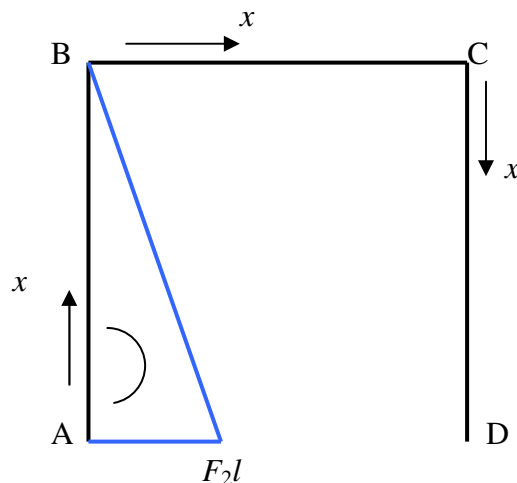


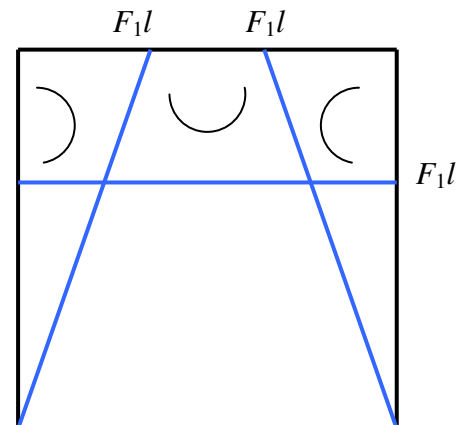
ANTWOORDEN

OPGAVE 1 : Arbeid en energie

- a) Zie de theorie in het dictaat
 b) Met de 2^e wet van Castigliano kan de verplaatsing worden gevonden. Hiervoor is de momentenlijn noodzakelijk. De M -lijn is afhankelijk van de beide puntlasten. Een eenvoudige aanpak is derhalve om eerst de M -lijnen voor de afzonderlijke puntlasten op te stellen. Daarmee is dan eenvoudig de totale M -lijn te bepalen.



M -lijn
t.g.v. F_2



M -lijn
t.g.v. F_1

De horizontale verplaatsing in B kan nu gevonden worden m.b.v.:

$$u_B = \frac{\partial E_v}{\partial F_2} = \frac{\partial}{\partial F_2} \left(\int \frac{M^2}{2EI} dx \right) = \int \frac{M}{EI} \times \frac{\partial M}{\partial F_2} dx$$

Uit de bovenstaande M -lijnen kan worden opgemaakt dat alleen het deel AB afhankelijk is van F_2 . Uitwerking van deze integraal kan dus beperkt blijven tot alleen het deel AB. De vergelijking van de M -lijn over AB met een lopende variabele x van A naar B is:

$$M^{AB}(x) = F_1 x + F_2 l - F_2 x \quad \text{en} \quad \frac{\partial M^{AB}}{\partial F_2} = l - x$$

Uitwerken levert:

$$u_B = \int_0^l \frac{M^{AB}}{EI} \times \frac{\partial M^{AB}}{\partial F_2} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l (F_1 x + F_2 l - F_2 x)(l - x) dx$$

$$u_B = \frac{(F_1 + 2F_2)l^3}{6EI}$$

Voor de horizontale verplaatsing van punt D geldt:

$$u_D = \frac{\partial E_v}{\partial F_1} = \frac{\partial}{\partial F_1} \left(\int \frac{M^2}{2EI} dx \right) = \int \frac{M}{EI} \times \frac{\partial M}{\partial F_1} dx \quad \Leftrightarrow$$

$$u_D = \int_0^l \frac{M^{AB}}{EI} \times \frac{\partial M^{AB}}{\partial F_1} dx + \int_0^l \frac{M^{BC}}{EI} \times \frac{\partial M^{BC}}{\partial F_1} dx + \int_0^l \frac{M^{CD}}{EI} \times \frac{\partial M^{CD}}{\partial F_1} dx$$

Uitwerken is nu iets bewerkelijker aangezien alle delen van de M -lijn afhankelijk zijn van F_1 .

