

## Tentamen

CTB3330/CT3109-09/CIE3109

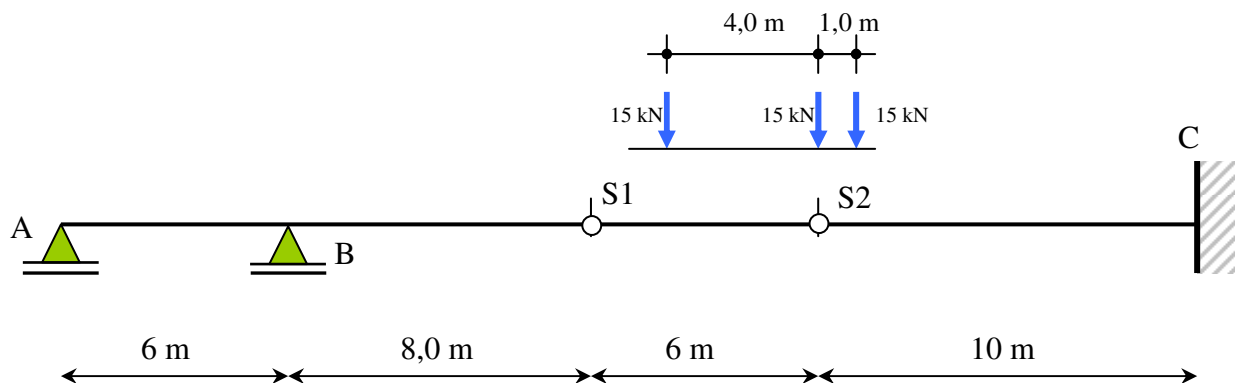
# CONSTRUCTIEMECHANICA 4

14 april 2014,  
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 4 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Maak gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Let op de aangegeven tijd per vraagstuk

**OPGAVE 1 : Invloedslijnen****( ca 45 min )**

Een laststelsel bestaande uit drie lasten van elk 15 kN rijdt over de onderstaande scharnierligger. De lasten hebben een vaste afstand tot elkaar zoals in de figuur is aangegeven.

**Vragen :**

Construeer voor deze constructie, in één figuur onder elkaar, de invloedslijnen voor :

- De verticale oplegreactie in A
- Het inklemmingsmoment in C
- De dwarskracht direct links van het scharnier S1
- De dwarskracht direct rechts van het scharnier S2
- De dwarskracht direct rechts van B
- De zakking van het scharnier S2

Schets voor deze constructie, in één figuur onder elkaar, de invloedslijnen voor :

- De hoekverdraaiing in B
- De zakking halverwege B en scharnier S1

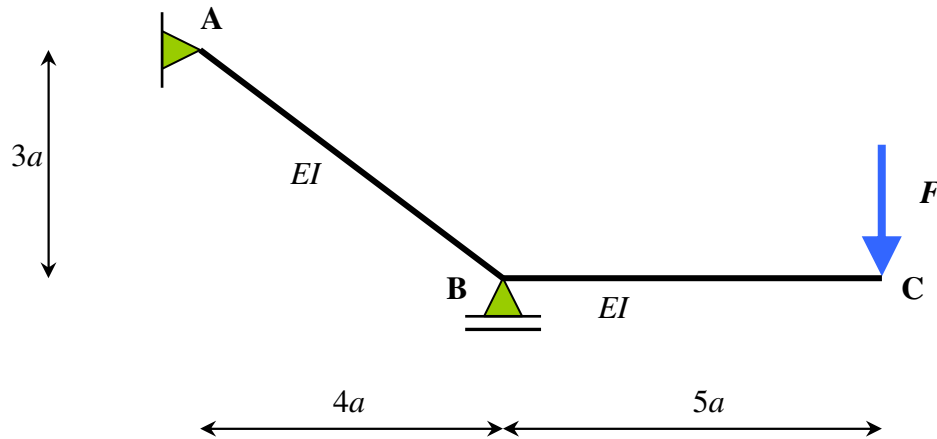
Wat is de meest ongunstige positie voor het laststelsel en bepaal de grootte van de gevraagde grootheid in deze situatie voor :

- Het inklemmingsmoment in C
- De dwarskracht in B

**Opmerking :** Construeren houdt in dit verband in dat de vorm en de invloedsfactoren van de invloedslijn volledig zijn bepaald.

