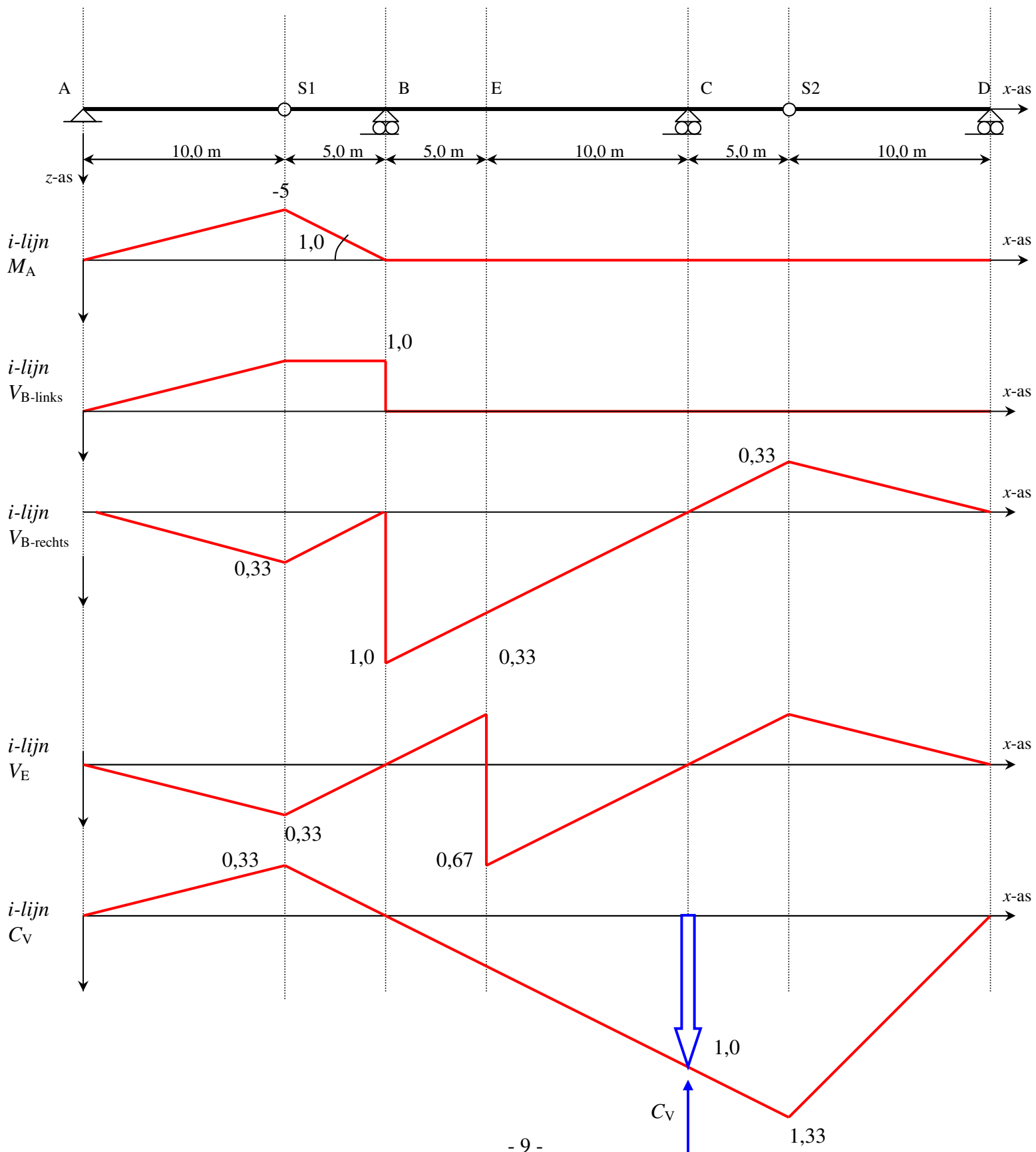
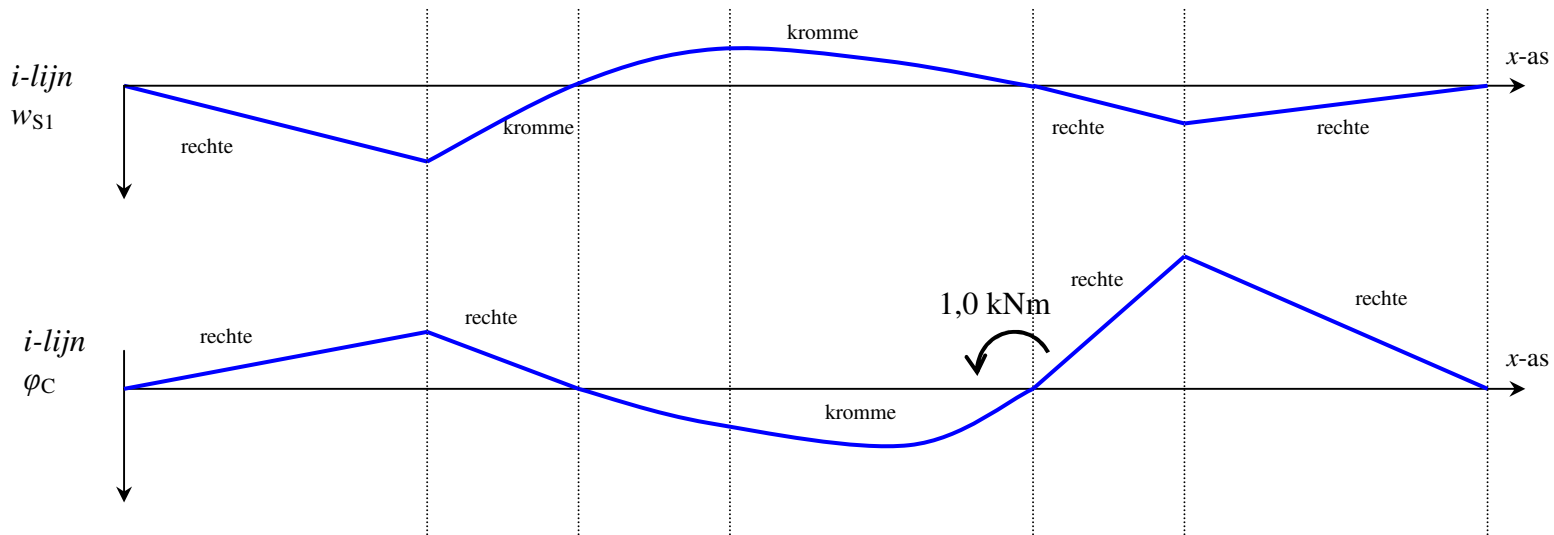