De M -lijn bestaat uit de volgende drie delen met de in de figuur aangegeven lokale x -as.

$$M^{AB}(x) = F_1 x + F_2 l - F_2 x \quad \text{en} \quad \frac{\partial M^{AB}}{\partial F_1} = x$$

$$M^{BC}(x) = F_1 l \quad \text{en} \quad \frac{\partial M^{BC}}{\partial F_1} = l$$

$$M^{CD}(x) = F_1 l - F_1 x \quad \text{en} \quad \frac{\partial M^{CD}}{\partial F_1} = l - x$$

Uitwerken levert:

$$u_D = \frac{1}{EI} \int_0^l (F_1 x + F_2 l - F_2 x)(x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l (F_1 l)(l) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l (F_1 l - F_1 x)(l - x) dx$$

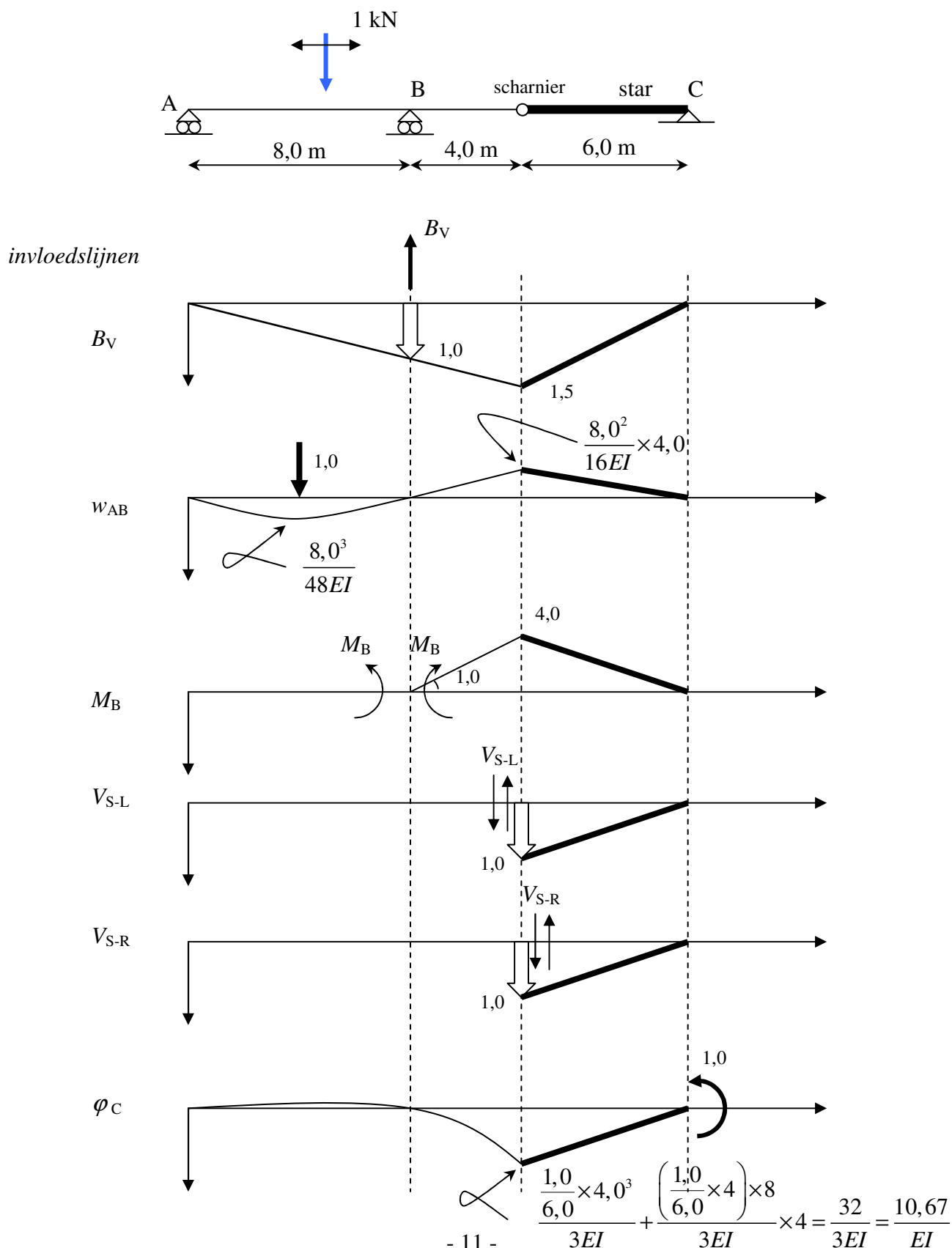
$$u_D = \frac{(10F_1 + F_2)l^3}{6EI}$$

Opmerking

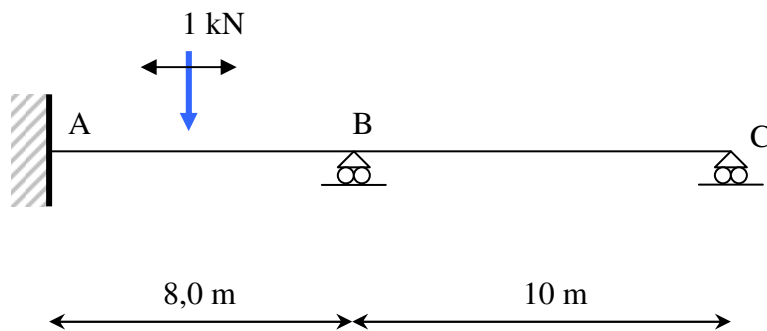