**OPGAVE 2 : Arbeid en Energie****( ca 40 min )**

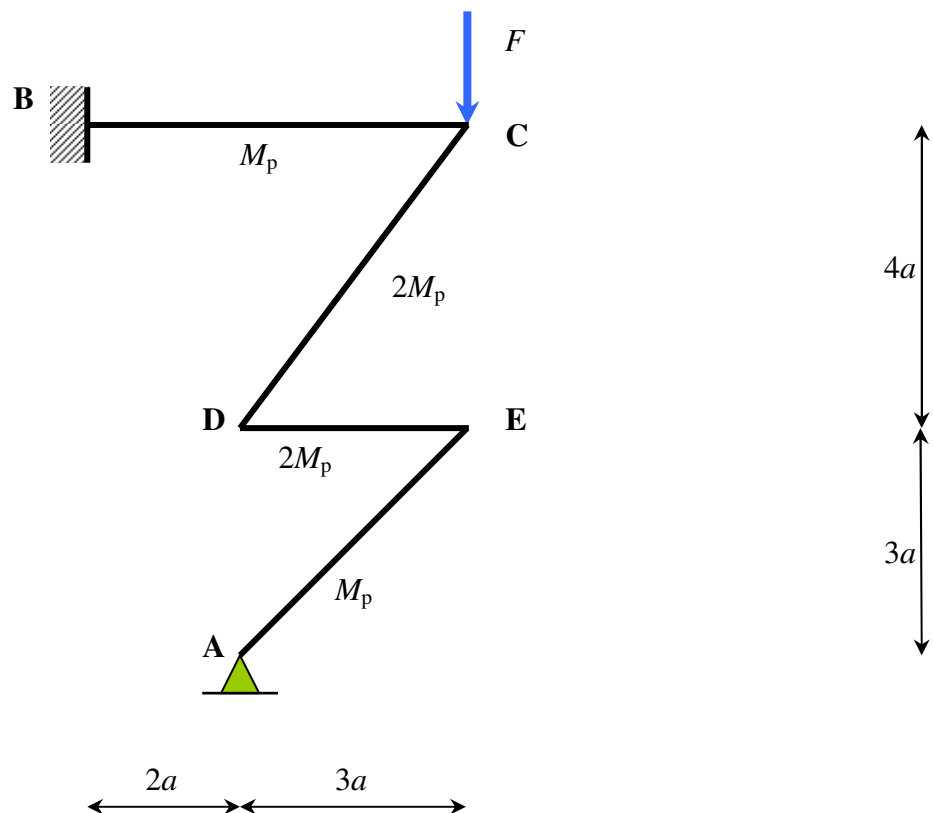
Een geknikte ligter ABC wordt in C verticaal belast met de aangegeven puntlast. De buigstijfheid van de prismatische staaf is  $EI$ . Invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd.

**Vragen:**

- Schets de momentenlijn inclusief de vervormingstekens voor deze ligter en geef de extremen aan uitgedrukt in  $F$  en  $a$ .
- Bepaal de vormveranderingsenergie t.g.v. buiging die in deze constructie is opgeslagen.
- Bepaal met behulp van Castigliano de zakking in C uitgedrukt in  $F$ ,  $a$  en  $EI$ .
- Bepaal met behulp van Castigliano de hoekverdraaiing in B uitgedrukt in  $F$ ,  $a$  en  $EI$ .