BEKNOPTE ANTWOORDEN

Opgave 1

Hieronder zijn de gevraagde invloedslijnen a) t/m e) geconstrueerd en f) en g) geschetst. De geldende afspraken voor positieve krachtsgrootheden zijn aangehouden.





- h) De gelijkmatige belasting moet staan op het deel AB waarmee het maximale moment in A gelijk wordt aan : $M_A = \frac{1}{2} \times 15 \times (-5,0) \times 5 = -187,5 \text{ kNm}$.

Opgave 2

- a) Enkelvoudig statisch onbepaalde constructie. Kies een statisch onbepaalde waar een vormveranderingsvoorwaarde bij hoort met de eis dat een verplaatsing of hoekverdraaiing bekend is (nul). Werk de vormveranderingsvoorwaarde uit met de 2^e wet van Castigliano.
- b) Voor de vormveranderingsenergie is het verloop van de momentenverdeling nodig als functie van x :

$$M_1(x) = -F(4-x) \quad 0 \leq x \leq 4,0$$

$$M_2(x) = B_V(10-x) - T \quad 0 \leq x \leq 10,0$$

$$M_3(x) = -T \quad 10 \leq x \leq 14,0$$

$$E_v = \int_0^{4,0} \frac{(M_1(x) + M_2(x))^2}{2EI} dx + \int_{4,0}^{10,0} \frac{M_2^2(x)}{2EI} dx + \int_{10}^{14} \frac{M_3^2(x)}{2EI} dx$$

De vormveranderingsvoorwaarde luidt:

$$w_B = 0 \Rightarrow w_B = \frac{dE_v}{dB_V}$$

Aangezien het deel van de momentenverdeling van 10,0 tot 14,0 m niet afhangt van de oplegreactie in B kan dit deel buiten beschouwing worden gelaten.

