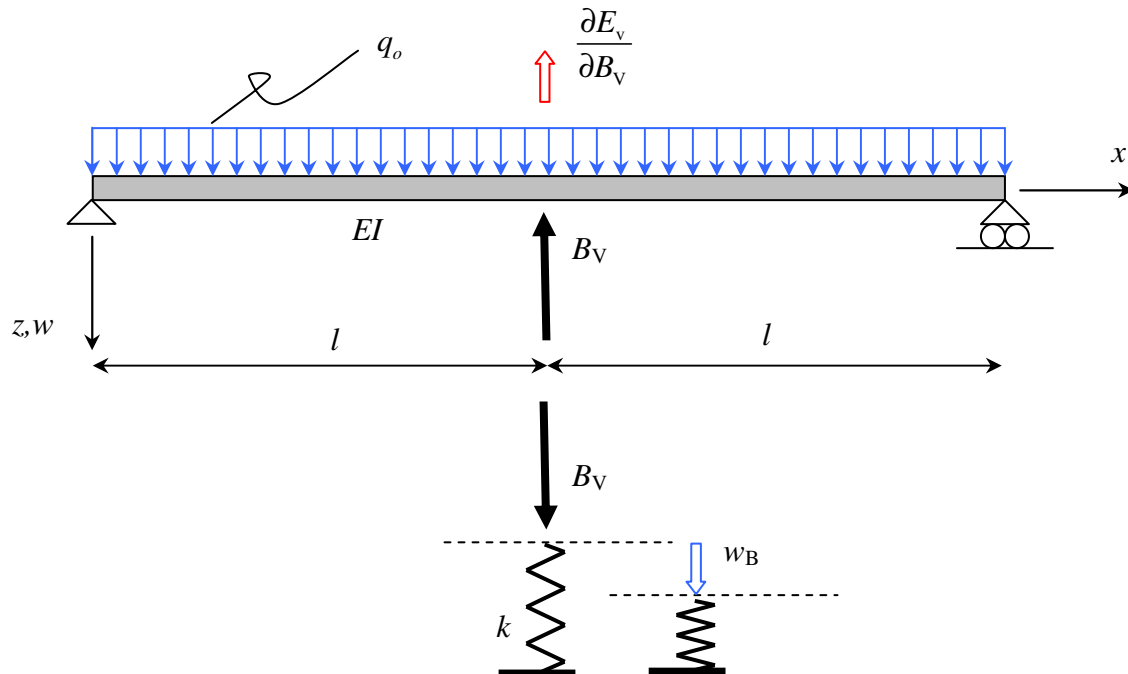


ANTWOORDEN

OPGAVE 1 : Arbeid en energie

De enkelvoudig statisch onbepaalde constructie kan worden geschematiseerd tot een statisch bepaald hoofdsysteem waarbij de oplegreactie in B de statisch onbepaalde is.



Van dit systeem kan de momentenlijn worden bepaald, uitgedrukt in de belasting q en de nog onbekende statisch onbepaalde B_v .

Als alleen op de ligger Castigliano's 2^e wet wordt toegepast dan is bekend dat de afgeleide van de vormveranderingsenergie in de ligger naar de kracht de verplaatsing oplevert *in de richting van de kracht* ter plaatse van deze kracht. Dat is hier de verplaatsing van punt B op de ligger *in de richting van de aangegeven statisch onbepaalde* !

Deze verplaatsing is echter bekend, immers de verende ondersteuning zakt over een afstand:

$$w_B = \frac{B_v}{k} \quad (\text{in de positieve } z\text{-richting !})$$

De vormveranderingsvoorwaarde die moet worden gehanteerd in de 2^e wet van Castigliano voor de ligger is hiermee:

$$\frac{dE_v}{dB_v} = -w_B = -\frac{B_v}{k}$$

Uitwerken van dit probleem levert voor de M -lijn over de helft van de ligger:

$$M(x) = \frac{1}{2} q_o x (2l - x) - \frac{1}{2} B_v x \quad 0 \leq x \leq l$$

Toepassen van de 2^e wet van Castigliano levert:

$$\frac{dE_v}{dB_v} = \frac{d \left[2 \int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx \right]}{dB_v} = 2 \int_0^l \frac{2M(x)}{2EI} \times \frac{dM(x)}{dB_v} dx = 2 \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \times \frac{dM(x)}{dB_v} dx$$