Bij de beoordeling weegt een correcte M -lijn uiteraard zeer zwaar. De bepaling van u_B heeft een groter gewicht dan die van u_D i.v.m. de bewerkelijkheid van de uitwerking van deze laatste vraag.

OPGAVE 2 : Invloedslijnen

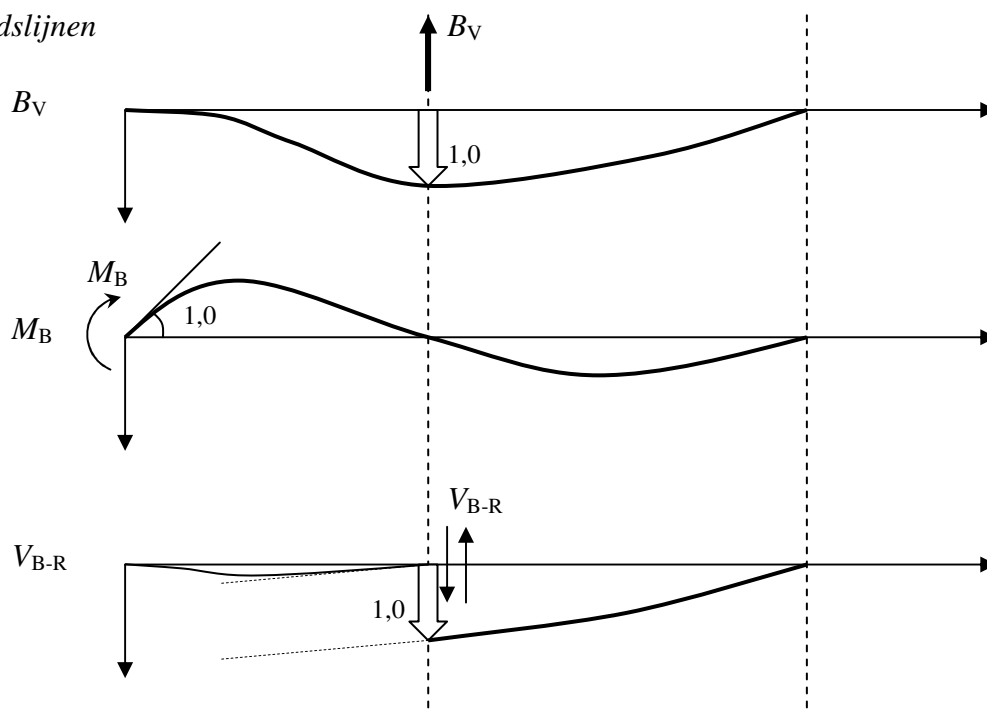
De eerste constructie is statisch bepaald. Alle invloedslijnen voor krachtsgrootheden zijn per definitie in dat geval rechte lijnen. Alle invloedslijnen voor verplaatsingsgrootheden zijn per definitie gekromde lijnen tenzij delen niet kunnen verbuigen vanwege het feit dat ze of star zijn of onbelast verplaatsen. Karakteristieke verplaatsingen kunnen met de *vergeet-mij-nietjes* snel worden bepaald. Controleer deze zorgvuldig!