- c) Pas Castigliano toe en hiervoor zijn alleen de momentenverdelingen van AB nodig:

$$\begin{aligned} w_B &= \frac{d}{dB_V} E_v = \int_0^4 \frac{d}{dB_V} \left[\frac{(-4F + Fx + 10B_V - B_V x - T)^2}{2EI} \right] dx + \int_4^{10} \frac{d}{dB_V} \left[\frac{(10B_V - B_V x - T)^2}{2EI} \right] dx \\ &= \int_0^4 \frac{(-4F + Fx + 10B_V - B_V x - T)(10 - x)}{EI} dx + \int_4^{10} \frac{(10B_V - B_V x - T)(10 - x)}{EI} dx = \\ &= \int_0^4 \frac{(-40F + 14Fx - Fx^2 + 100B_V - 20B_V x + B_V x^2 - 10T + Tx)}{EI} dx + \\ &\quad \int_4^{10} \frac{(100B_V - 20B_V x + B_V x^2 - 10T + Tx)}{EI} dx = \\ &= -\frac{26F}{5625} + \frac{B_V}{45} - \frac{T}{300} = 0 \end{aligned}$$

Invullen van $F = 125$ kN en $T = 80$ kNm levert:

$$B_V = 38 \text{ kN} \uparrow$$

- d) Momentenlijn moet foutloos zijn qua vorm. Inklemmingsmoment is 200 kNm. Onder de puntlast een momentwaarde van 148 kNm en boven het steunpunt 80 kNm.

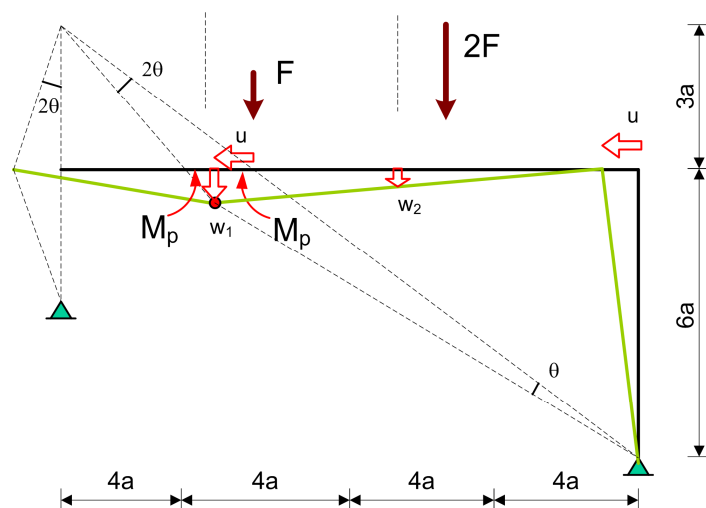
Opgave 3

- a) De constructie is statisch bepaald (!) waardoor er maximaal 1 scharnier nodig is om een mechanisme te creëren. Dit scharnier kan op 3 plaatsen ontstaan waarmee er 3 combinaties mogelijk zijn.

Scharnieren in C, D of E. In het geval van deze laatste mogelijkheid zal de belasting geen arbeid verrichten waarmee de bezwijklast oneindig zal zijn en daarmee zeker niet de laagste is. Alleen scharnieren in C of D hoeven verder te worden uitgewerkt.

- b) Het mechanisme moet netjes worden uitgewerkt.
1. Daarbij moet eenduidig worden aangegeven hoeveel iedere staaf in verhouding tot de andere staven verdraait en
 2. de juiste richting van de plastische momenten worden aangegeven.
 3. en een correcte virtuele arbeidsvergelijking worden opgesteld.