De afgeleide van het moment naar de statisch onbepaalde levert:

$$\frac{dM(x)}{dB_v} = -\frac{1}{2}x$$

Invullen van de onderdelen in de uitdrukking voor de verplaatsing in de richting van de statisch onbepaalde levert:

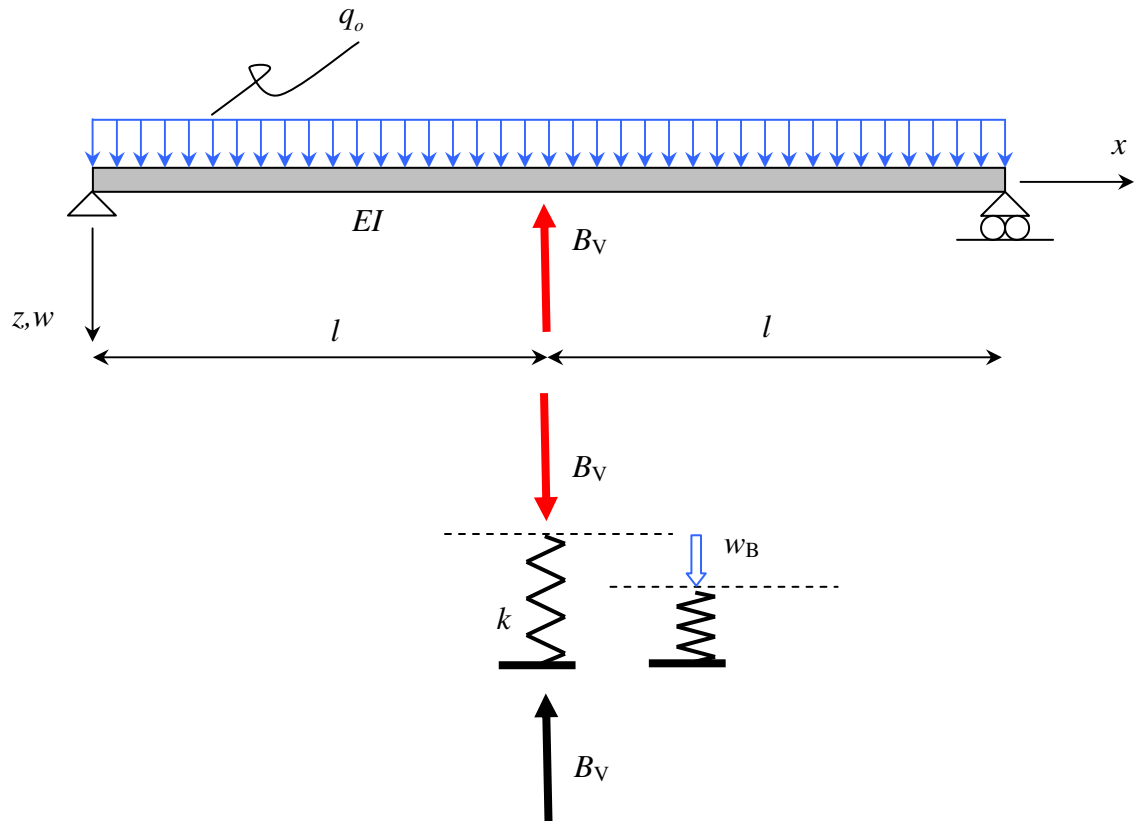
$$\begin{aligned} \frac{dE_v}{dB_v} &= 2 \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \times \frac{dM(x)}{dB_v} dx = \frac{2}{EI} \int_0^l \left(\frac{1}{2} q_o x (2l - x) - \frac{1}{2} B_v x \right) \times \left(-\frac{1}{2} x \right) dx \\ &= \frac{2}{EI} \int_0^l \left(-\frac{1}{2} q_o l x^2 + \frac{1}{4} q_o x^3 + \frac{1}{4} B_v x^2 \right) dx = \frac{2}{EI} \left[-\frac{1}{6} q_o l x^3 + \frac{1}{16} q_o x^4 + \frac{1}{12} B_v x^3 \right]_0^l \\ &= \frac{2}{EI} \times \left(-\frac{1}{6} q_o l^4 + \frac{1}{16} q_o l^4 + \frac{1}{12} B_v l^3 \right) \end{aligned}$$

