

Tentamen CT3109

CONSTRUCTIEMECHANICA 4

16 april 2012,
09:00 – 12:00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 **opgaven**.
- Werk elke opgave uit op een **afzonderlijk blad**.
- Vermeld op elk blad rechtsboven uw **naam** en **studienummer**
- In de beoordeling van het werk wordt ook de **netheid** van de presentatie betrokken
- Het gebruik van mobiele telefoons tijdens het tentamen is niet toegestaan, dus uitzetten en van tafel verwijderen !
- Maak gebruik van de meegeleverde formulebladen
- Let op de aangegeven tijd per vraagstuk

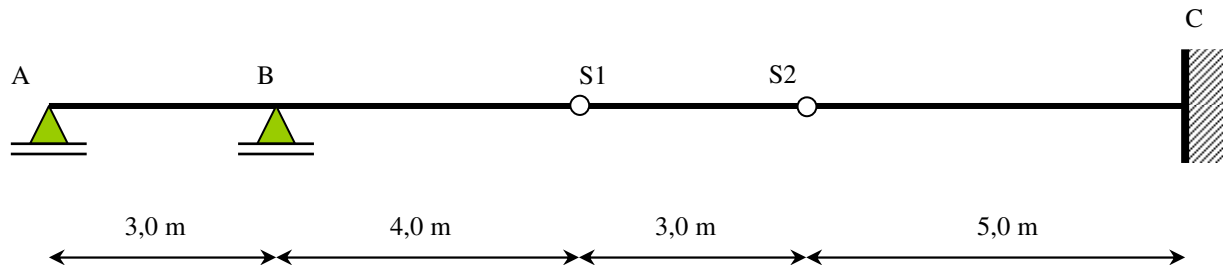
OPGAVE 1 : Theorievragen**(ca 30 min)**

Beantwoord de onderstaande vragen kort en bondig. Ondersteun het antwoord zonodig met een duidelijke schets.

- a) Leg uit hoe de invloedslijn voor de hoekverdraaiing kan worden bepaald en laat duidelijk zien in uw antwoord welke stappen vanuit de theorie nodig zijn om tot uw aanpak te komen.
- b) Geef aan hoe met behulp van arbeid en energie de formule van Rayleigh kan worden gevonden. Onderbouw uw antwoord zonodig met schetsjes.
- c) Van welke vooronderstelling wordt uitgegaan bij het toepassen van de bezwijkanalyse?
- d) Geef aan uit welke onderdelen de bovengrensbenadering van Prager voor het vinden van de bezwijkbelasting bestaat. Maak daarbij ook duidelijk waar de naam bovengrens vandaan komt.

OPGAVE 2 : Invloedslijnen**(ca 30 min)**

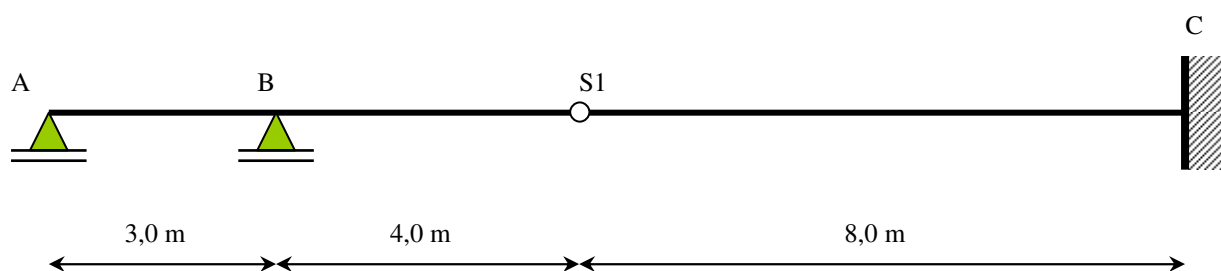
Deze opgave bestaat uit twee delen. Hieronder is een statisch bepaalde constructie gegeven. De ligger is in C volledig ingeklemd en heeft twee scharnieren S1 en S2.

**Vragen deel 1:**

- Construeer de invloedslijn voor het inkeermomentsmoment in C
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht links van B
- Construeer de invloedslijn voor de dwarskracht rechts van B
- Construeer de invloedslijn voor de hoekverdraaiing in B
- Construeer de invloedslijn voor de zetting van scharnier S2

Let op : Construeren houdt in dat de invloedslijn ook kwantitatief moet worden bepaald, schetsen houdt in dat de invloedslijn kwalitatief moet worden bepaald waarbij duidelijk moet worden aangegeven of lijnen recht of gekromd zijn.