De 2^e constructie is statisch onbepaald. In principe zijn nu alle invloedslijnen krommen.

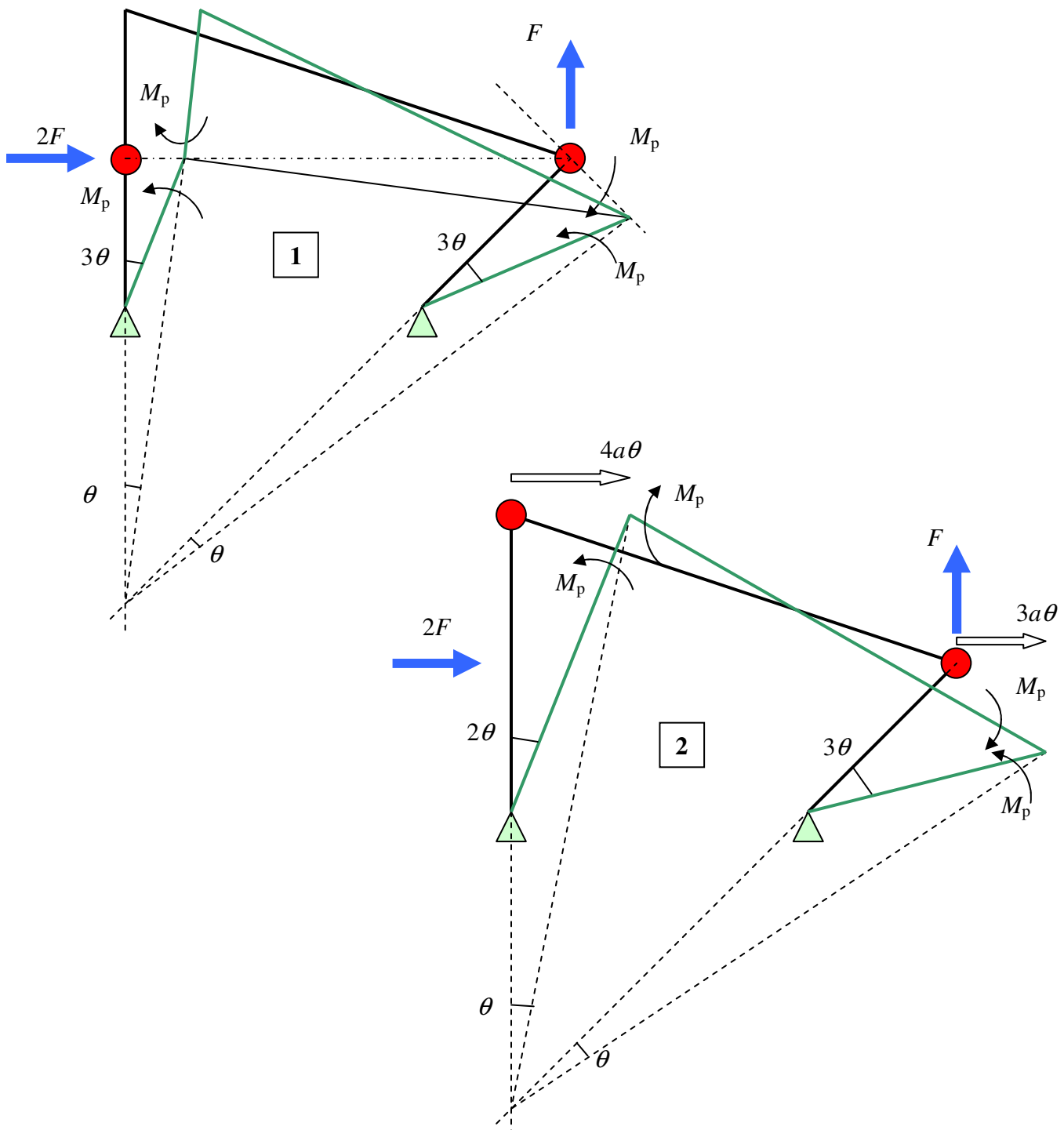


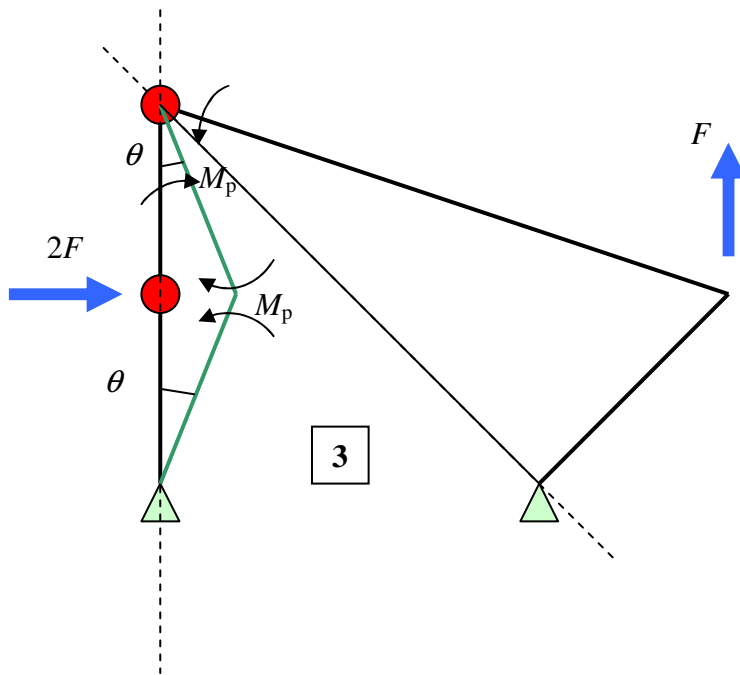
invloedslijnen



OPGAVE 3 : Plasticiteitsleer

- a) De constructie is enkelvoudig statisch onbepaald. Er zijn maximaal twee scharnieren nodig voor een mechanisme en er zijn drie locaties waar plastische scharnieren kunnen ontstaan. Hiermee zijn er maximaal 3 mechanismen te onderzoeken.
- b) De mechanismen zijn hieronder schematisch aangegeven. Controleer ook zelf de uitwerking met b.v. het programma M_p .