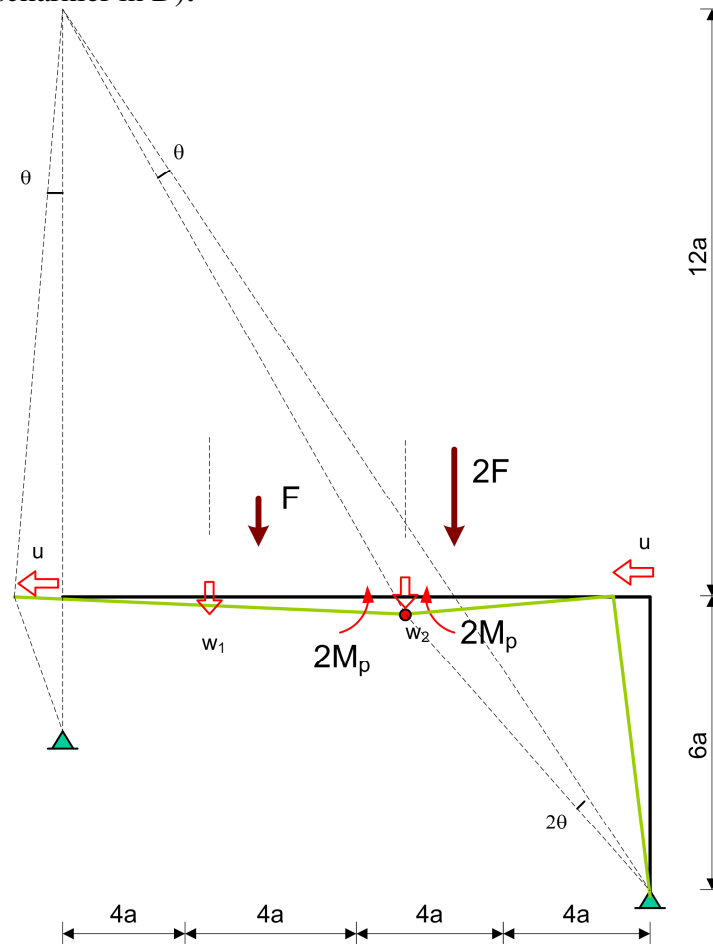
Als de kinematica van het mechanisme onjuist is valt dit mechanisme buiten de beoordeling, kortom dit is een essentieel leerdoel. Tip: gebruik de u en de w om alle hoeken echt te vinden. Gokken wordt niet gewaardeerd.

Mechanisme 1 (scharnier in C):

$$\delta A = -M_p 2\delta\theta - M_p \delta\theta + F \times 8a \times \delta\theta + 2F \times 4a \times \delta\theta = 0$$

$$F_p = \frac{3M_p}{16a} = 0,1875 \frac{M_p}{a}$$

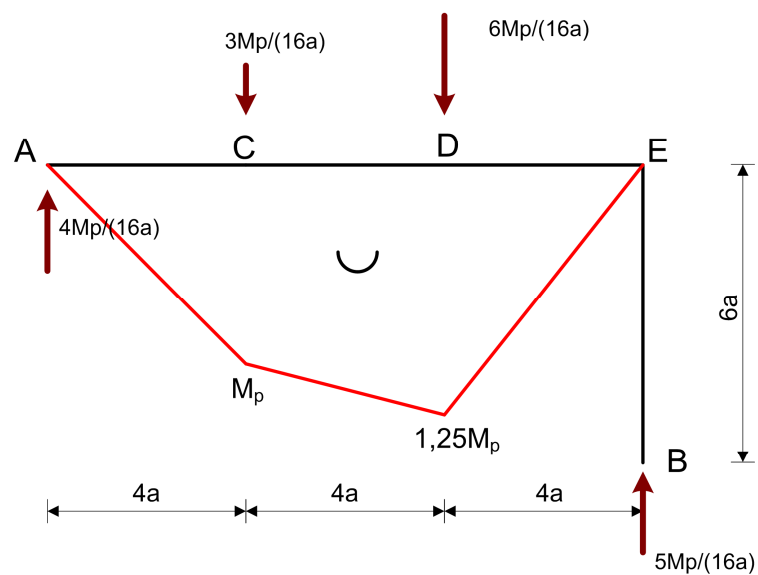
MAATGEVEND

Mechanisme 2 (scharnier in D):