Door het verwijderen van scharnier S2 ontstaat een statisch onbepaalde constructie zoals hieronder is weergegeven.

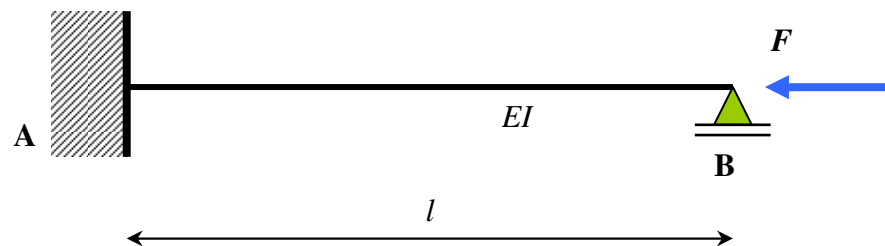
**Vragen deel 2:**

- Schets de invloedslijn voor het inkeermomentsmoment in C
- Schets de invloedslijn voor de dwarskracht links van B
- Schets de invloedslijn voor de dwarskracht rechts van B

OPGAVE 3 : Arbeid en Energie**(ca 30 min)**

Een op druk belaste staaf knikt bij een bepaalde kracht F . Voor het bepalen van de knikkracht wordt voorgesteld de methode van Rayleigh toe te passen. Een passend verplaatsingsveld wordt aangenomen. Om de kniklast zo goed mogelijk te benaderen wordt voorgesteld om een verplaatsingsveld aan te nemen dat aan alle randvoorwaarden voldoet.

$$w(x) = \frac{3}{2}al^2x^2 - \frac{5}{2}alx^3 + ax^4$$



Opmerking : Maak gebruik van het meegeleverde formuleblad.

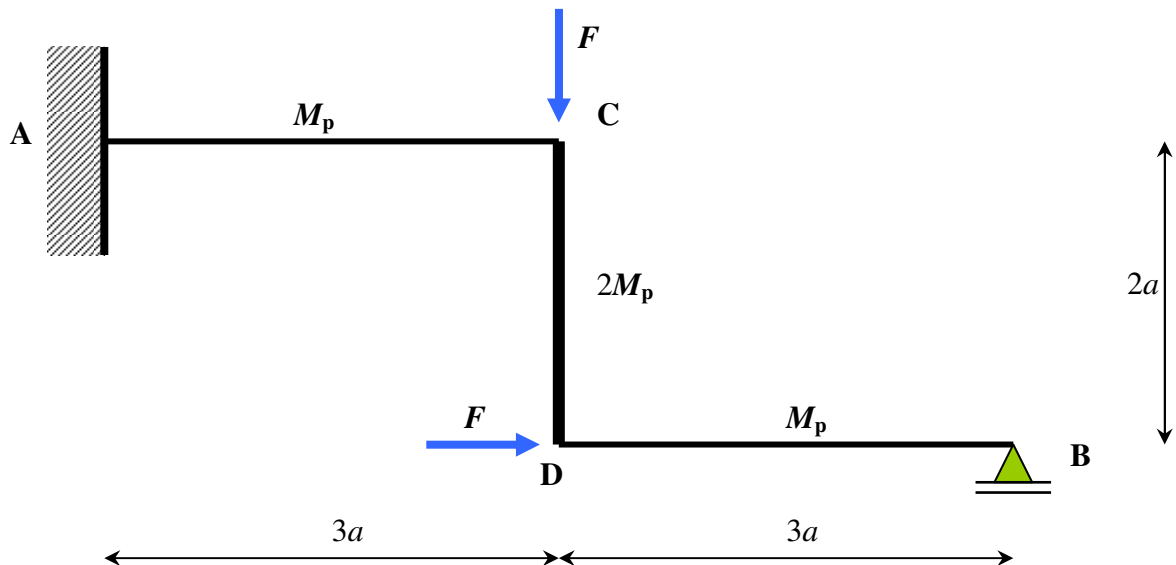
Vragen:

- Welke randvoorwaarde is extra gebruikt bij dit verplaatsingsveld?
- Laat zien dat het gegeven verplaatsingsveld inderdaad voldoet aan uw randvoorwaarden.
- Welk verplaatsingsveld zou u als polynoom voorstellen als alleen aan de kinematische voorwaarden moet worden voldaan?
- Bepaal de kniklast op basis van het gegeven verplaatsingsveld m.b.v. de methode van Rayleigh. Gebruik zonodig de formules op het formuleblad.
- Vergelijk deze uitkomst met de exacte uitkomst volgens Euler.
- Is het voldoen aan alle randvoorwaarden noodzakelijk en/of leidt dit ook tot een betere benadering van de kniklast dan wanneer u alleen voldoet aan de kinematische randvoorwaarden?