Uitwerken van de virtuele arbeidsvergelijkingen levert:

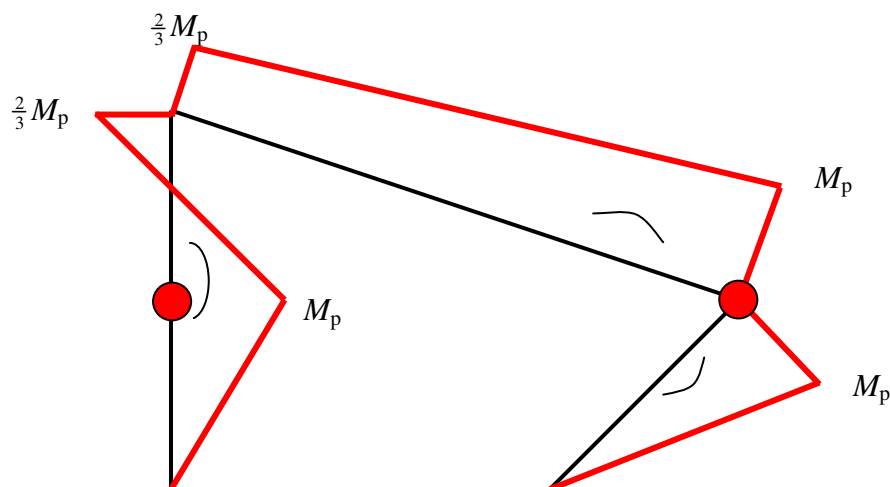
$$\delta A = -M_p 3\delta\theta + M_p \delta\theta + M_p \delta\theta - 3M_p \delta\theta + 2F \times a \times 3\delta\theta - F \times a \times 3\delta\theta = 0 \quad F_p = \frac{4M_p}{3a}$$

$$\delta A = -M_p 2\delta\theta + M_p \delta\theta + M_p \delta\theta - 3M_p \delta\theta + 2F \times a \times 2\delta\theta - F \times a \times 3\delta\theta = 0 \quad F_p = \frac{3M_p}{a}$$

$$\delta A = -M_p \delta\theta - M_p \delta\theta - M_p \delta\theta + 2F \times a \times \delta\theta = 0 \quad F_p = \frac{3M_p}{2a}$$

Conclusie, mechanisme 1 is maatgevend met de laagste bezwijklast.

- c) De momentenlijn behorende bij het maatgevende mechanisme kan worden bepaald door in A de horizontale oplegreactie te bepalen. De M -lijn overschrijdt nergens de momentendekkingslijn, er wordt dus voldaan aan de eis dat nergens in de constructie het volplastisch moment wordt overschreden.



OPGAVE 4 : Niet-symmetrische doorsnede

The position of the Normal force Centre (NC) is required. The origin of the coordinate system used is located at the NC. The vertical position of the NC with respect to the upper side of the cross section is:

$$\Delta z_{NC} = \frac{\frac{3}{2}at \times \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}at \times a + at \times a + at \times \frac{3}{2}a + at \times 2a}{6at} = \frac{9a}{8} = 90 \text{ mm}$$

The horizontal position with respect to the left side of the cross section is:

$$\Delta y_{NC} = \frac{\frac{3}{2}at \times \frac{1}{2}a + at \times \frac{3}{2}a + at \times 2a + at \times \frac{5}{2}a}{6at} = \frac{9a}{8} = 90 \text{ mm}$$

The *cross sectional constitutive relation* relates the sectional forces to the deformations of the cross section:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_{yy} & EI_{yz} \\ 0 & EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

cross sectional constitutive relation:

$$\frac{Eat}{96} \begin{bmatrix} 576 & 0 & 0 \\ 0 & 535a^2 & -255a^2 \\ 0 & -255a^2 & 167a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 576 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 3424 \times 10^9 & -1632 \times 10^9 \\ 0 & -1632 \times 10^9 & 1068,8 \times 10^9 \end{bmatrix}$$

