\ 125,5 & 133,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ zie formuleblad

$$\begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \frac{10^{-8}}{329,8 \times 133,2 - 125,5^2} \times \begin{bmatrix} 133,2 & -125,5 \\ -125,5 & 329,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1,0 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_y = -4,45 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-1} \quad \kappa_z = 11,70 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$$

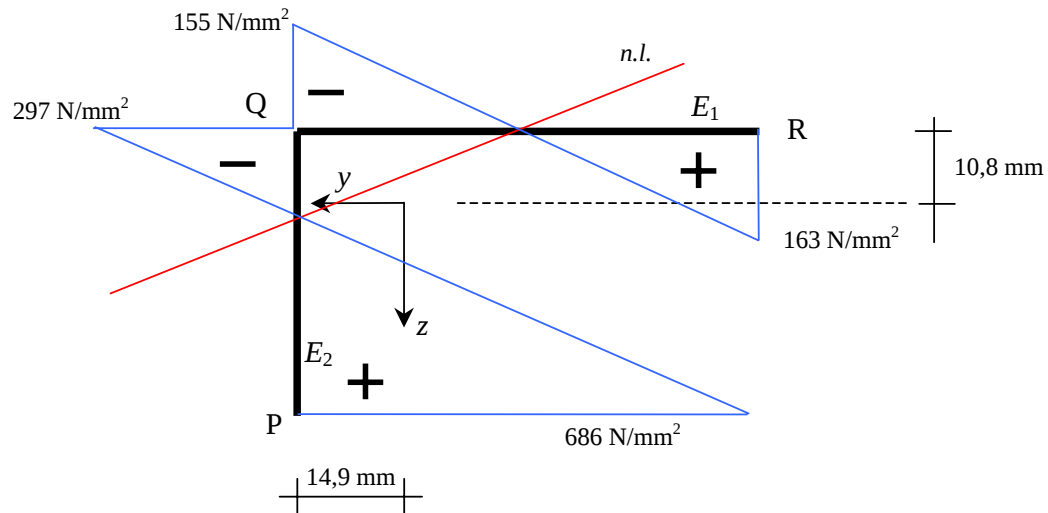
Het rekverloop over de doorsnede ligt hiermee vast:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z = 51,45 \times 10^{-5} - 4,45 \times 10^{-5} \times y + 11,70 \times 10^{-5} \times z$$

Op basis van de rekverdeling kunnen de spanningen in de punten P, Q en R voor de beide materialen worden bepaald:

	E GPa	y	z	$Spanning$ GPa
P	210	14,9	29,2	686
Q	210	14,9	-10,8	-297
Q	110	14,9	-10,8	-155
R	110	-50,1	-10,8	163

Dit spanningsverloop kan worden getekend in de doorsnede waarbij de spanningen loodrecht worden uitgezet op het (dunne) plaatmateriaal. Een schets waarbij de spanningen loodrecht op de neutrale lijn worden uitgezet is uiteraard ook een correcte presentatie.



Figuur 4.2 : *Normaalspanningen t.g.v. normaalkracht en buiging*

Merk op : De neutrale lijn gaat i.v.m. de aanwezige normaalkracht niet door het NC!

De doorsnede is niet-symmetrisch waardoor er geen gebruik kan worden gemaakt van de gebruikelijke methode voor het bepalen van de schuifspanningen. Er moet dus gebruik worden gemaakt van de algmene methode:

$$s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M}V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{h^{(a)}}$$

Hierbij is het van belang dat **alleen** de normaalspanningen worden gebruikt t.g.v. het **buigingsaandeel**. De in de bovenstaande figuur aangegeven snijpunten van de nl. zijn dus niet de plaatsen waar de schuifspanningen extreem zijn !

Het rekverloop t.g.v. alleen buiging kan beschreven worden met:

$$\varepsilon(y, z) = 0 + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z = -4,45 \times 10^{-5} \times y + 11,70 \times 10^{-5} \times z$$

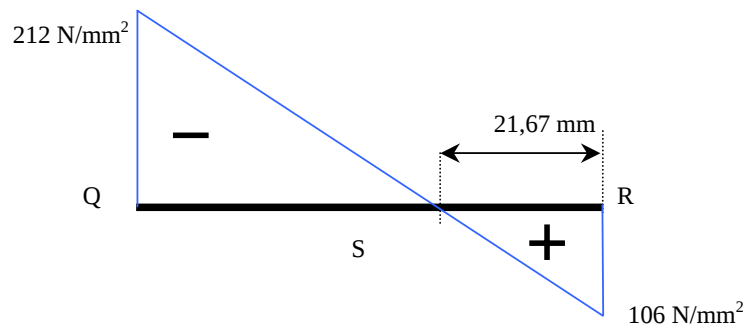
De normaalspanningsverdeling in de roestvaststalen bovenflens kan hiermee worden bepaald:

	E GPa	y	z	Spanning GPa
Q	110	14,9	-10,8	-212
R	110	-50,1	-10,8	106

Het punt in de bovenflens waar de normaalspanning nul is wordt aangeduid met S. Dit punt heeft t.o.v. R een afstand van:

$$SR = 65 - \frac{65 \times 212}{212 + 106} = 21,67 \text{ mm}$$

De schuifspanning is nul aan de rand in R en maximaal in S.



Figuur 4.3 : *Normaalspanning in de bovenflens t.g.v. buiging*

De grootte van de schuifspanning in S kan worden bepaald door de resultante van de normaalspanning te bepalen op het afschuivende deel SR.

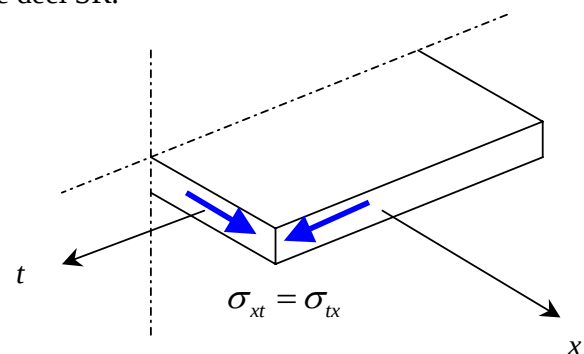
$$R_M^{(a)} = \frac{1}{2} \times 5 \times 106 \times 21,67 = 5747 \text{ N}$$

$$\sigma_{xt} = -\frac{R_M^{(a)}}{b^{(a)}M} V \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{xt} = -\frac{5747}{5 \times 1,0 \times 10^6} \times 1 \times 10^3 = -1,15 \text{ N/mm}^2$$

De positieve richting van de schuifspanningen zijn in blauw in de figuur hiernaast weergegeven (zie ook diktaat).

De werkelijke schuifspanning heeft dus een omgekeerde richting (werd overigens niet gevraagd).



Figuur 4.4 : *Tekenafpraak*