Noot : Beargumenteer uw antwoord op basis van de theorie en ga dus niet rekenen!

OPGAVE 4 : Plasticiteit en bezwijkanalyse**(ca 45 min)**

Hieronder is een raamwerk getekend waarvan de bezwijklast moet worden bepaald. Het raamwerk is in A ingeklemd en in B opgelegd op een horizontale rol. Het raamwerk wordt in D horizontaal en in C verticaal belast met een puntlast F . Staaf CD heeft een volplastisch moment $2M_p$, de overige staven hebben een volplastisch moment M_p .

**Vragen :**

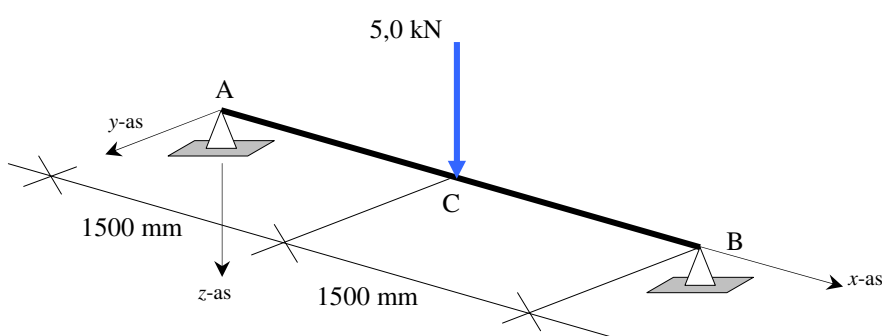
- Bepaal de mogelijke bezwijkmechanismen.
- Bepaal de bezwijkbelasting F_p .
- Teken voor het maatgevende mechanisme de momentenlijn met relevante waarden en vervormingstekens.

OPGAVE 5 : Niet-symmetrische doorsneden**(ca 45 min)**

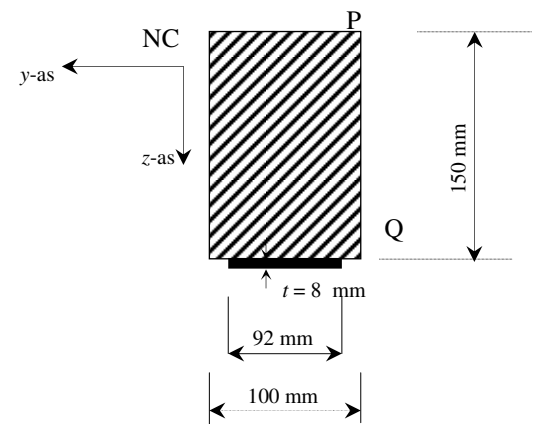
Een in A en B opgelegde balk heeft een inhomogene doorsnede. Het betreft een houten balk die versterkt is met een stalen strip aan de onderzijde. De ligger wordt in C belast met de in figuur (a) aangegeven puntlast. De doorsnede met een totale hoogte van 158 mm en een totale breedte van 100 mm is in figuur (b) weergegeven. Van de gebruikte materialen is gegeven:

- hout $E = 10 \text{ GPa}$
- staal $E = 210 \text{ GPa}$

De invloed van de normaalkrachtvervorming mag worden verwaarloosd. Voor de doorsnede berekeningen wordt een y-z-assenstelsel aangehouden door het NC.



(a) Constructie met belasting



(b) Doorsnede

Vragen :

- a) Leg uit wat de definitie is van het NC en bepaal de ligging ervan.
- b) Toon aan dat voor de weergegeven doorsnede t.p.v. C ongeveer geldt :

$$EI_{zz} = 7,57 \times 10^2 \text{ kNm}^2$$

- c) Bepaal t.p.v. de middendoorsnede de rekverdeling en teken deze.
- d) Bepaal t.p.v. de middendoorsnede de normaalspanningsverdeling en teken deze.
- e) Bereken de schuifkracht per eenheid van lengte in de interface tussen hout en staal.
- f) Bepaal de zakking van punt C.
- g) Bepaal het bovenste kernpunt van deze doorsnede.