Since this structure is loaded in bending only, the strain ε at the NC must be zero. The curvatures can be found with the constitutive relation:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} = 0$$

$$\kappa_y = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} (EI_{yz} \times M_y - EI_{yy} \times M_z) = 3,4333 \times 10^{-5}$$

$$\kappa_z = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} (-EI_{yz} \times M_y + EI_{zz} \times M_z) = 5,2426 \times 10^{-5}$$

The direction of the *plane of loading* and the *plane of curvature* can be obtained with:

$$\tan \alpha_m = \frac{M_z}{M_y} = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0^\circ$$

$$\tan \alpha_k = \frac{\kappa_z}{\kappa_y} = 1,52 \Rightarrow \alpha_k = 56,8^\circ$$

The stresses for each point of the cross section can be computed with:

$$\sigma(y, z) = E \times (\varepsilon + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z) \text{ N/mm}^2$$

The neutral axis *n.a.* can also be found with this latter expression by:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z = 0 \quad \Leftrightarrow$$

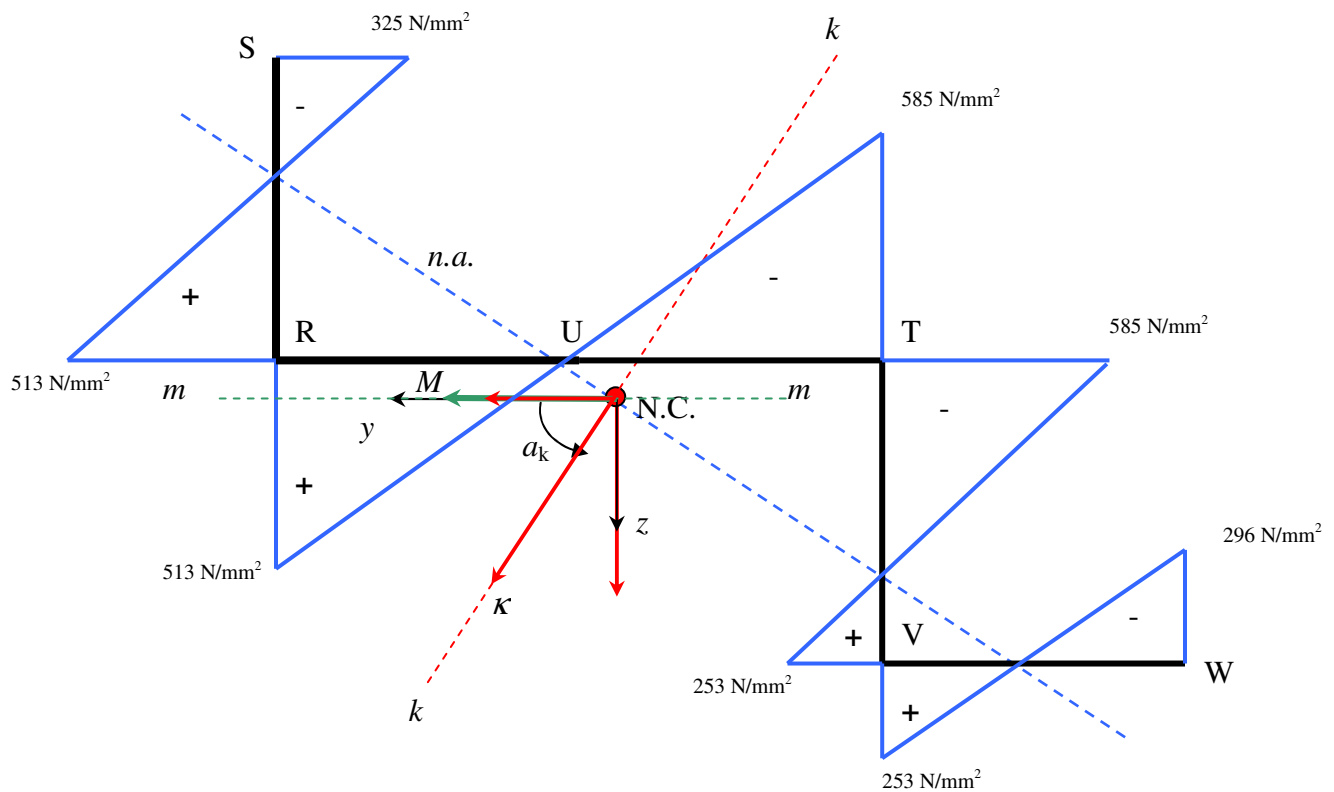
$$\kappa_y \times y + \kappa_z \times z = 0$$

The stress distribution can be visualized with a few points which are given in the table below.