Verwerken van de vormveranderingsvoorwaarde levert:

$$\begin{aligned} \frac{dE_v}{dB_v} &= \frac{2}{EI} \times \left(-\frac{1}{6} q_o l^4 + \frac{1}{16} q_o l^4 + \frac{1}{12} B_v l^3 \right) = -\frac{B_v}{k} \Leftrightarrow \\ -\frac{5}{48} q_o l^4 + \frac{1}{12} B_v l^3 &= -\frac{B_v \times EI}{2k} \Leftrightarrow \\ B_v &= \frac{5}{24 + \frac{4kl^3}{EI}} \times \frac{q_o l^4}{EI} \end{aligned}$$

Extra uitleg (werd niet gevraagd op het tentamen)

Een alternatief waarbij de gehele constructie in beschouwing wordt genomen is ook mogelijk. In dat geval wordt de vormveranderingsenergie van de ligger en van de veer bepaald en wordt de 2^e wet van Castigliano toegepast op de oplegreactie t.p.v. de ondersteuning van de veer.



De momentenverdeling in de ligger is identiek aan de eerder gevonden uitdrukking:

$$M(x) = \frac{1}{2} q_o x (2l - x) - \frac{1}{2} B_V x \quad 0 \leq x \leq l$$

De totale vormveranderingenergie in de constructie bestaat nu uit een deel dat in de ligger is opgeslagen en een deel dat in de veer is opgeslagen:

$$E_v = 2 \int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx + \frac{B_V^2}{2k}$$

Toepassen van de 2^e wet van Castigliano op de totale constructie levert als vormveranderingsvoorwaarde dat de verplaatsing t.p.v. de oplegging van de veer gelijk is aan nul:

$$\frac{dE_v}{dB_V} = 0$$

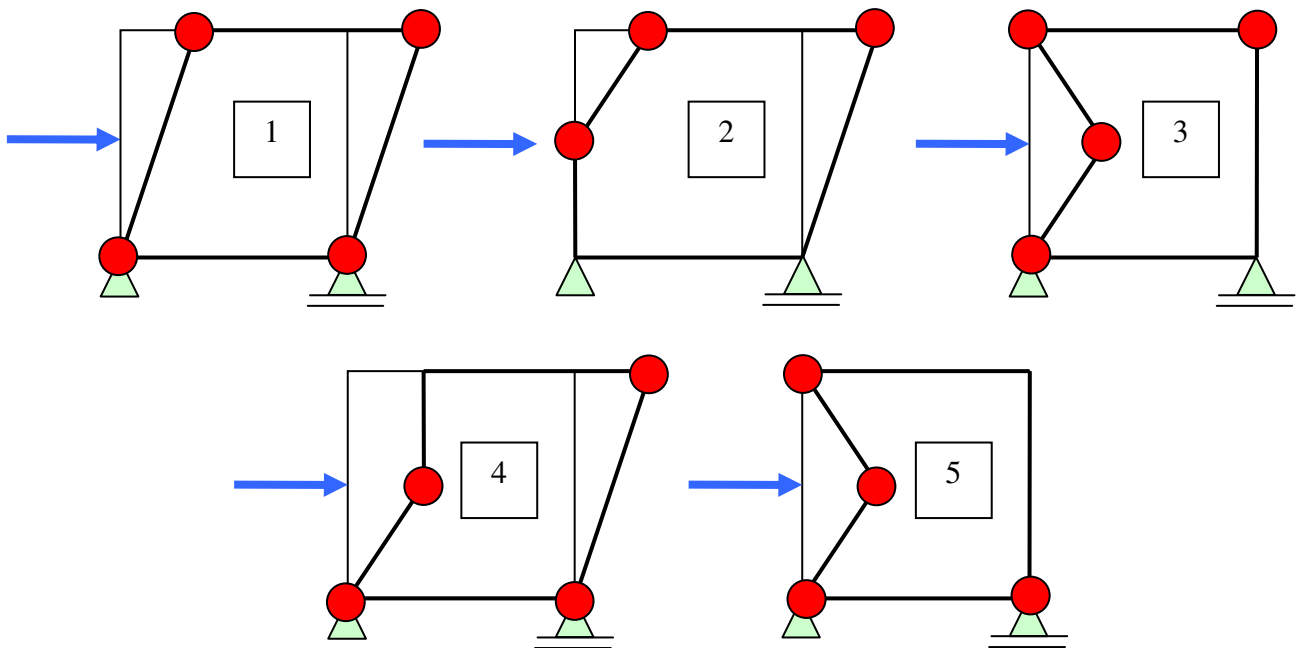
Uitwerken van deze eis levert exact dezelfde uitkomst op, ga dat zelf maar eens na.