FORMULEBLAD

Inhomogene en/of niet-symmetrische doorsneden :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y y + \kappa_z z \quad \text{en:} \quad \sigma(y, z) = E(y, z) \times \varepsilon(y, z)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/y_1 \\ -1/z_1 \end{bmatrix}$$

$$s_x^{(a)} = -\frac{V_y ES_y^{(a)}}{EI_{yy}} - \frac{V_z ES_z^{(a)}}{EI_{zz}}; \quad \text{of:} \quad s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2EI_{yz}}{(EI_{yy} - EI_{zz})}; \quad EI_{1,2} = \frac{1}{2}(EI_{yy} + EI_{zz}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(EI_{yy} - EI_{zz})\right)^2 + EI_{yz}^2}$$

Vormveranderingsenergie:

$$E_v = \int \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_v = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (\text{buiging})$$

Complementaire energie:

$$E_c = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{extensie})$$

$$E_c = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (\text{buiging})$$

Stellingen van Castigliano:

$$F_i = \frac{\partial E_v}{\partial u_i} \quad u_i = \frac{\partial E_c}{\partial F_i}$$

Rayleigh:

$$F_k = \frac{E_v}{\int \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}$$

Wiskunde handigheidjes:

$$w = c_1 x^2 + c_2 x^3 + x^4$$

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = 4c_1^2 l + 12c_1 c_2 l^2 + 12c_2^2 l^3 + 16c_1 l^3 + 36c_2 l^4 + \frac{144}{5} l^5$$

$$\int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = \frac{4}{3} c_1^2 l^3 + 3c_1 c_2 l^4 + \frac{9}{5} c_2^2 l^5 + \frac{16}{5} c_1 l^5 + 4c_2 l^6 + \frac{16}{7} l^7$$

Kinematische betrekkingen:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

Constitutieve betrekkingen:

$$N = EA \cdot \varepsilon$$

$$M = EI \cdot \kappa$$

Arbeidsmethode met eenheidslast:

$$u = \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$$

(1)		$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}; \quad w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)		$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}; \quad w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)		$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}; \quad w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)		$\theta_1 = \frac{1}{6} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_2 = \frac{1}{3} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{16} \frac{T\ell^2}{EI}$
(5)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$
(6)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$
(a)		$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24} \frac{T\ell}{EI}; \quad \theta_3 = \frac{1}{12} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)

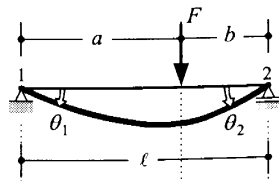
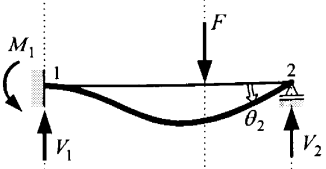
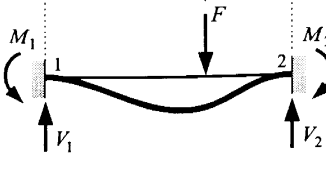
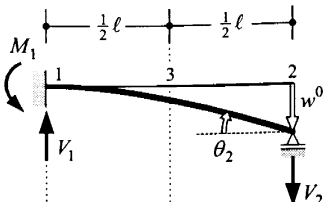
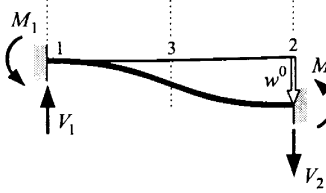
vergeet-mij-nietjes

(7)		$\theta_2 = \frac{1}{4} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{32} \frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$
(8)		$\theta_2 = \frac{1}{32} \frac{F\ell^2}{EI}; \quad w_3 = \frac{7}{768} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16} F\ell; \quad V_1 = \frac{11}{16} F; \quad V_2 = \frac{5}{16} F$
(9)		$\theta_2 = \frac{1}{48} \frac{q\ell^3}{EI}; \quad w_3 = \frac{1}{192} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8} q\ell^2; \quad V_1 = \frac{5}{8} q\ell; \quad V_2 = \frac{3}{8} q\ell$
(10)		$w_3 = \frac{1}{192} \frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8} F\ell; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} F$
(11)		$w_3 = \frac{1}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12} q\ell^2; \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2} q\ell$
(b)		$\theta_2 = \frac{1}{16} \frac{T\ell}{EI}; \quad w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4} T; \quad V_1 = V_2 = \frac{3}{2} T$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

Enkele formules voor prisma'sche liggers met buigstijfheid EI .
 T , F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
 M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

(c)		$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI} \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(d)		$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F \left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(e)		$M_1 = \frac{Fb^2}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3} \right)$ $V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell \left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3} \right)$
(f)		$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_2 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}$ $\theta_3 = \frac{9}{8} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16} w^0$
(g)		$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2} w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3} w^0$ $\theta_3 = \frac{3}{2} \frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2} w^0$

drie bij-de handjes

zettingen