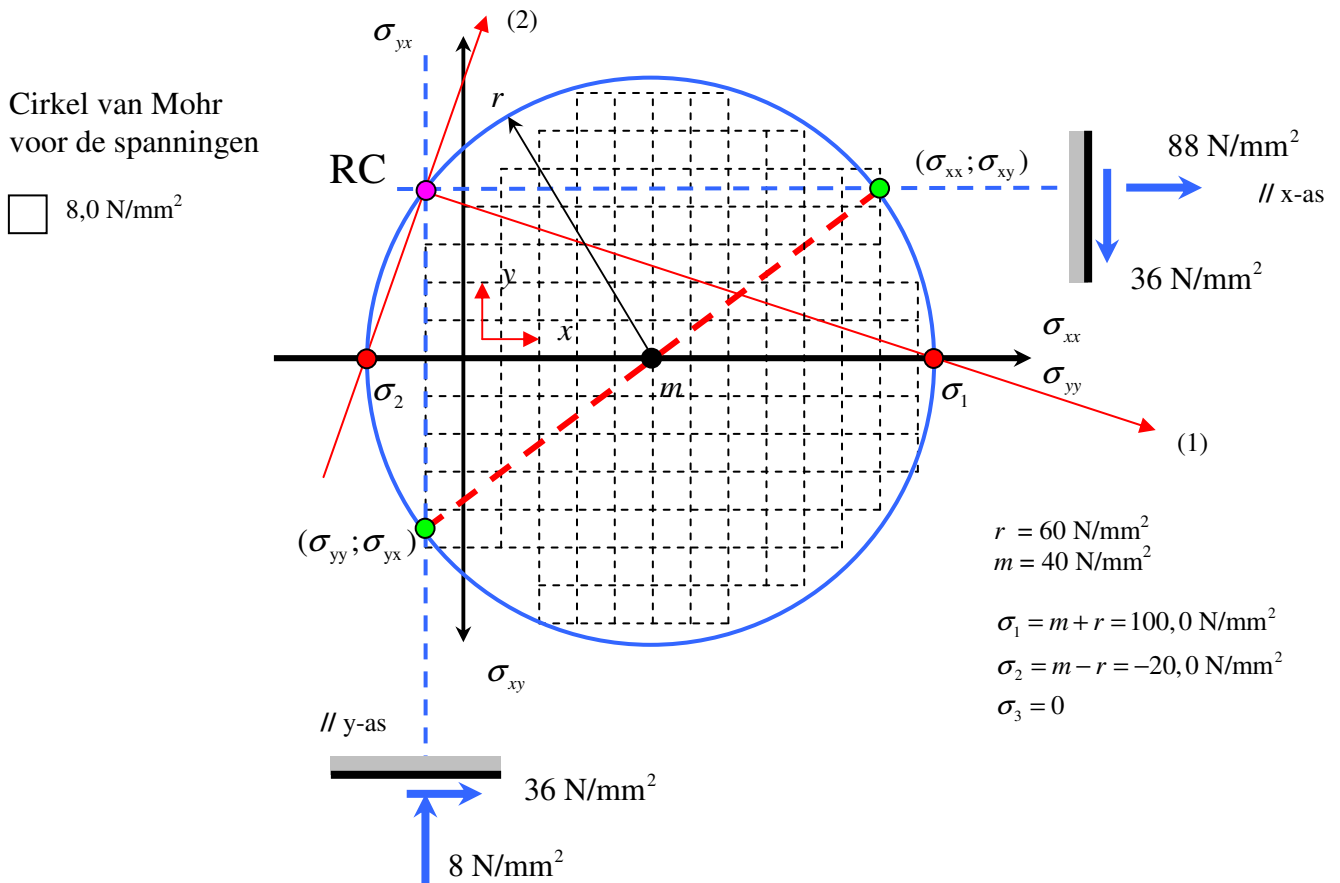


ANTWOORDEN

OPGAVE 1

- a) Hoofdspanningstensor is : $\sigma_{1-2} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}$
- b) De cirkel van Mohr kan getekend worden op basis van de gegeven hoofdspanningen en hoofdrichtingen. De plaats van het RC op de cirkel ligt hiermee vast.