$$\delta A = -2M_p \times \delta\theta - 2M_p \times 2\delta\theta + F \times 4a \times \delta\theta + 2F \times 4a \times 2\delta\theta = 0$$

$$F_p = \frac{3M_p}{10a} = 0,3 \frac{M_p}{a}$$

- c) Van het maatgevende mechanisme 1 is hieronder de momentenlijn getekend. Het moment in D wordt 1,25Mp hetgeen kleiner is dan de sterkte van 2Mp in D.



Merk op dat voor deze zeer eenvoudige constructie de horizontale oplegreactie in B nul moet zijn.

- d) Volgens de eenduidigheidsstelling van Prager mag nergens in de constructie de sterkte overschreden worden. Dit kan worden gecontroleerd door de momentenlijn te tekenen voor het maatgevende mechanisme. De momentenlijn laat zien dat nergens in de constructie de sterkte wordt overschreden. Er wordt voldaan het eenduidigheids criterium van Prager en daarmee is er (in het algemeen) zekerheid dat het aangewezen mechanisme ook echt het bezwijkmechanisme is.

Opgave 4

- a) Hoewel de normaalspanningen in A en B wel gelijk zijn, moeten de rekken ongelijk zijn. Immers de elasticiteitsmodulus is in A ongelijk aan die in B en de doorsnede is niet-symmetrisch. De neutrale lijn zal niet evenwijdig aan AB lopen en het krommingsvlak dat loodrecht staat op de neutrale lijn verloopt daarmee niet horizontaal. Het belastingsvlak $m-m$ kan een kleine hoek maken met het vlak $k-k$ waarin de ligger kromt maar het zou welhaast louter toeval zijn als in deze situatie het belastingvlak dan wel precies horizontaal verloopt (alleen een M_y). Alleen dan heeft de collega gelijk. Zou dit zo zijn dan moet uw collega welhaast helderziend zijn. Het ligt meer voor de hand om op basis van het niet-symmetrisch en inhomogeen zijn van de doorsnede de verwachting uit te spreken dat de doorsnede zowel op normaalkracht als op buiging wordt belast waarbij de buiging uit twee componenten bestaat, die in het $x-y$ -vlak en die in het $x-z$ -vlak.
- b) De axiale stijfheid kan worden bepaald met:

$$EA = E_1(240 \times 120) + E_2(120 \times 320) = 1152 \times 10^5 \text{ Nmm}$$

Het normaalkrachtencentrum van deze doorsnede ligt ten op zichte van de linker bovenhoek op:

$$y_{\text{NC}} = \frac{E_1(220 \times 120 \times 120) + E_2(120 \times 320 \times 120)}{EA} = 120 \text{ mm}$$

$$z_{\text{NC}} = \frac{E_1(220 \times 120 \times 60) + E_2(120 \times 320 \times 280)}{EA} = 115 \text{ mm}$$

De buigstijfheidstensor kan hiermee worden bepaald:

$$EI_{yy} = 3000 \left(\frac{1}{12} \times 120 \times 240^3 \right) +$$

$$750 \left(\frac{1}{12} \times 2 \times 120^2 \times 120 \times 320 \right) = 4838400 \times 10^5 \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{yz} = 750 \left(\frac{1}{12} \times 120^2 \times 320^2 \right) = 921600 \times 10^5 \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{zz} = 3000 \left(\frac{1}{12} \times 240 \times 120^3 + 240 \times 120 \times (55)^2 \right) +$$

$$750 \left(\frac{1}{12} \times 120 \times 320^3 + 120 \times 320 \times (-165)^2 \right) = 13948800 \times 10^5 \text{ Nmm}^2$$