OPGAVE 2 : Invloedslijnen

Zie eerdere tentamens en de voorbeelden in het dictaat.

OPGAVE 3 : Plasticiteitsleer

De constructie is drie-voudig statisch onbepaald. Let wel, uitwendig is de constructie wel statisch bepaald maar vanwege de celvormige constructie zijn er extra onbekenden waardoor de constructie inwendig drie-voudig statisch onbepaald is. Er zijn maximaal 4 scharnieren nodig om een mechanisme te doen laten ontstaan. Deze scharnieren kunnen op 5 plaatsen ontstaan waarmee er 5 combinaties mogelijk zijn. De 5 mechanismen zijn hieronder geschetst.



Duidelijk wordt dat mechanisme 2 niet kan optreden en dat 3 en 5 hetzelfde zijn. Er hoeven daarom slechts drie mechanismen te worden onderzocht.

Voor deze drie mechanismen worden de volgende bezwijkbelastingen gevonden:

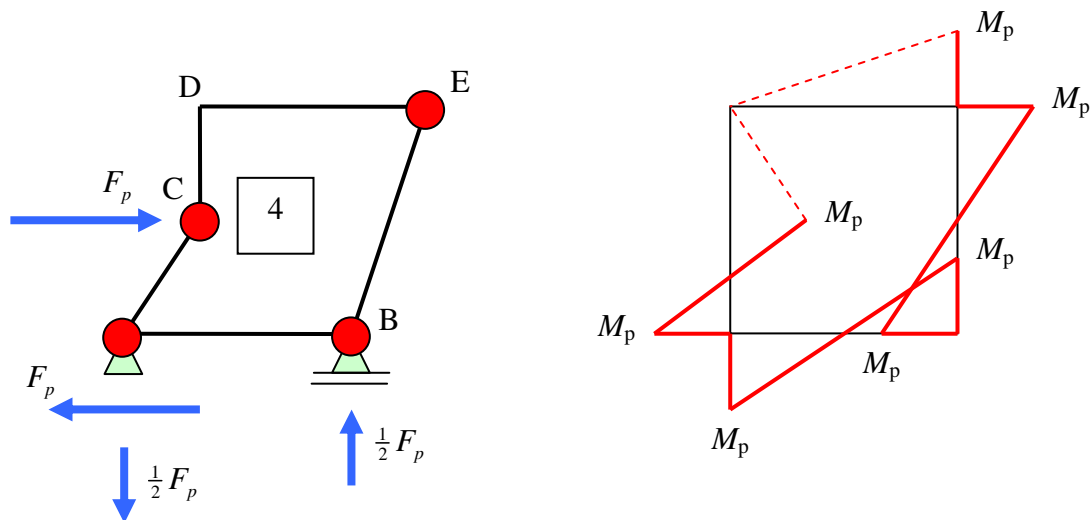
$$1 \quad F_p = \frac{4M_p}{a}$$

$$3 \quad F_p = \frac{4M_p}{a}$$

$$4 \quad F_p = \frac{3M_p}{a} \quad \text{maatgevend}$$

Mechanisme 4 is het maatgevende mechanisme. Volgens de eenduidigheidsstelling van Prager mag nergens in de constructie de sterkte overschreden worden. Dit kan worden gecontroleerd door de momentenlijn te tekenen voor mechanisme 4.

Bijna de gehele momentenlijn is direct te tekenen, alleen het moment in de linkerbovenhoek is nog onbekend.



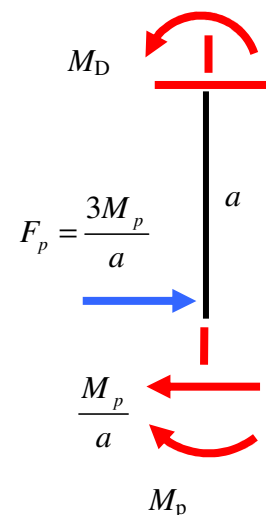
Het moment in D is te vinden door het evenwicht van een deel van de constructie te bekijken.