- c) De spanningen op de vlakken kunnen worden bepaald met de cirkel van Mohr door de normaal van het vlak door het RC te tekenen en het snijpunt met de cirkel te bepalen. De spanningstensor in het x - y -assenstelsel is:

$$\sigma_{x-y} = \begin{bmatrix} 88 & -36 \\ -36 & -8 \end{bmatrix}$$

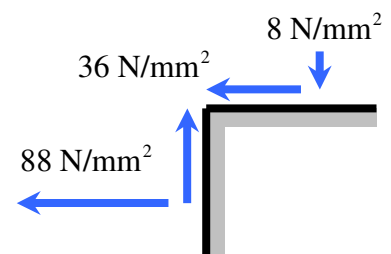
- d) Zie figuur rechts:
- e) Met de spannings-rek formules wordt de rektensor in

het x - y - assenstelsel: $\epsilon_{x-y} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 6,0 & -3,0 \\ -3,0 & -2,0 \end{bmatrix}$

- f) Toetsen aan Tresca houdt in dat de grootste cirkeldiameter maatgevend is:

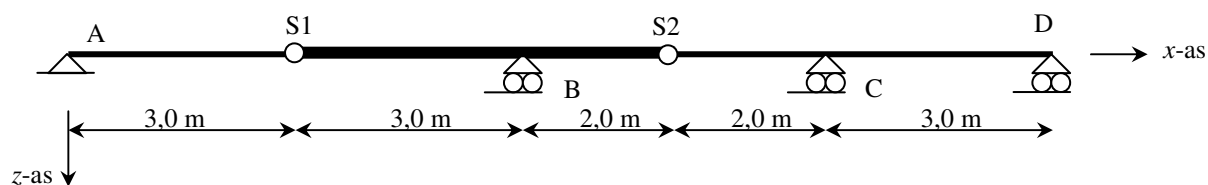
$$\gamma = \frac{115}{120} = 0,96$$

Het materiaal bezwijkt volgens het model van Tresca.