De constitutieve relatie is hiermee:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1152 & & \\ & 4838400 & 921600 \\ & 921600 & 13948800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

- c) Voor drie punten zijn de normaalspanningen gegeven. Dit levert drie vergelijkingen op met de drie onbekende vervormingsparameters van de doorsnede:

$$\sigma_A = E_1(\varepsilon + \kappa_y y_A + \kappa_z z_A)$$

$$\sigma_B = E_2(\varepsilon + \kappa_y y_B + \kappa_z z_B)$$

$$\sigma_C = E_2(\varepsilon + \kappa_y y_C + \kappa_z z_C)$$

Deze zijn daarmee oplosbaar en vervolgens kan met de constitutieve vergelijking van de doorsnede de snedekrachten worden bepaald:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & \\ & EI_{yy} & EI_{yz} \\ & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

- d) Oplossen levert:

$$48 = 3000\varepsilon + 360000\kappa_y - 345000\kappa_z$$

$$48 = 750\varepsilon + 90000\kappa_y + 243750\kappa_z$$

$$-30 = 750\varepsilon - 90000\kappa_y + 3750\kappa_z$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 48 \\ 48 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & 360000 & -345000 \\ 750 & 90000 & 243750 \\ 750 & -90000 & 3750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

volgens de GR:

$$\varepsilon = -\frac{3}{500}; \quad \kappa_y = \frac{19}{66000}; \quad \kappa_z = \frac{3}{27500}; \quad (-0,006; 2,878 \times 10^{-4}; 1,090 \times 10^{-4})$$

De snedekrachten volgen nu uit:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1152 & & \\ & 4838400 & 921600 \\ & 921600 & 13948800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/500 \\ 19/66000 \\ 3/27500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -691,2 \times 10^3 \text{ N} \\ 149,34 \times 10^6 \text{ Nmm} \\ 178,70 \times 10^6 \text{ Nmm} \end{bmatrix}$$

Buiging treedt dus niet op in het x-y-vlak. De dwarskracht kan niet worden bepaald aangezien hier de verdere gegevens voor ontbreken.

- e) De neutrale lijn heeft als vergelijking:

$$95y + 36z = 1980$$

De *nl* snijdt de y-as voor $z = 0$ in $y = 20,8$ mm en de z-as voor $y = 0$ in $z = 55$ mm en gaat dus beslist niet door het NC. Het krommingsvlak staat loodrecht op de *n.l.* en het belastingsvlak valt niet samen met een van de assen en ook niet met het krommingsvlak vanwege het niet-symmetrisch en inhomogene karakter van de doorsnede.

- f) De kern is een vijfhoek aangezien er 5 raaklijnen aan de doorsnede zijn te construeren die kunnen samenvallen met de ligging van de nl die behoort tot een van de hoekpunten van de kern (krachtpunt voor de ligging van de nl). De rechte rand van de kern geeft alle mogelijke raaklijnen (neutrale lijnen) die juist raken aan de doorsnede in een van de buitenhoeken van de doorsnede.

Het linker kernpunt behoort bij een raaklijn die juist aan de rechterzijde van de doorsnede raakt.

$$\begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{1152} \begin{bmatrix} 4838400 & 921600 \\ 921600 & 13948800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/(-120) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,0 \\ 6,67 \end{bmatrix}$$

- g) Voor de schuifstroom t.g.v. een dwarskracht V in de doorsnede is de normaalspanning nodig op een afgeschoven deel (materiaal 1 of materiaal 2) ten gevolge van alleen het buigend moment. Dat betekent:

- Bepaal de normaalspanning op het afgeschoven deel t.g.v. alleen het buigend moment
- Bepaal de resultante normaalkracht op dit deel met behulp van de gevonden spanningen en
- Bepaal met de algemene formule:

$$s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V;$$

de schuifstroom t.g.v. een nog nader te specificeren waarde voor de dwarskracht V .