

Tentamen CT3109

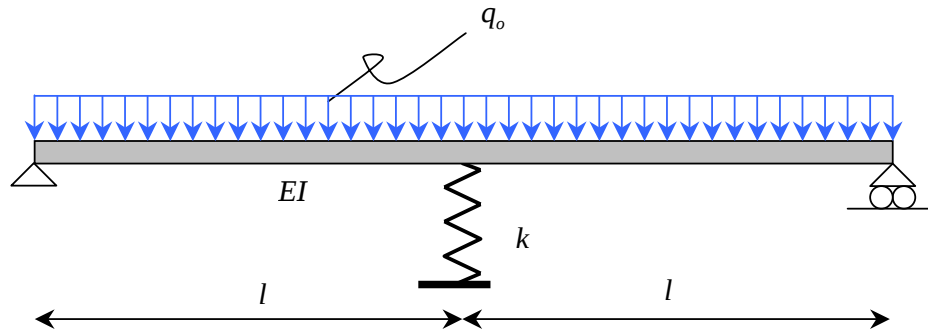
**CONSTRUCTIEMECHANICA 4**

16 jan 2008,  
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 4 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons en UMTS tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Het gebruik van de grafische rekenmachine is toegestaan
- Maak zonodig gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Let op de aangegeven tijd per vraagstuk

**OPGAVE 1 : Arbeid en Energie****( ca 50 min )**

In de onderstaande figuur is een buigligger weergegeven die halverwege wordt ondersteund met een veer met een veerstijfheid  $k$ . Over de gehele ligger werkt een verticale, gelijkmatig verdeelde, belasting  $q_o$ .



Gegevens :  $EI = 5000 \text{ kNm}^2$ ;  $l = 10 \text{ m}$ ;  $q_o = 5 \text{ kN/m}$ ;  $k = 500 \text{ kN/m}$

**Vragen:**

- a) Toon met behulp van Castigliano aan dat de uitdrukking voor de kracht in de veer, in absolute zin, gelijk is aan:

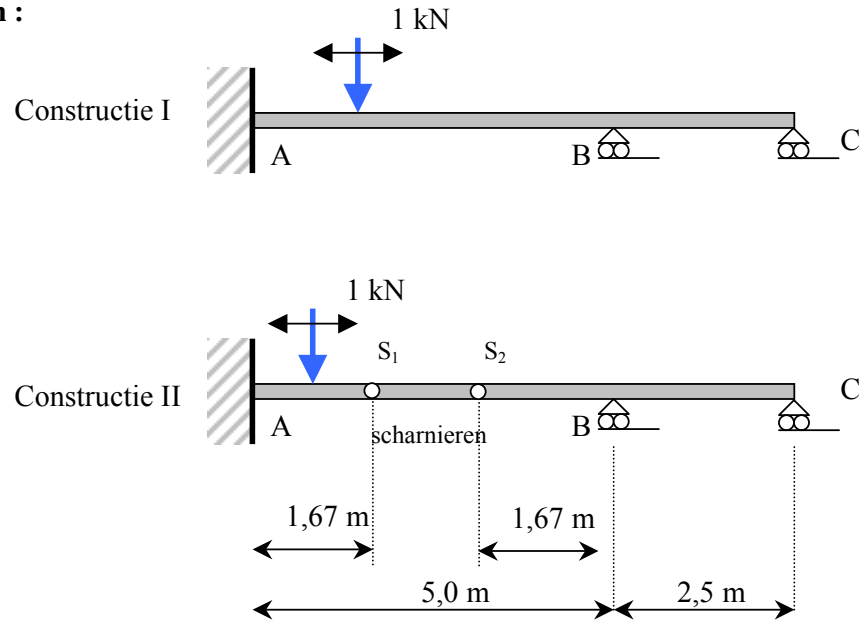
$$F_v = \frac{5k}{24 + \frac{4kl^3}{EI}} \times \frac{ql^4}{EI}$$

- b) Bepaal het liggermoment t.p.v. de verende ondersteuning voor de gegeven waarden.

