

Tentamen CT3109

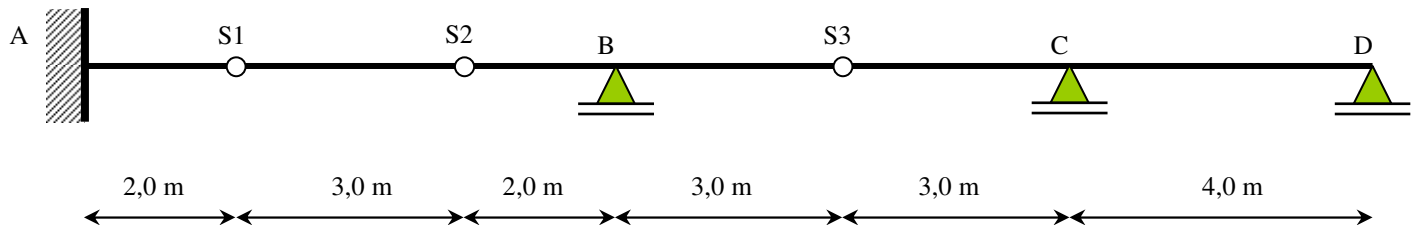
CONSTRUCTIEMECHANICA 4

15 april 2013,
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 4 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Maak gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Let op de aangegeven tijd per vraagstuk

OPGAVE 1 : Invloedslijnen**(ca 45 min)**

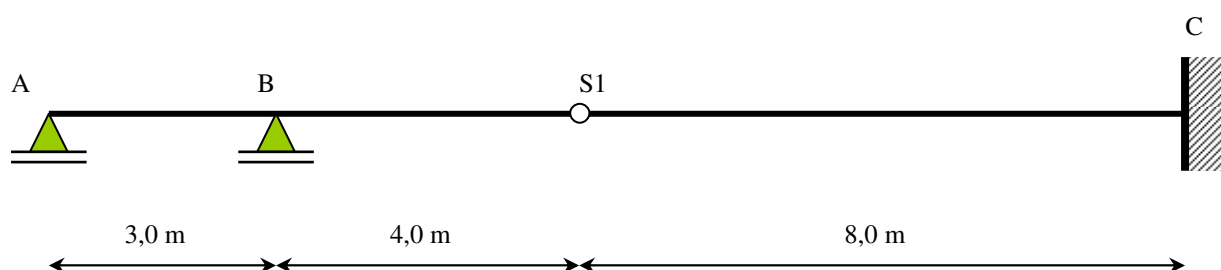
Deze opgave bestaat uit twee delen. Hieronder is een scharnierligger gegeven. De ligger is in A volledig ingeklemd en heeft drie scharnieren S1 t/m S3.

**Vragen deel 1:**

- Construeer de invloedslijn voor het inklemmingsmoment in A
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht links van B
- Construeer de invloedslijn voor de oplegreactie in B
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht rechts van S3
- Schets de invloedslijn voor de hoekverdraaiing in B
- Construeer de invloedslijn voor de zakking van scharnier S2

Let op : Construeren houdt in dat de invloedslijn ook kwantitatief moet worden bepaald, schetsen houdt in dat de invloedslijn kwalitatief moet worden bepaald waarbij duidelijk moet worden aangegeven of lijnen recht of gekromd zijn.

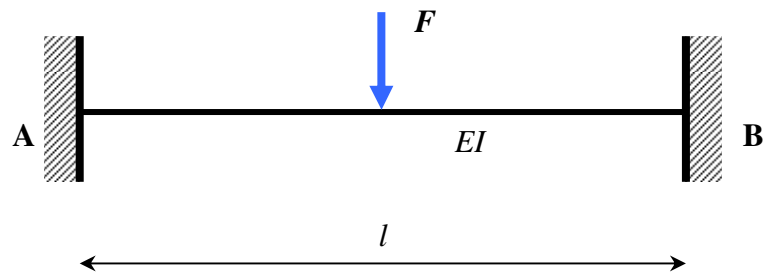
Een aangepaste constructie is hieronder weergegeven.

**Vragen deel 2:**

- Schets de invloedslijn voor het inklemmingsmoment in C
- Schets de invloedslijn voor de dwarskracht links van B
- Schets de invloedslijn voor de oplegreactie in A

OPGAVE 2 : Arbeid en Energie**(ca 45 min)**

Een links en rechts volledig ingeklemde ligger wordt halverwege belast door een verticale puntlast. De prismatische ligger heeft een buigstijfheid EI . Vervorming door dwarskracht en extensie mogen worden verwaarloosd.