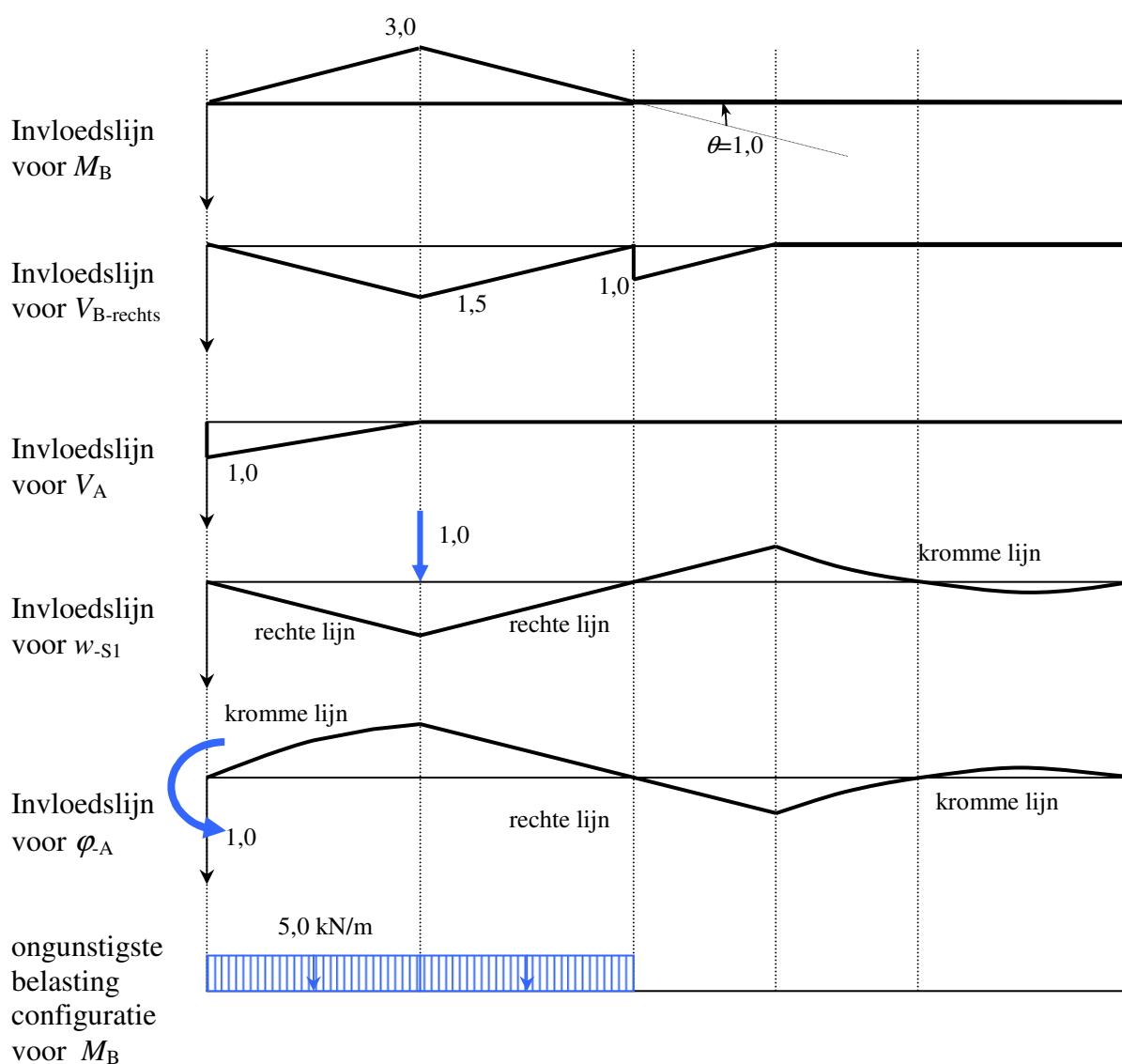


OPGAVE 2

De constructie is hieronder nog eens weergegeven :



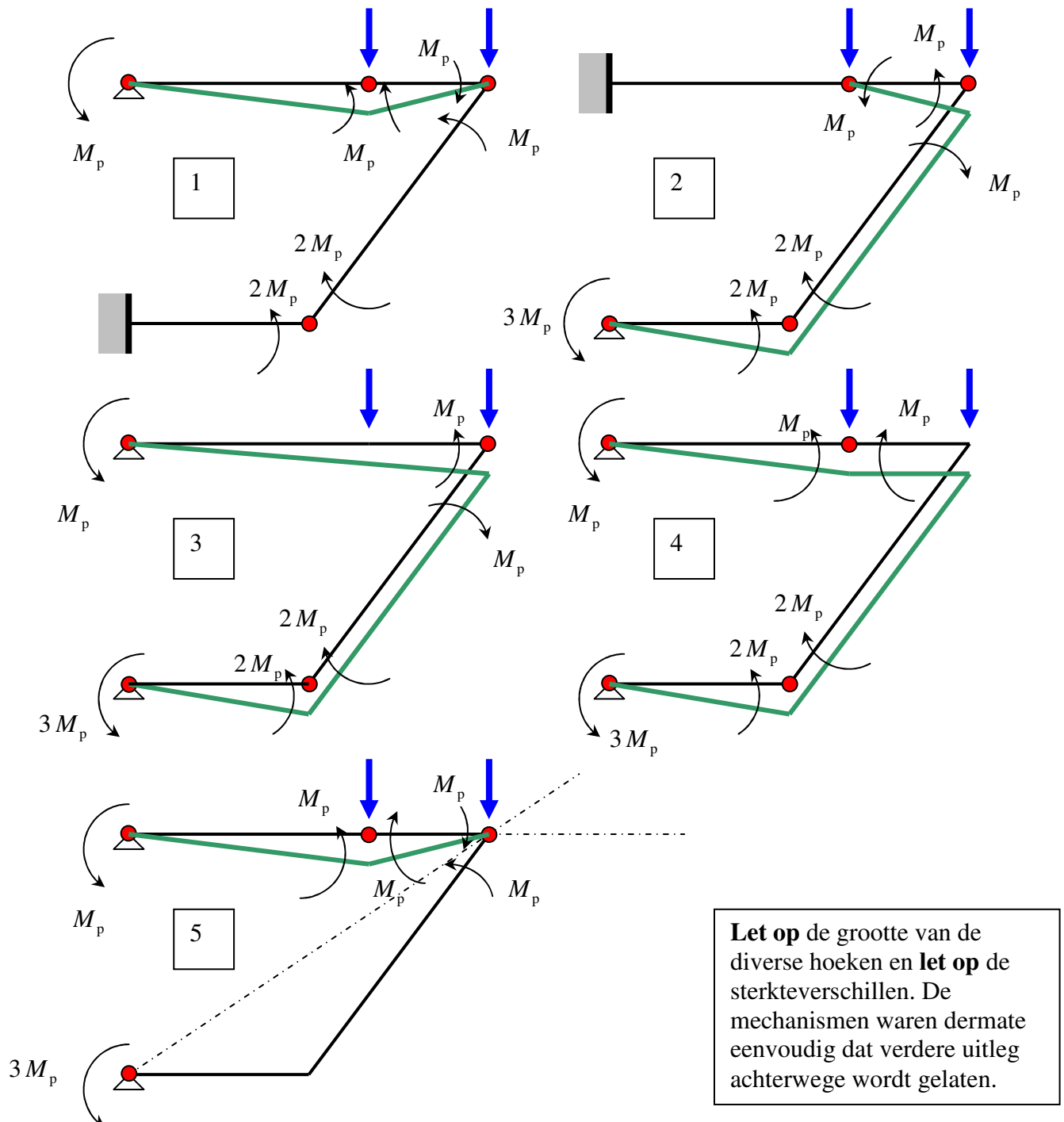
De bijbehorende invloedslijnen t.g.v. een eenheidslast zijn hieronder weergegeven.



