

Tentamen CT3109

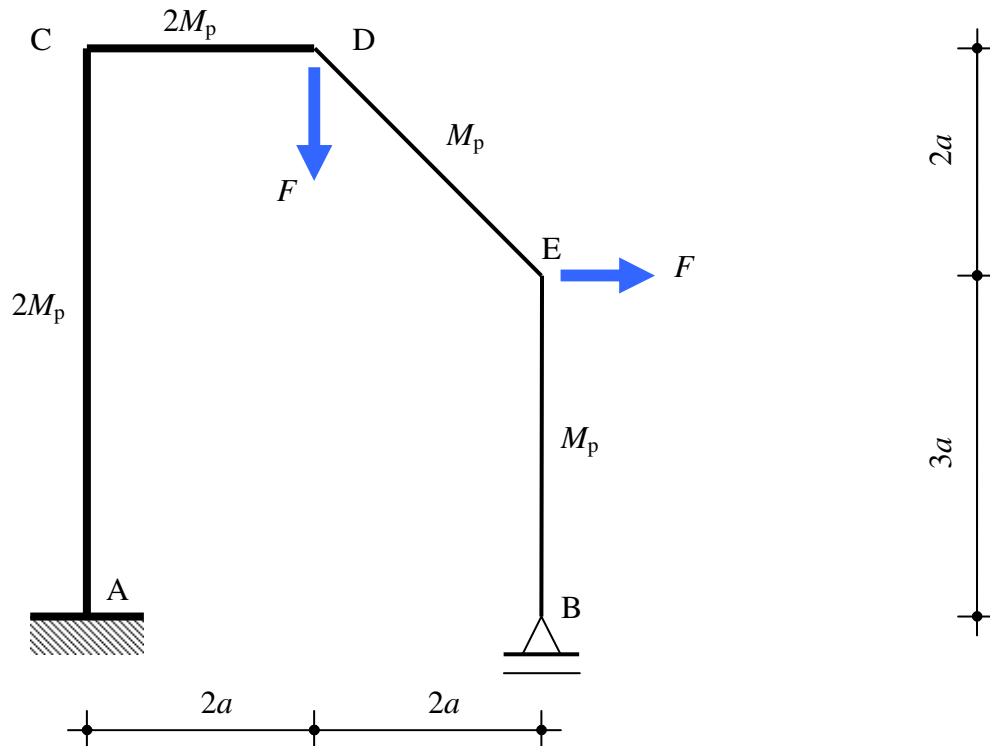
CONSTRUCTIEMECHANICA 4

11 april 2011,
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 4 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons en UMTS tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan
- Maak zonodig gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Let op de aangegeven tijd per vraagstuk

OPGAVE 1 : Plasticiteit en bezwijktheorie**(ca 45 min)**

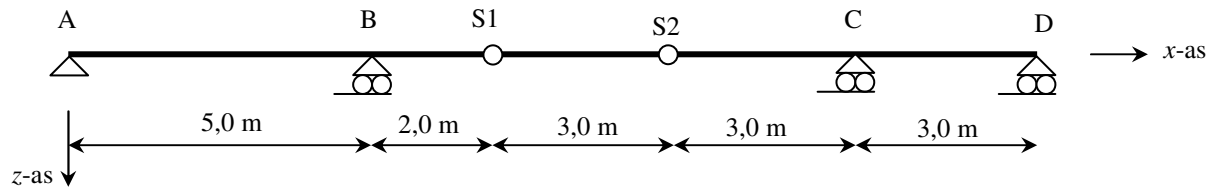
In de onderstaande figuur is een geknikt spant weergegeven dat in A volledig is ingeklemd en in B opgelegd is op een horizontale rol. Het spant wordt in D en E belast met de aangegeven krachten F . Het deel ACD is twee maal zo sterk als het deel BED.

**Vragen:**

- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen en teken deze met kleine schetsjes.
- Bepaal de bezwijkbelasting F_p uitgedrukt in a en het volplastisch moment M_p .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.

OPGAVE 2 : Invloedslijnen**(ca 35 min)**

Hieronder is een statisch bepaalde constructie gegeven. De Gerber-ligger heeft twee scharnieren S1 en S2.



Figuur 1 : Statisch bepaalde constructie

Vragen:

- Leg uit hoe de invloedslijn voor een krachts grootte kan worden bepaald?
- Leg uit hoe de invloedslijn voor een verplaatsingsgrootte kan worden bepaald
- Construeer de invloedslijn voor het steunpuntsmoment in B.
- Construeer de invloedslijn voor het steunpuntsmoment in C.
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht direct links van C.
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht halverwege AB
- Construeer de invloedslijn voor de oplegreactie in C
- Schets de invloedslijn voor de zakking van scharnier S2.
- Waar moet de gelijkmatig verdeelde belasting q worden geplaatst opdat het steunpuntsmoment maximaal is en welk steunpunt is dan maatgevend ?