De eenvoudigste manier is om staaf CD vrij te maken juist onder C. Hier zijn het moment en de dwarskracht bekend. De normaalkracht is nog onbekend maar als het momentenevenwicht om D wordt genomen speelt deze kracht geen rol in de evenwichtsvergelijking.

De dwarskracht haal je uit de helling van de momentenlijn onder C.

De momentensom van het vrijgemaakte deel om D levert:

$$\sum T|_D = 0 \quad \frac{3M_p}{a} \times a - \frac{2M_p}{a} \times a - M_p - M_D = 0 \Leftrightarrow M_D = 0$$

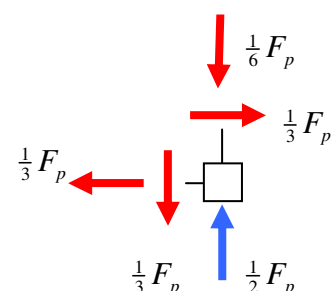


Het moment in D blijkt juist gelijk te zijn aan nul waarmee is aangetoond dat nergens in de constructie de sterkte wordt overschreden. Dit deel van de momentenlijn is gestippeld bovenaan de bladzijde weergegeven.

Een andere (ingewikkelde manier) is om deel DEB vrij te maken. Met het bekende deel van de momentenlijn zijn tevens in deze delen de dwarskrachten bekend. Deze zijn in de rechter stijl en in de onderregel gelijk aan:

$$V = \frac{2M_p}{2a} = \frac{M_p}{a} = \frac{1}{3} F_p$$

Hiervan kunnen we gebruik maken als we een deel van de constructie vrij willen maken om zo het moment in D te kunnen vinden. Daartoe maken we eerst de rechteronderhoek B vrij zoals hiernaast is weergegeven. Begin met de bekende dwarskrachten en de oplegreactie. Vervolgens volgt uit het evenwicht hoe groot de beide normaalkrachten moeten zijn.



Om het onbekende moment M_D in D te vinden wordt een deel van de constructie vrijgemaakt met de nu bekende snedekrachten in A.

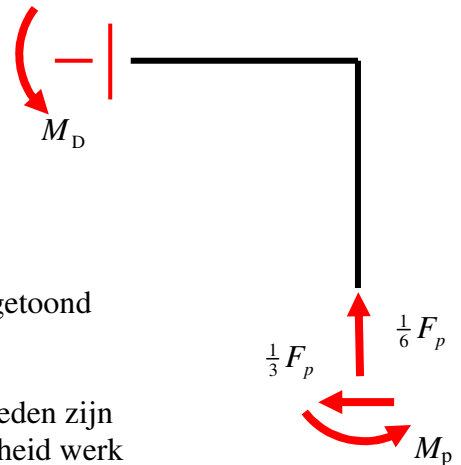
Met behulp van de momentensom om de linker bovenhoek D kan eenvoudig het moment M_D worden bepaald:

$$M_D + M_p - \frac{1}{3}F_p \times 2a + \frac{1}{6}F_p \times 2a = 0$$

$$M_D = \frac{1}{3}F_p \times a - M_p = 0$$

Dit moment blijkt juist gelijk te zijn aan nul waarmee is aangetoond dat nergens in de constructie de sterkte wordt overschreden.

Uit de beide mogelijkheden blijkt dat er meerdere mogelijkheden zijn om de momentenlijn te vinden. Verschil is alleen de hoeveelheid werk en daarvoor is wat ervaring nodig hetgeen alleen kan worden opgebouwd door veel te oefenen.



OPGAVE 4 : Niet-symmetrische doorsnede

The position of the Normal force Centre (NC) is required. The origin of the coordinate system used is located at the NC.

The vertical position of the NC with respect to the upper side of the cross section is:

$$\Delta z_{NC} = \frac{(120 \times 5 \times 60) + (40 \times 5 \times 120)}{(240 \times 5)} = 50 \text{ mm}$$

The horizontal position with respect to the left side of the cross section:

$$\Delta y_{NC} = \frac{(80 \times 5 \times 40) + (120 \times 5 \times 80) + (40 \times 5 \times 100)}{(240 \times 5)} = 70 \text{ mm}$$