$$M_{B\text{-max}} = 5,0 \times \left(\frac{1}{2} \times (-3,0) \times 6,0\right) = -45 \text{ kNm}$$

OPGAVE 3

- a) De constructie is drievoudig statisch onbepaald. Er zijn 4 plastische scharnier nodig om een mechanisme te laten ontstaan. Dit scharnier kan op 5 plaatsen ontstaan. Daarmee zijn er 5 mogelijke mechanismen.



Figuur : Vijf mogelijke mechanismen

Mechanisme 1 :

$$-M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta - M_p \times 2\delta\theta - M_p \times 2\delta\theta + F_p \times 2a \times \delta\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_p = \frac{6M_p}{2a} = 3,0 \frac{M_p}{a}$$

Mechanisme 2:

$$-M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta - 3M_p \times \frac{2}{3}\delta\theta - 2M_p \times \frac{2}{3}\delta\theta + F_p \times a \times \delta\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_p = \frac{16M_p}{3a} = 5\frac{1}{3} \frac{M_p}{a}$$

Mechanisme 3:

$$-M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta - 3M_p \times 2\delta\theta - 2M_p \times 2\delta\theta + F_p \times 2a \times \delta\theta + F_p \times 3a \times \delta\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_p = \frac{12M_p}{5a} = 2\frac{2}{5} \frac{M_p}{a}$$

Mechanisme 4: (maatgevend mechanisme)

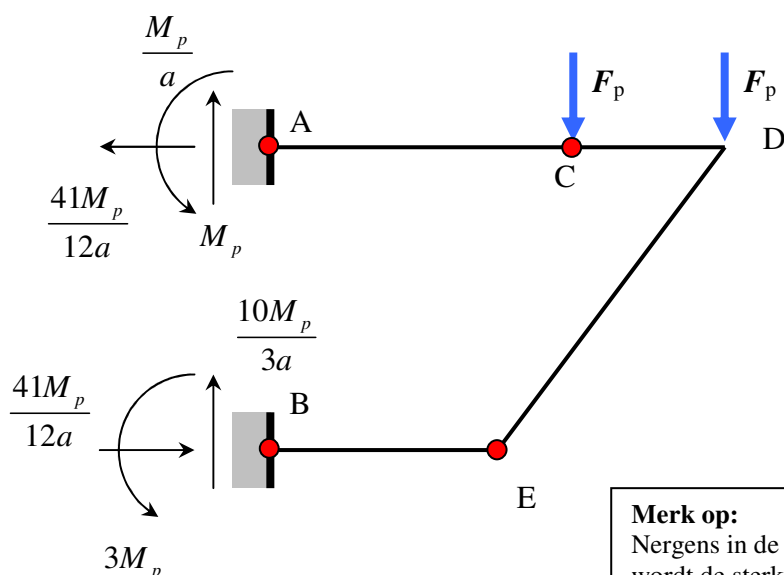
$$-M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta - 3M_p \times \frac{4}{3}\delta\theta - 2M_p \times \frac{4}{3}\delta\theta + F_p \times 2a \times \delta\theta + F_p \times 2a \times \delta\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_p = \frac{26M_p}{12a} = 2\frac{1}{6} \frac{M_p}{a}$$