**OPGAVE 2 : Invloedslijnen****( ca 30 min )**

Van de hieronder getekende constructies wordt gevraagd een aantal invloedslijnen te tekenen.

**Gegeven :**



**Vragen :**

Schets voor Constructie I, in één figuur onder elkaar, de invloedslijnen voor :

- De verticale oplegreactie in B
- De zakking halverwege AB
- Het inklemmingsmoment in A
- De dwarskracht links van B
- De dwarskracht rechts van B
- De hoekverdraaiing in B

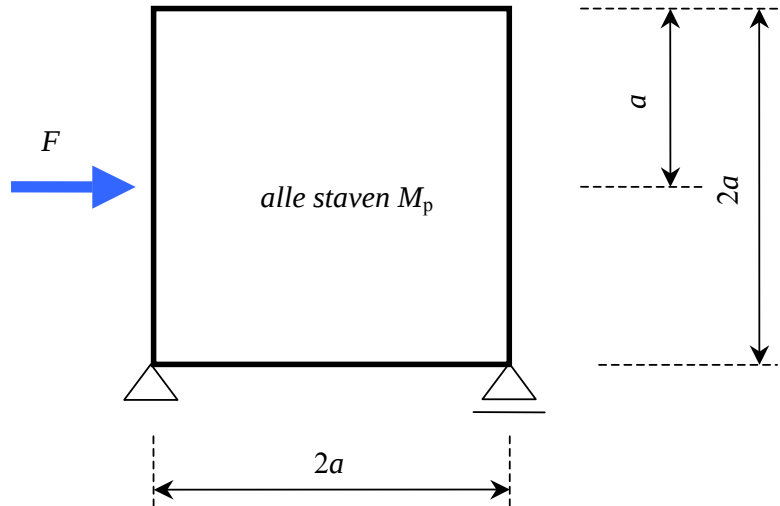
Construeer voor Constructie II de invloedslijnen voor :

- De verticale oplegreactie in B
- Het inklemmingsmoment in A
- De dwarskracht links van B

**Opmerking :** Construeren houdt in dit verband in dat de vorm en de invloedsfactoren van de invloedslijn volledig zijn bepaald.

**OPGAVE 3 : Plasticiteit en bezwijkanalyse****( ca 50 min )**

Hieronder is een vierkant raamwerk getekend waarvan de bezwijklast moet worden bepaald. Halverwege de linker stijl wordt de constructie belast met de aangegeven horizontale puntlast  $F$ . Alle staafdelen hebben een sterkte  $M_p$ .

**Vragen :**

- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen.
- Bepaal de bezwijkbelasting  $F_p$ .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.

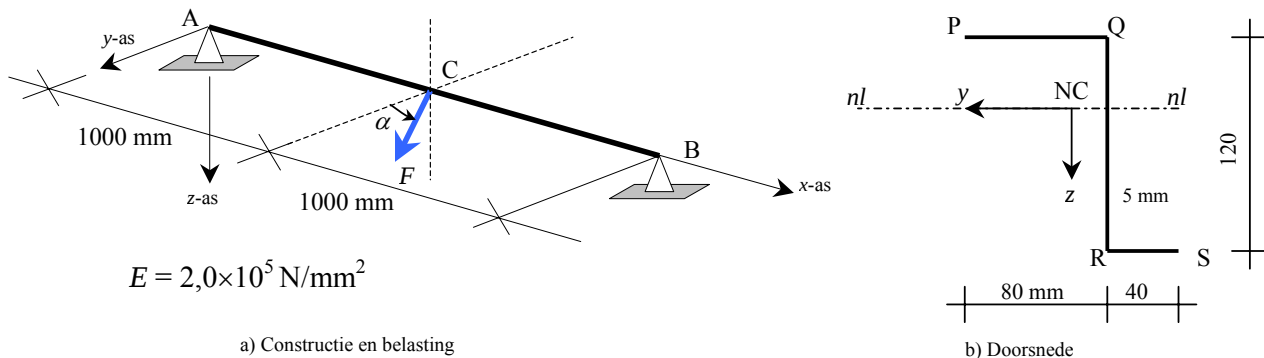
## OPGAVE 4

( ca 50 min )

Van een op buiging belaste eenvoudig opgelegde ligger in figuur a) is de homogene niet-symmetrische doorsnede in figuur b) weergegeven. Deze doorsnede mag worden beschouwd als een **dunwandig profiel** met een plaatdikte van 5 mm en een elasticiteitsmodulus van  $2,0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ . De ligger wordt halverwege de overspanning belast door een nog onbekende puntlast  $F$  die werkt in het yz-vlak van de doorsnede. De nog onbekende richting van deze kracht is aangegeven met de hoek  $\alpha$ .