The cross sectional parameters can be found as:

$$EA = E \times 240 \times 5 = 240 \times 10^6 \text{ N}$$

$$EI_{yy} = E \left[\frac{1}{12} \times 5 \times 80^3 + (80 \times 5) \times (40 - \Delta y_{NC})^2 \right] +$$

$$E \left[(120 \times 5) \times (80 - \Delta y_{NC})^2 \right]$$

$$E \left[\frac{1}{12} \times 5 \times 40^3 + (40 \times 5) \times (100 - \Delta y_{NC})^2 \right] = 0.840 \times 10^6 E = 0.168 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{zz} = E \left[(80 \times 5) \times (\Delta z_{NC})^2 \right] +$$

$$E \left[\frac{1}{12} \times 5 \times 120^3 + (120 \times 5) \times (\Delta z_{NC} - 60)^2 \right] +$$

$$E \left[(40 \times 5) \times (120 - \Delta z_{NC})^2 \right] = 2.76 \times 10^6 E = 0.552 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{yz} = E \left[80 \times 5 \times (\Delta y_{NC} - 40) \times (-\Delta z_{NC}) \right] +$$

$$E \left[120 \times 5 \times (\Delta y_{NC} - 80) \times (100 - \Delta z_{NC}) \right] +$$

$$E \left[40 \times 5 \times (\Delta y_{NC} - 100) \times (120 - \Delta z_{NC}) \right] = -1.08 \times 10^6 E = -0.216 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Since this structure is loaded in bending only, the strain at the NC must be zero. With the given neutral axis the *direction* of the curvature normal to the *na* is known therefore holds:

$$\varepsilon = 0$$

$$\kappa_y = 0$$

$$\kappa_z = \kappa$$

This single unknown can be solved with the given maximum stress of 140 N/mm^2 which must occur at R and S since these points have the maximum distance to the *na*:

$$\sigma(s) = E \times (0 + 50 \times 0 + 70 \times \kappa) = 140 \text{ N/mm}^2 \Leftrightarrow$$

$$\kappa = \frac{1}{100000}$$

The components of the moment can now be found using the constitutive relation:

$$M_y = EI_{yy} \times \kappa_y + EI_{yz} \times \kappa_z = -2.16 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_z = EI_{yz} \times \kappa_y + EI_{zz} \times \kappa_z = 5.52 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

The load which causes these components of the moment at C can be computed with :

$$F_y = 4 \times M_y / 2000 = -4320 \text{ N}$$

$$F_z = 4 \times M_z / 2000 = 11040 \text{ N}$$

The *direction* of this force can be expressed by using the given definition of the angle α :

$$\tan \alpha = \frac{F_z}{F_y} = \frac{M_z}{M_y} = -\frac{23}{9} \Rightarrow \alpha = \alpha_m = -68.6^\circ \quad (\text{plane of loading} = \text{plane of moment})$$

The magnitude of the load F becomes:

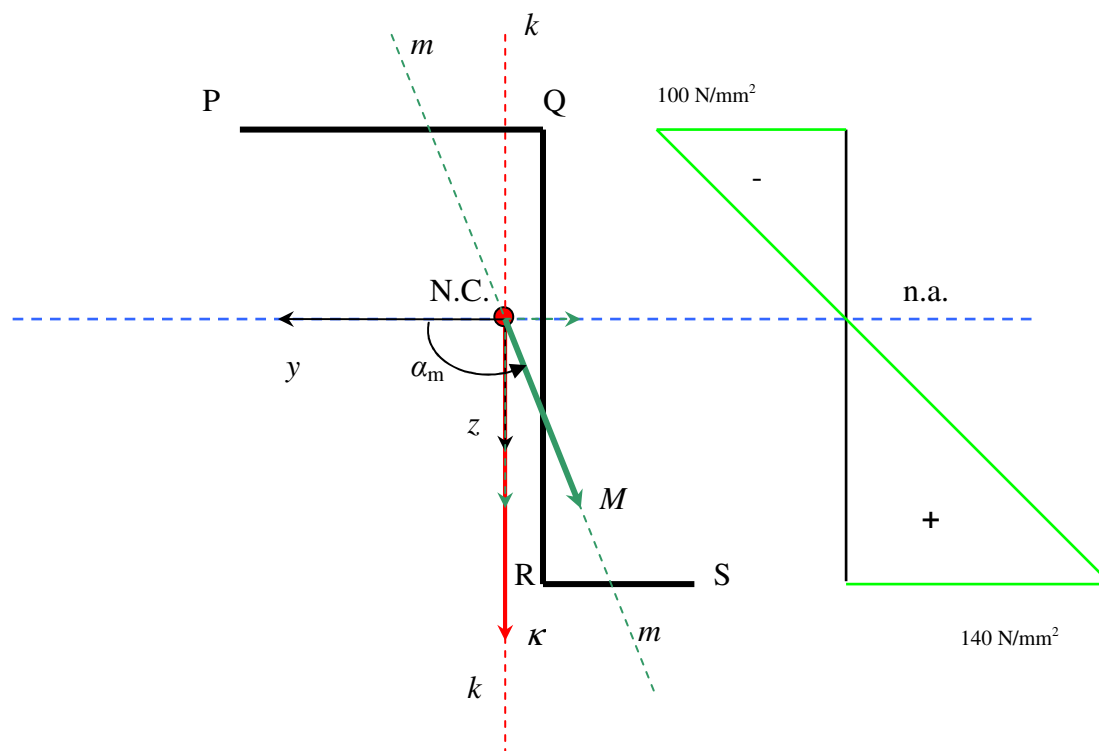
$$F = \sqrt{F_y^2 + F_z^2} = 11855 \text{ N}$$