OPGAVE 3 : Arbeid en Energiemethoden**(ca 45 min)**

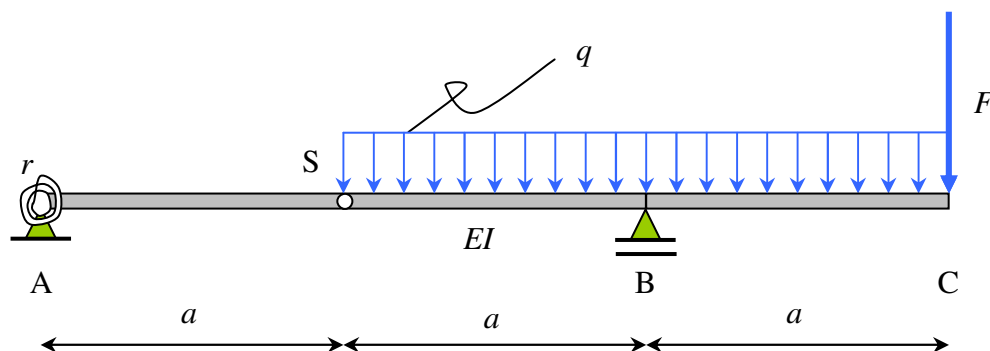
In de onderstaande figuur is een buigligger weergegeven die aan de linker zijde verend is ingeklemd en in B scharnierend is ondersteund. S is een in de ligger aangebracht scharnier. De ligger wordt over het deel SBC belast met een gelijkmatig verdeelde last q en in C met een puntlast F .

De veerstijfheid is met de onderstaande uitdrukking in een (dimensieloos) verhoudingsgetal uit te drukken t.o.v. de buigstijfheid en uitkraging a van de ligger:

$$\rho = \frac{r \cdot a}{EI} \Rightarrow r = \frac{\rho \cdot EI}{a}$$

Voor een rotatieveer kan de vormveranderingsenergie worden bepaald met de volgende uitdrukking:

$$E_v = \frac{M_{veer}^2}{2r}$$

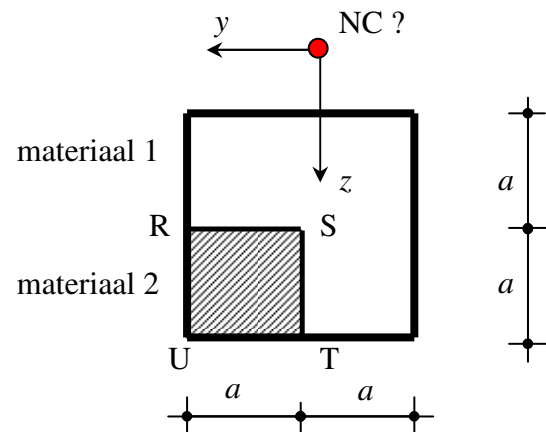
**Vragen:**

- Bepaal de momentenlijn voor deze constructie en teken deze inclusief de vervormingstekens en zet de waarden erbij.
- Bepaal de zakking van punt S met een arbeids- of energiemethode naar keuze en druk deze uit in de gegeven parameters waarbij U de veerstijfheid van de rotatieveer mag uitdrukken m.b.v. het verhoudingsgetal ρ .
- Geef de door U gevonden uitdrukking voor de vormveranderingsenergie t.g.v. de belasting en druk deze uit in de parameters F , q , a , ρ en EI .
- Als verder gegeven is : $EI = 10000 \text{ kNm}^2$; $\rho = 2$, $a = 4 \text{ m}$; $q = 4 \text{ kN/m}$ en $F = 10 \text{ kN}$, bepaal dan de gevonden zakking voor S in mm en het maximum moment in kNm.
- Bepaal de opgeslagen vormveranderingsenergie voor de situatie waarbij de veerstijfheid van de rotatieveer bijzonder klein is.

TIP : maak een schets van de vervormde constructie!

OPGAVE 4**(ca 45 min)**

Van een op buiging belaste staaf in een constructie is gegeven dat de niet symmetrische dwarsdoorsnede gemaakt is van twee materialen met een verschillende elasticiteitsmodulus. Beide materialen werken volledig samen. De afmetingen en de verdere gegevens zijn hieronder afgebeeld. De liggeras is de x -as en de oorsprong van het assenstelsel in de doorsnede wordt gekozen in het normaalkrachten-centrum. De doorsnede wordt belast in het x - z -vlak met een dwarskracht van 191 kN en een buigend moment van 1910 kNm.