Table : Stress in the specified points

Material	point	y [mm]	z [mm]	E [N/mm ²]	Stress [N/mm ²]
1	S	90	-90	2,0 ^e 5	-325
	R	90	-10	2,0 ^e 5	513
	U	10	-10	2,0 ^e 5	-36
	T	-70	-10	2,0 ^e 5	-585
	V	-70	70	2,0 ^e 5	253
	W	-150	70	2,0 ^e 5	-296

The graphical presentation of the stress distribution at C is given in the next graph. The neutral axis goes through the NC since the normal force N is zero.

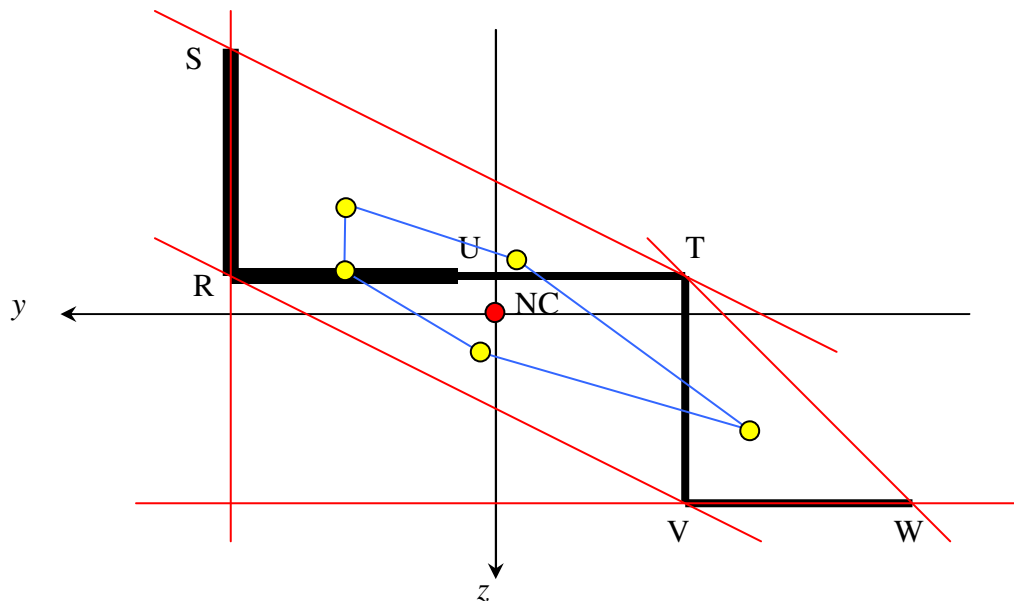


The moment M and thus the load F acts in the $x-m$ plane. The curvature κ acts in the $x-k$ plane. Due to the unsymmetrical cross section these planes do not coincide.

The kern of the cross section can be obtained with:

$$\begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

For each *n.a.* which is just outside the cross section, one corner point of the kern can be found. For this cross section we have to investigate five positions of the *n.a.* as can be seen from the figure below.



Tabel : Position of the neutral axis for the corner points of the kern

line	y_1 [mm]	z_1 [mm]	e_y [mm]	e_z [mm]
RS	90	∞	-66	31
ST	-90	-45	3	10
TW	-80	-80	39	-12
VW	∞	70	40	-27
RV	70	35	-4	-13