The stress distribution can be checked with the results which are given in the table below.

Table : Stress in the specified points

Material	point	y [mm]	z [mm]	E [N/mm ²]	Stress [N/mm ²]
1	P	70	-50	200000	-100
	Q	-10	-50	200000	-100
	R	-10	70	200000	140
	S	-50	70	200000	140

The graphical presentation of the stress distribution at C is given in the next graph. The neutral axis goes through the NC since the normal force N is zero.



The moment M and thus the load F acts in the x - m plane. The curvature κ acts in the x - k plane. Due to the unsymmetrical cross section these planes do not coincide.

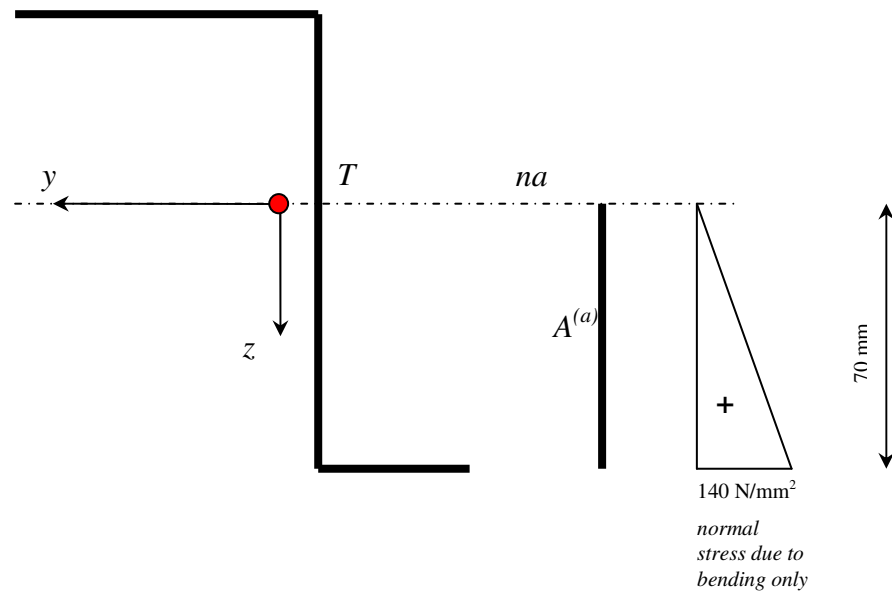
The maximum shear stress occurs at the point of intersection T of the na and the cross section since the normal stress distribution shown is due to bending only! Since the cross section is unsymmetrical we have to use the general method to find the shear stresses:

$$\sigma_{xm} = \frac{R_M^{(a)}}{t \times M} \times V$$

$$V = \frac{1}{2} F = 5928 \text{ N}$$

$$\text{with : } M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = 5.928 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

$$R_M^{(a)} = \frac{1}{2} \times 140 \times 5 \times 70 + 40 \times 5 \times 140 = 52500 \text{ N}$$



The maximum shear stress at T thus becomes:

$$\sigma_{xm} = \frac{52500}{5 \times 5.928 \times 10^6} \times 5928 = 10,5 \text{ N/mm}^2$$