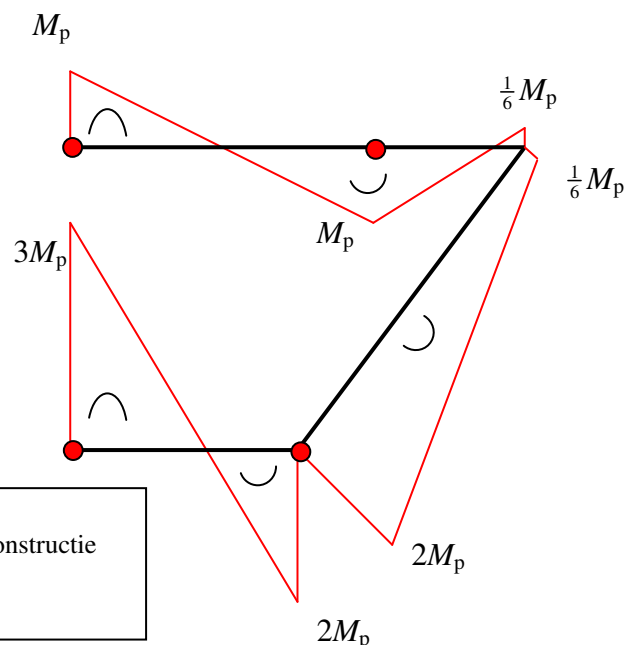
Mechanisme 5 = Mechanisme 1

De laagste bezwijklast wordt geleverd door mechanisme 4. Als nergens in de constructie de sterkte van de staafdelen wordt overschreden moet mechanisme 4 het bezwijkmechanisme zijn. Ter controle wordt de momentenlijn behorende bij mechanisme 4 getekend.

TIP : De horizontale oplegreactie in B kan gevonden worden uit het momentenevenwicht van de gehele constructie om A. Vervolgens kunnen met de vrijgemaakte staven AC en BE en de bekende momenten op de uiteinden van deze staven, de verticale oplegreacties in A en B worden bepaald.



Figuur : Oplegreacties



Figuur : M-lijn

OPGAVE 4

- a) Ten opzichte van de bovenrand ligt het NC op:

$$z_{NC} = \frac{t \times a \times \frac{1}{2}a + 2 \times t \times a \times a}{3a \times t} = \frac{5a}{6} = 41,67 \text{ mm}$$

Ten opzichte van de linkerrand ligt het NC op:

$$y_{NC} = \frac{a \times t \times 0 + 2a \times t \times a}{3a \times t} = \frac{2a}{3} = 33,33 \text{ mm}$$

De traagheidsgrootheden kunnen nu worden bepaald t.o.v. het NC:

$$EA = 3Eat = 180 \times 10^6 \text{ N}$$

$$EI_{yy} = E \left[\frac{1}{12} t \times 8a^3 + 2ta \times \left(\frac{1}{3}a\right)^2 + ta \times \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \right] = \frac{4}{3} Eta^3 = 2000 \times 10^8 \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{zz} = E \left[\frac{1}{12} t \times a^3 + ta \times \left(\frac{1}{3}a\right)^2 + 2at \times \left(\frac{1}{6}a\right)^2 \right] = \frac{1}{4} Eta^3 = 375 \times 10^8 \text{ Nmm}^2$$

$$EI_{yz} = E \left[ta \times \left(-\frac{2}{3}a\right) \times \left(\frac{1}{3}a\right) + 2ta \times \left(\frac{1}{3}a\right) \times \left(-\frac{1}{6}a\right) \right] = -\frac{1}{3} Eta^3 = -500 \times 10^8 \text{ Nmm}^2$$

- b) De doorsnede wordt belast op buiging en extensie, de ligging van de neutrale lijn is gegeven. De vergelijking voor de *nl* is daarmee:

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y + z = 0$$

- c) De rekverdeling in de doorsnede wordt bepaald met: $\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z$
De neutrale lijn moet ook in dit vlak liggen hetgeen inhoudt:

$$0 = \varepsilon + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z = C \times \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y + z\right) \quad C \text{ is een nog te bepalen schalingsfactor}$$

$$\text{De rek t.p.v. het NC is bekend, deze is immers: } \varepsilon = \frac{N}{EA} = \frac{36000}{180 \times 10^6} = 2,0 \times 10^{-4}$$

$$\text{Er moet gelden: } \varepsilon = \frac{1}{2}Ca \Rightarrow C = \frac{2 \times 2,0 \times 10^{-4}}{50,0} = 0,8 \times 10^{-5}$$