**OPGAVE 3 : Plasticiteit en bezwijkanalyse****( ca 45 min )**

Hieronder is een raamwerk getekend waarvan de bezwijklast moet worden bepaald. De staafdelen hebben de in de figuur aangegeven sterkte.

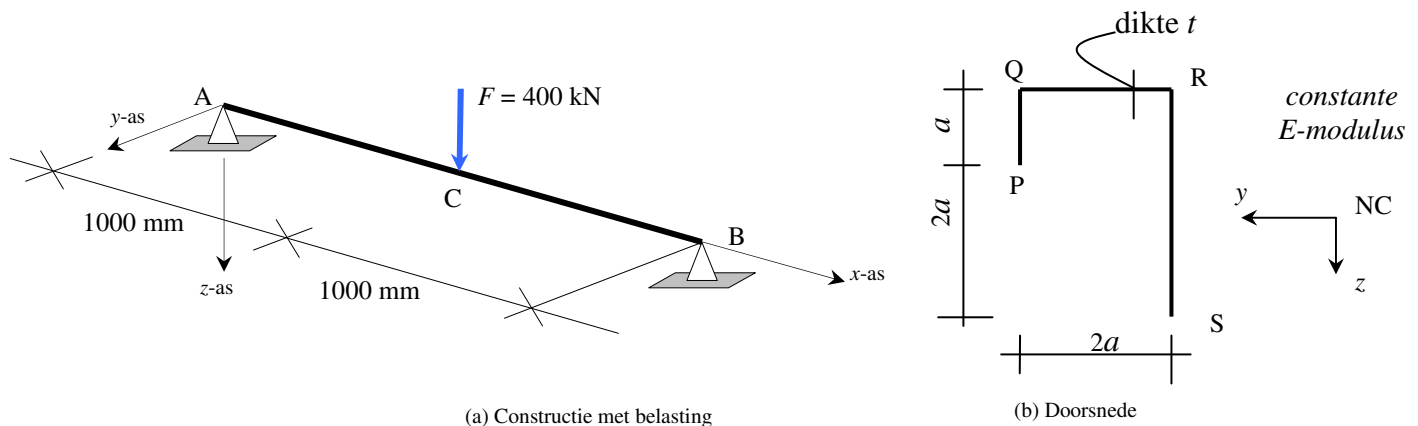
**Vragen :**

- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen en geef deze met schetsjes weer.
- Bepaal de bezwijkbelasting  $F_p$ .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.
- Wat houdt de eenduidigheidsstelling van Prager in?

**OPGAVE 4 : Niet-symmetrische doorsneden****( ca 50 min )**

Een in A en B opgelegde balk heeft een niet-symmetrische doorsnede. De ligger wordt in de  $z$ -richting belast met een puntlast  $F$  halverwege de overspanning zoals in figuur (a) is aangegeven.

De doorsnede bestaat uit een dunwandig geknikt profiel met een constante plaatdikte  $t$  zoals is aangegeven in figuur (b). Er mag worden aangenomen dat de belasting in de doorsnede aangrijpt in het dwarskrachtencentrum waardoor geen wringing ontstaat.



Gegeven :  $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ;  $a = 180 \text{ mm}$ ;  $t = 10 \text{ mm}$ ;

**Vragen :**

- a) Bepaal de ligging van het normaalkrachtencentrum NC en toon aan dat voor de weergegeven doorsnede geldt :

$$EI_{yy} = 4ta^3 E; \quad EI_{yz} = -\frac{7}{3}ta^3 E; \quad EI_{zz} = \frac{31}{6}ta^3 E$$

- b) Teken de doorsnede (schaal 1:5) en geef de ligging aan van het belastingvlak  $m$  en het krommingsvlak  $k$ .  
 c) Toon aan dat t.p.v. doorsnede C de vergelijking voor de neutrale lijn kan worden weergegeven met:

$$70y + 120z = 0$$

- d) Teken in de doorsnede de ligging van deze neutrale lijn en bepaal de normaalspanningsverdeling over het deel RS en zet deze loodrecht uit op het plaatmateriaal.