Verder is gegeven:

1. Dat de neutrale lijn  $nl$  samenvalt met de  $y$ -as,
2. De maximale trekspanning in de doorsnede t.p.v. C  $140 \text{ N/mm}^2$  bedraagt,
3. De puntlast aangrijpt in het dwarskrachtencentrum waardoor er geen torsie optreedt.



## Vragen:

- Toon aan dat voor de doorsnede de volgende doorsnedegrootheden gelden:  
 $I_{yy} = 0.84 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ;  $I_{yz} = -1.08 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ;  $I_{zz} = 2.76 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ;
- Teken de normaalspanningsverdeling voor de doorsnede t.p.v. C.
- Bepaal de componenten van het moment  $M$  in de doorsnede t.p.v. C en bepaal de *grootte* en *richting* van de belasting  $F$  t.p.v. C.
- Geef het belastingsvlak  $m$  en het krommingsvlak  $k$  aan in de doorsnede t.p.v. C.
- Bepaal de maximum schuifspanning in de doorsnede direct links van punt C t.g.v. de door u bepaalde belasting  $F$ .

# FORMULEBLAD

## Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_{yy}EI_{zz} - EI_{yz}^2} \begin{bmatrix} EI_{zz} & -EI_{yz} \\ -EI_{yz} & EI_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xm} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

## Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

## Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

## Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

## Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

## Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \varepsilon$$

$$M = EI \kappa$$

## Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

Hulpmiddelen bij het integreren van producten van functies e.d. :

|                   | $m$                          |                              |                                                      |                             |
|-------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------|
|                   |                              |                              |                                                      |                             |
| $\frac{1}{3} jkl$ | $\frac{1}{6} jkl$            | $\frac{1}{6} jkl$            | $\frac{1}{6} (j_1 + 2j_2) kl$                        | $\frac{1}{2} jkl$           |
|                   | $\frac{1}{6} jkl$            | $\frac{1}{3} jkl$            | $\frac{1}{6} (2j_1 + j_2) kl$                        | $\frac{1}{2} jkl$           |
|                   | $\frac{1}{6} j(k_1 + 2k_2)l$ | $\frac{1}{6} j(2k_1 + k_2)l$ | $\frac{1}{6} \{j_1(2k_1 + k_2) + j_2(k_1 + 2k_2)\}l$ | $\frac{1}{2} j(k_1 + k_2)l$ |
|                   | $\frac{1}{2} jkl$            | $\frac{1}{2} jkl$            | $\frac{1}{2} (j_1 + j_2) kl$                         | $jkl$                       |
|                   | $\frac{1}{6} jk(l+a)$        | $\frac{1}{6} jk(l+b)$        | $\frac{1}{6} \{j_1(l+b) + j_2(l+a)\}k$               | $\frac{1}{2} jkl$           |
|                   | $\frac{5}{12} jkl$           | $\frac{1}{4} jkl$            | $\frac{1}{12} (3j_1 + 5j_2) kl$                      | $\frac{2}{3} jkl$           |
|                   | $\frac{1}{4} jkl$            | $\frac{5}{12} jkl$           | $\frac{1}{12} (5j_1 + 3j_2) kl$                      | $\frac{2}{3} jkl$           |
|                   | $\frac{1}{4} jkl$            | $\frac{1}{12} jkl$           | $\frac{1}{12} (j_1 + 3j_2) kl$                       | $\frac{1}{3} jkl$           |
|                   | $\frac{1}{12} jkl$           | $\frac{1}{4} jkl$            | $\frac{1}{12} (3j_1 + j_2) kl$                       | $\frac{1}{3} jkl$           |
|                   | $\frac{1}{3} jkl$            | $\frac{1}{3} jkl$            | $\frac{1}{3} (j_1 + j_2) kl$                         | $\frac{2}{3} jkl$           |