Hiermee kunnen de krommingen in het *x-y* en *x-z* vlak worden bepaald:

$$\kappa_y = \frac{1}{2}C = 0,4 \times 10^{-5}; \quad \kappa_z = C = 0,8 \times 10^{-5};$$

- d) De momenten in deze vlakken volgen uit de constitutieve betrekking voor buiging:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \Rightarrow M_y = 400 \times 10^3 \text{ Nmm} \quad M_z = 100 \times 10^3 \text{ Nmm}$$

$$\text{Het krommingsvlak staat onder een hoek: } \tan \alpha_k = \frac{\kappa_z}{\kappa_y} = 2$$

$$\text{Het belastingsvlak staat onder een hoek: } \tan \alpha_m = \frac{M_z}{M_y} = \frac{1}{4}$$

De doorsnede kromt dus zeker niet in hetzelfde vlak als waarin deze wordt belast!

e) Het rek- en spanningsverloop over de doorsnede in het y-z-assenstelsel is:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z = 2,0 \times 10^{-4} + 0,4 \times 10^{-5} y + 0,8 \times 10^{-5} z$$

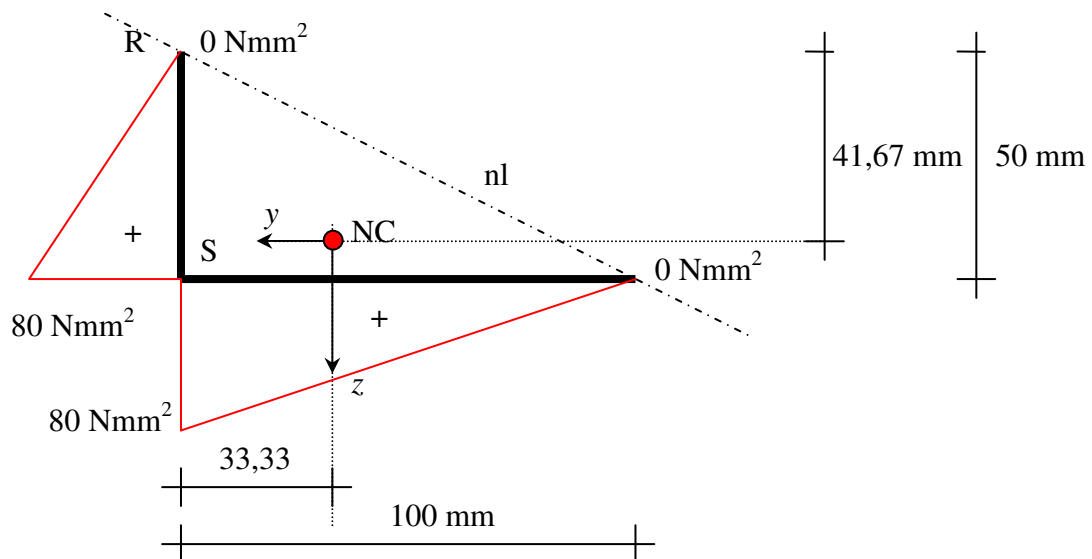
en:

$$\sigma(y, z) = E \times \varepsilon(y, z)$$

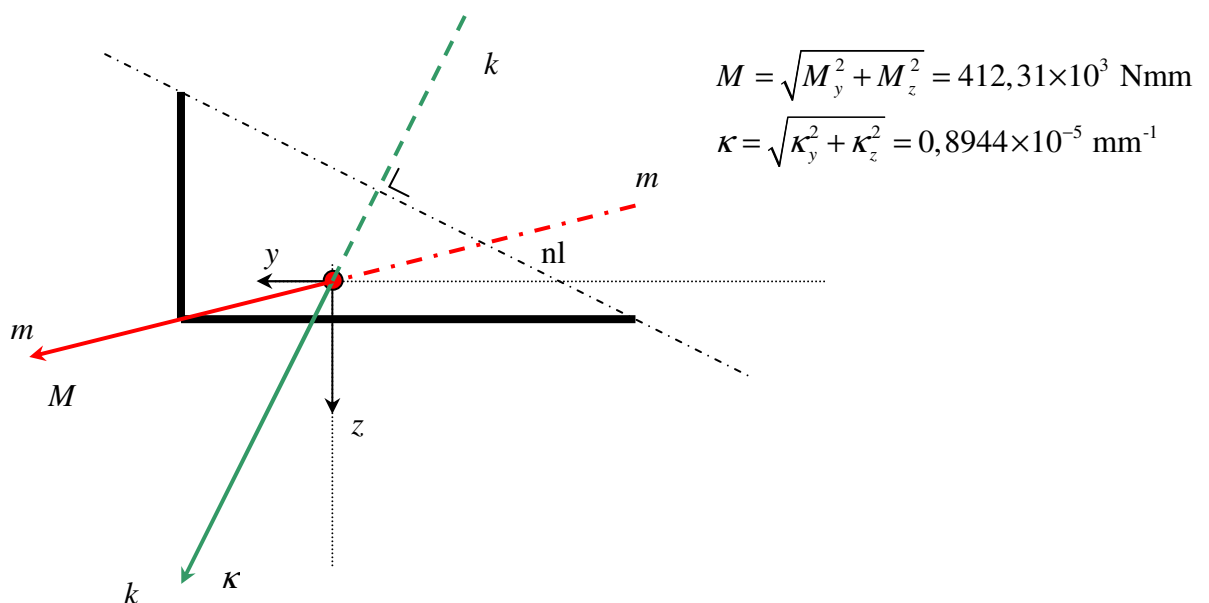
De spanningsverdeling over de doorsnede-delen zal lineair zijn. De spanningen in R en T zijn nul, immers hier snijdt de *nl.* de doorsnede. Om de spanningsverdeling te kunnen tekenen hebben we alleen de spanning in S nodig.

	$E \text{ N/mm}^2$	y	z	Spanning N/mm^2
S	200000	33,33	8,33	80,0

Dit spanningsverloop kan worden getekend in de doorsnede waarbij de spanningen loodrecht worden uitgezet op het (dunne) plaatmateriaal.



Figuur : Normaalspanningen t.g.v. buiging en normaalkracht



Figuur : Belastingsvlak en krommingsvlak

Schuifspanningen

De doorsnede is niet-symmetrisch waardoor er geen gebruik kan worden gemaakt van de gebruikelijke methode voor het bepalen van de schuifspanningen tenzij het y-z-assenstelsel samenvalt met de hoofdrichting. Er moet dus gebruik worden gemaakt van de algemene methode:

$$s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xt} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$

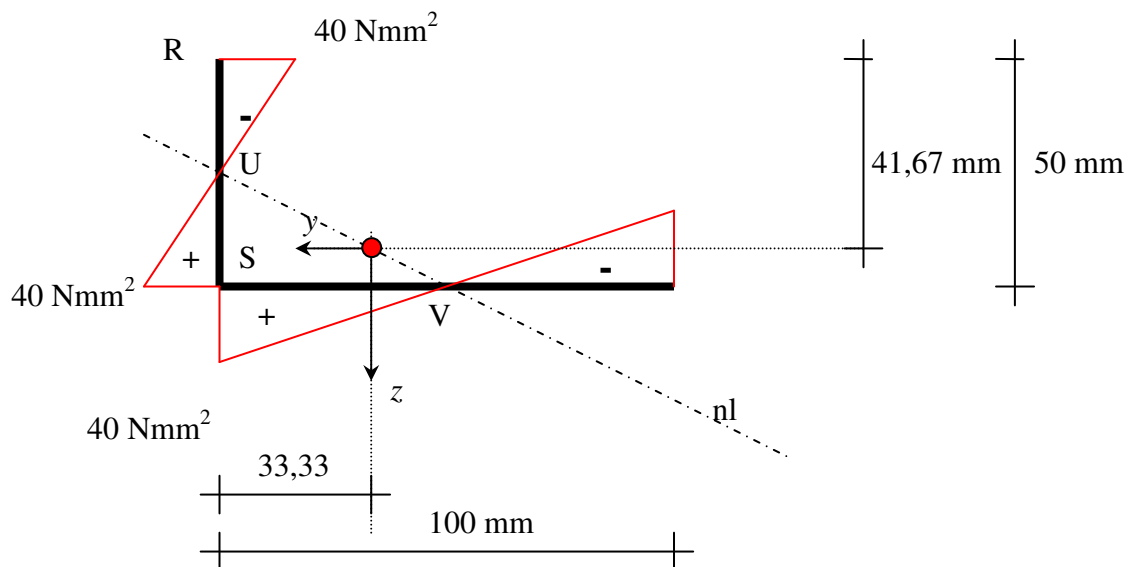
Hierbij is het van belang dat **alleen** de normaalspanningen worden gebruikt t.g.v. het **buigingsaandeel**. De eerder bepaalde spanningsverdeling voldoet hier **niet** aan. We moeten ons dus baseren op het spanningsveld:

$$\varepsilon(y, z) = 0 + \kappa_y \times y + \kappa_z \times z = 0,4 \times 10^{-5} y + 0,8 \times 10^{-5} z$$

en:

$$\sigma(y, z) = E \times \varepsilon(y, z)$$

	$E \text{ N/mm}^2$	y	z	Spanning N/mm^2
R	200000	33,33	-41,67	-40,0
S	200000	33,33	8,33	40,0
T	200000	66,67	8,33	-40,0



Figuur : *Normaalspanningen t.g.v. alleen buiging*

- f) De maximale schuifspanning treedt op waar de neutrale lijn t.g.v. alleen buiging de doorsnede snijdt. Er zijn twee mogelijke punten, U en V. Uit de formule voor de schuifspanning blijkt dat de maximale schuifspanning optreedt daar waar de $R_M^{(a)}$ maximaal is. Op basis van het normaalspanningsverloop is in te zien dat het snijpunt in de onderflens maatgevend zal zijn. Dit punt waar de normaalspanning nul is wordt aangeduid met V. Dit punt heeft t.o.v. T een afstand van 50 mm hetgeen snel kan worden ingezien uit de bovenstaande figuur.

- g) De grootte van de schuifspanning in V kan worden bepaald door de resultante van de normaalspanning te bepalen op het afschuivende deel VT.

$$R_M^{(a)} = \frac{1}{2} \times (-40) \times 50 \times 6 = -6000 \text{ N}$$

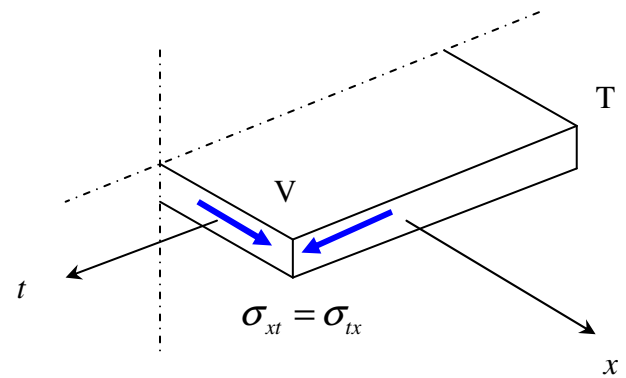
$$\sigma_{xt} = -\frac{R_M^{(a)}}{b^{(a)}M} V \Leftrightarrow$$

$$M = 412,31 \times 10^3 \text{ Nmm}$$

$$V = \sqrt{10000^2 + 2500^2} = 10307,76 \text{ N}$$

$$\sigma_{xt} = -\frac{-6000}{6 \times 412,31 \times 10^3} \times 10307,76$$

$$\sigma_{xt} = 25,0 \text{ N/mm}^2$$



Figuur : Tekenaafpraak σ_{xt}

De positieve richting van de schuifspanningen zijn in blauw in de figuur hiernaast weergegeven (zie ook diktaat). Deze richting komt overeen met de richting van de dwarskracht in de y-richting. De richting van deze schuifspanning werd overigens niet gevraagd.

- h) De schuifspanning in S moet nul zijn. Dat is eenvoudig in te zien uit het normaalspanningsverloop.

Extra toelichting **(valt buiten de beoordeling)**

De schuifspanning is nul op de uiteinden R en T en neemt parabolisch toe tot de maximale waarde in U en V voor resp. het doorsnede deel RS en ST om vervolgens weer af te nemen tot nul in S. Voor dit profiel was de schuifspanning ook snel te bepalen door je te realiseren dat de V_y wordt opgenomen in het deel ST en de V_z wordt opgenomen in het deel RS. Deze delen kunnen we, vanwege het hierboven geschetste schuifspanningsverloop, als strippen beschouwen waarvoor geldt:

$$\tau_{\max}^{RS} = \frac{3}{2} \times \frac{V_z}{at} = 12,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\max}^{ST} = \frac{3}{2} \times \frac{V_y}{2at} = 25,0 \text{ N/mm}^2$$