Beantwoord t.a.v. het schuifspanningsverloop de volgende vragen:

- e) Bepaal over het deel RS het verloop en de richting van de schuifspanning,  
 f) Waar treedt over dit deel de maximale schuifspanning op en hoe groot is deze ?  
 g) Teken voor dit deel het verloop van de schuifspanning en geef de relevante waarden aan in de tekening.

**Opmerking:** Ga voor de bepaling van de schuifspanningen uit van een positieve snede juist links van C.

# FORMULEBLAD

## Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2EI_{yz}}{(EI_{yy} - EI_{zz})}; \quad EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

## Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

## Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

## Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

## Rayleigh:

$$F_k = \frac{E_v}{\int \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx}$$

## Wiskunde handigheidjes:

geen

## Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

## Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \cdot \varepsilon$$

$$M = EI \cdot \kappa$$

## Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

|     |  |                                                                                                                                       |
|-----|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1) |  | $\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; \quad w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$                                                                        |
| (2) |  | $\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; \quad w_3 = \frac{F\ell^3}{3EI}$                                                                     |
| (3) |  | $\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$                                                                     |
| (4) |  | $\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$ |
| (5) |  | $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$                                  |
| (6) |  | $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$                                 |
| (a) |  | $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$                  |

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

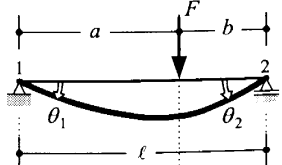
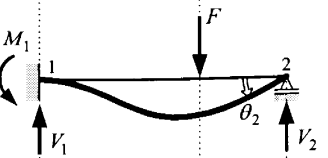
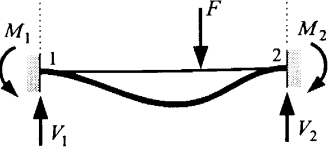
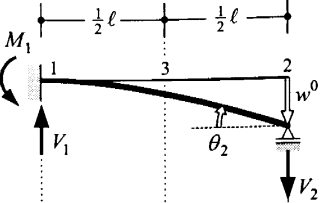
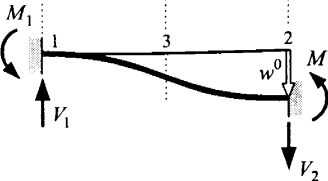
vergeet-mij-nietjes

|      |  |                                                                                                                                                                                         |
|------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (7)  |  | $\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{32} \frac{T\ell^2}{EI}$<br>$M_1 = \frac{1}{2} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$                                        |
| (8)  |  | $\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}$<br>$M_1 = \frac{3}{16} F\ell; \quad V_1 = \frac{11}{16} F; \quad V_2 = \frac{5}{16} F$       |
| (9)  |  | $\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$<br>$M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; \quad V_1 = \frac{5}{8} q\ell; \quad V_2 = \frac{3}{8} q\ell$ |
| (10) |  | $w_3 = \frac{1}{192} \frac{F\ell^3}{EI}$<br>$M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F\ell; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$                                                                            |
| (11) |  | $w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$<br>$M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$                                                                     |
| (b)  |  | $\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$<br>$M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$                                                               |

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma'sche liggers met buigstijfheid  $EI$ .  
 $T$ ,  $F$  en  $q$  zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.  
 $M_i$  en  $V_i$  zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede  $i$  van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

|     |                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (c) |    | $\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left( 2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left( \frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$                                                                                                                                                                                                                                                         |
| (d) |    | $M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left( \frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left( 1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left( \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left( \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ |
| (e) |   | $M_1 = \frac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell \left( \frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left( 1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left( \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left( 3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$                                                                                              |
| (f) |  | $M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| (g) |  | $M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

drie bij-de handjes

zettingen