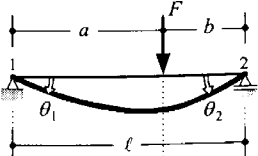
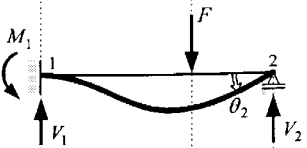
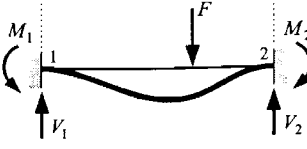
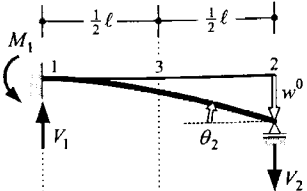
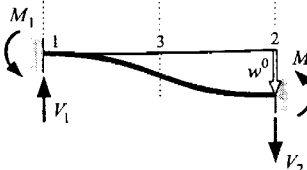
|     |  |                                                                                                                  |
|-----|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1) |  | $\theta_2 = \frac{TL}{EI}; w_2 = \frac{7L^2}{2EI}$                                                               |
| (2) |  | $\theta_2 = \frac{FL^2}{2EI}; w_2 = \frac{FL^3}{3EI}$                                                            |
| (3) |  | $\theta_2 = \frac{qL^3}{6EI}; w_2 = \frac{qL^4}{8EI}$                                                            |
| (4) |  | $\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{TL}{EI}; \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{TL}{EI}; w_3 = \frac{1}{16} \frac{7L^2}{EI}$ |
| (5) |  | $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{FL^2}{EI}; w_3 = \frac{1}{48} \frac{FL^3}{EI}$                         |
| (6) |  | $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI}; w_3 = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$                        |
| (a) |  | $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{TL}{EI}; \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{TL}{EI}; w_3 = 0$               |

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

vergeet-mij-nietjes

|                                                   |  |                                                                                |                                                                      |
|---------------------------------------------------|--|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd) |  | statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)                             |                                                                      |
| (7)                                               |  | $\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{TL}{EI}; w_3 = \frac{1}{32} \frac{7L^2}{EI}$     | $M_1 = \frac{1}{2} FL; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$                    |
| (8)                                               |  | $\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{FL^2}{EI}; w_3 = \frac{7}{768} \frac{FL^3}{EI}$ | $M_1 = \frac{3}{16} FL; V_1 = \frac{11}{16} F; V_2 = \frac{5}{16} F$ |
| (9)                                               |  | $\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{qL^3}{EI}; w_3 = \frac{1}{192} \frac{qL^4}{EI}$ | $M_1 = \frac{1}{8} qL^2; V_1 = \frac{5}{8} qL; V_2 = \frac{3}{8} qL$ |
| (10)                                              |  | $w_3 = \frac{1}{192} \frac{FL^3}{EI}$                                          | $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} FL; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$              |
| (11)                                              |  | $w_3 = \frac{1}{384} \frac{qL^4}{EI}$                                          | $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} qL^2; V_1 = V_2 = \frac{1}{2} qL$          |
| (b)                                               |  | $\theta_3 = \frac{1}{16} \frac{TL}{EI}; w_3 = 0$                               | $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$               |

Enkele formules voor prismaïsche liggers met buigstijfheid  $EI$ .  
 $T$ ,  $F$  en  $q$  zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.  
 $M_i$  en  $V_i$  zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede  $i$  van de ligger ten gevolge van de oplegcrachten.

|     |                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (c) |    | $\theta_1 = \frac{Fb(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left( 2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left( \frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$                                                                                                                                                                                                                                                          |
| (d) |    | $M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left( \frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left( 1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left( \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left( \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ |
| (e) |   | $M_1 = \frac{Fb^2}{\ell^2} = F\ell \left( \frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left( 1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left( \frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left( 3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$                                                                                               |
| (f) |  | $M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| (g) |  | $M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

drie bij-de handjes

zettingen