Opmerking : Maak gebruik van het meegeleverde formuleblad !!!

Vragen:**Deel 1: Minimum potentiële energie**

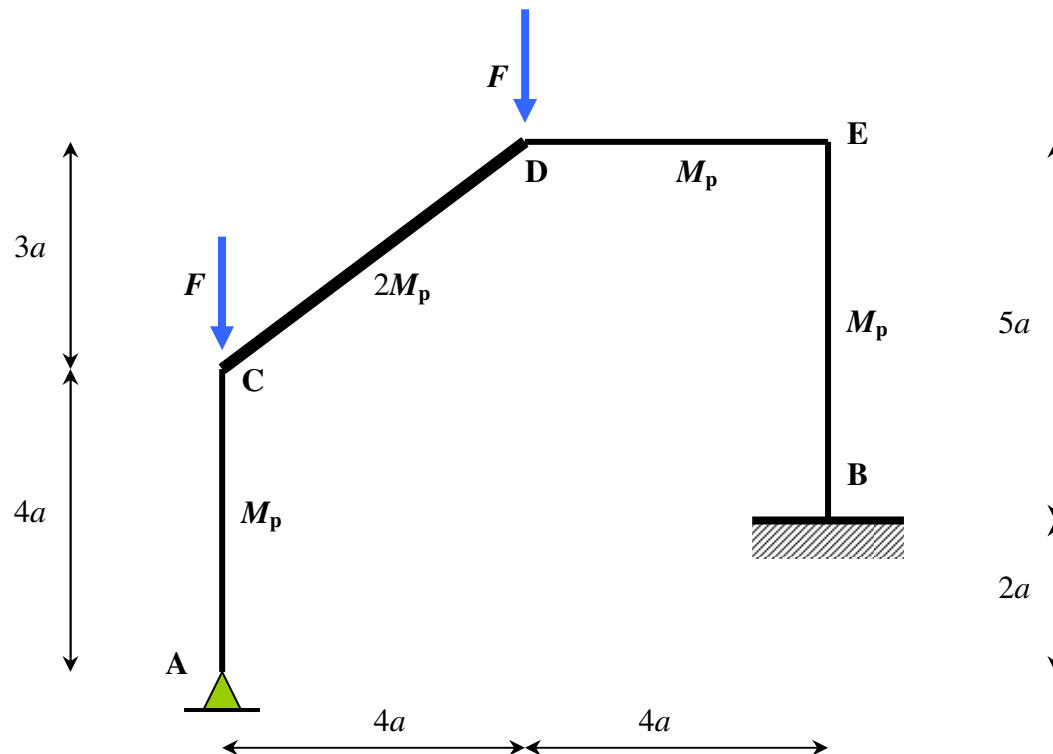
- a) Bepaal met behulp van het principe van minimum potentiële energie een schatting van de doorbuiging uitgedrukt in EI , F en l . Gebruik hiervoor een cosinus functie.
- b) Aan welke voorwaarden moet de door U opgestelde verplaatsingsfunctie voldoen?
- c) Bepaal op basis van uw antwoord bij a) de grootte van het inklemmingsmoment.

Deel 2: Castigliano

- d) Van dezelfde constructie wordt gevraagd de inklemmingsmomenten te bepalen met behulp van Castigliano. Leg uit hoe U dit aanpakt en bepaal de grootte van deze momenten.
- e) Vergelijk de uitkomst met het gevonden antwoord van deel 1. Beargumenteer eventuele verschillen.

OPGAVE 3 : Plasticiteit en bezwijkanalyse**(ca 45 min)**

Hieronder is een raamwerk getekend waarvan de bezwijklast moet worden bepaald. Het raamwerk is in B ingeklemd en in A scharnierend ondersteund. Het raamwerk wordt in C en D verticaal belast met een puntlast F . Staaf CD heeft een volplastisch moment $2M_p$, de overige staven hebben een volplastisch moment M_p .