Gegevens : $E_1 = 200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$; $E_2 = 1800 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$; $a = 300 \text{ mm}$

Vragen:

- Waarom wordt het assenstelsel in de doorsnede gekozen in het normaalkrachtencentrum?
- Bepaal de ligging van het normaalkrachtencentrum NC.
- De constitutieve matrix voor deze doorsnede is hieronder weergegeven. Toon aan dat deze matrix correct is.

$$10^{12} \begin{bmatrix} 0,216 & 0 & 0 \\ 0 & 4320 & 1080 \\ 0 & 1080 & 4320 \end{bmatrix} \quad \text{eenheden N, mm}$$

- Bepaal de ligging van de *neutrale lijn*, het belastingvlak m en het krommingsvlak k en teken deze in een figuur van de dwarsdoorsnede
- Teken in een 2^e figuur de normaalspanningsverdeling, zet het normaalspanningsdiagram loodrecht uit op de neutrale lijn. Laat duidelijk zien in welk materiaal de aangegeven spanningen optreden, gebruik hiervoor zonodig kleur.
- Bepaal de kracht die per eenheid van liggerlengte moet worden overgedragen in de interface RST tussen materiaal 1 en 2.
- Bepaal het linker kernpunt van de doorsnede en teken deze in de figuur van de doorsnede.
- In welke vlak heeft deze doorsnede de grootste buigstijfheid en hoe groot is deze?

FORMULEBLAD

Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2EI_{yz}}{(EI_{yy} - EI_{zz})}; \quad EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

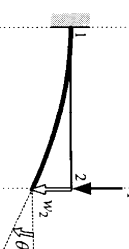
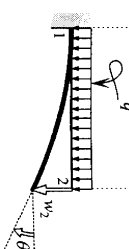
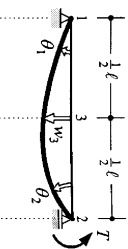
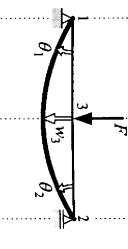
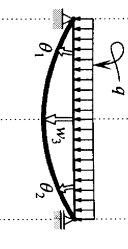
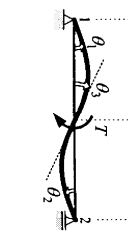
Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \cdot \varepsilon$$

$$M = EI \cdot \kappa$$

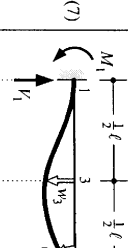
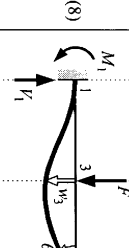
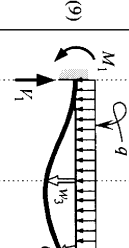
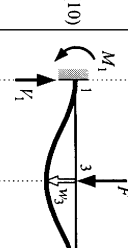
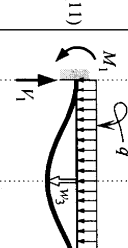
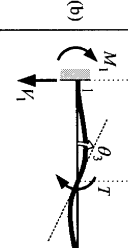
Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; \quad w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

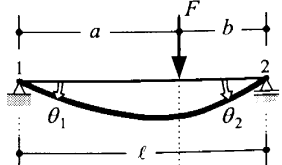
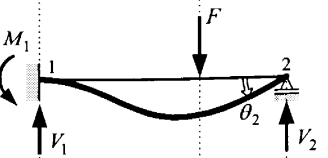
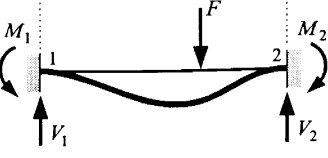
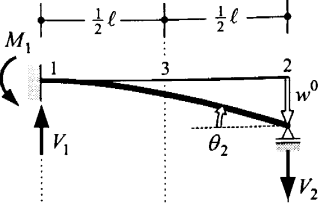
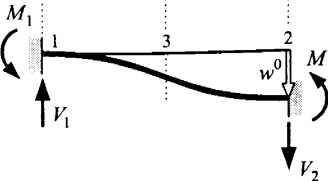
vergeet-mij-nietjes

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{32} \frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F\ell; \quad V_1 = \frac{11}{16} F; \quad V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; \quad V_1 = \frac{5}{8} q\ell; \quad V_2 = \frac{3}{8} q\ell$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F\ell; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$
(b)		$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma'sche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fb^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

zettingen