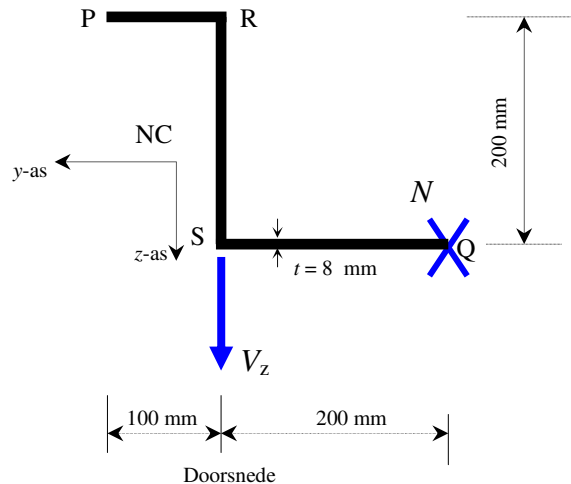
**Vragen :**

- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen.
- Bepaal de bezwijkbelasting F_p .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.

OPGAVE 4 : Niet-symmetrische doorsneden**(ca 45 min)**

Een kolom bestaande uit een z-profiel heeft een homogene doorsnede. Het betreft een stalen profiel, belast door een axiale drukkracht in punt Q en een dwarskracht met een werklijn die samenvalt met het lijf zoals in de onderstaande figuur is aangegeven. De dunwandige doorsnede heeft een elasticiteitsmodulus $E = 210 \text{ GPa}$.

Voor de doorsnedeberoekeningen wordt een y-z-assenstelsel aangehouden door het NC.



Gegevens: $E = 210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$; $N = -80 \text{ kN}$; $V_z = 10 \text{ kN}$
 $I_{yy} = 2040 \times 10^4 \text{ mm}^4$; $I_{zz} = 2773 \frac{1}{3} \times 10^4 \text{ mm}^4$;

Vragen :

- Leg uit wat de definitie is van het NC en bepaal de ligging ervan.
- Toon aan dat voor de weergegeven doorsnede geldt:

$$|I_{yz}| = 1760 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

TIP: Maak gebruik van het feit dat de doorsnede dunwandig is

- Bepaal de normaalspanningsverdeling over de doorsnede en teken deze. Geef in deze figuur ook de ligging van de neutrale lijn weer en het vlak van de belasting $m - m$ en kromming $k - k$.
- Welke vorm heeft de kern van deze doorsnede?
- Bepaal het onderste kernpunt van deze doorsnede.
- Wordt deze doorsnede op torsie belast? (motiveer uw antwoord zonder te rekenen)

THEORIE

- Als de schuifspanning gevraagd wordt in de flens t.p.v. punt R t.g.v. de gegeven dwarskracht in de doorsnede, geef dan aan hoe U deze zou bepalen.

LET OP: De berekening wordt niet gevraagd alleen de stappen hoe deze kan worden bepaald. Wees zorgvuldig in het aangeven van de stappen die gebaseerd moeten zijn op de aannamen volgens de theorie!

FORMULEBLAD

Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2EI_{yz}}{(EI_{yy} - EI_{zz})}; \quad EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Rayleigh:

$$F_k = \frac{E_v}{\int \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}$$

Wiskunde handigheidjes:

$$\int_0^l \left(\cos \frac{2\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{l}{2}$$

Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \cdot \varepsilon$$

$$M = EI \cdot \kappa$$

Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T\ell}{EI}; \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

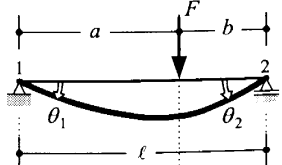
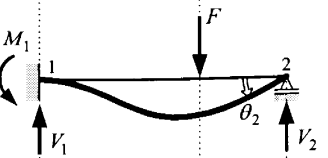
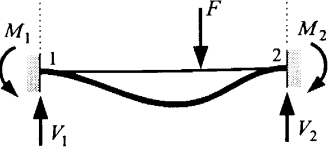
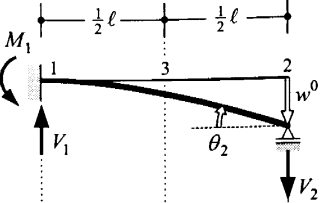
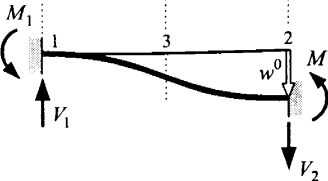
vergeet-mij-nietjes

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = \frac{1}{32} \frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}; w_3 = \frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F\ell; V_1 = \frac{11}{16} F; V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; V_1 = \frac{5}{8} q\ell; V_2 = \frac{3}{8} q\ell$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F\ell; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$
(b)		$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{T\ell}{EI}; w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma'sche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

zettingen