

ANTWOORDEN

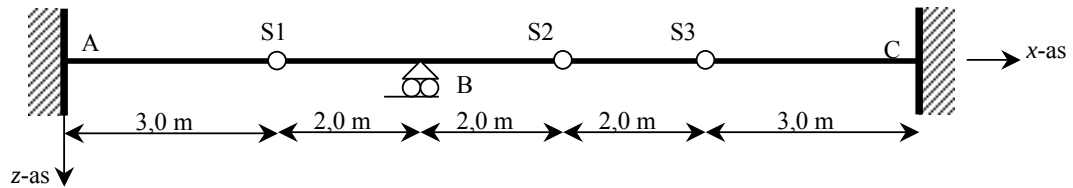
Op de volgende bladzijde is een uitgebreide normuitwerking weergegeven. Op het tentamen mag worden volstaan met de essentie. Belangrijke opmerkingen t.a.v. verbanden en relaties zijn echter wel noodzakelijk maar mogen kort worden gemeld. De schetsen kunnen daarentegen nooit uitgebreid genoeg zijn, zij zijn vaak de grondslag voor communicatie tussen ingenieurs en mogen dus niet ontbreken!

OPGAVE 1

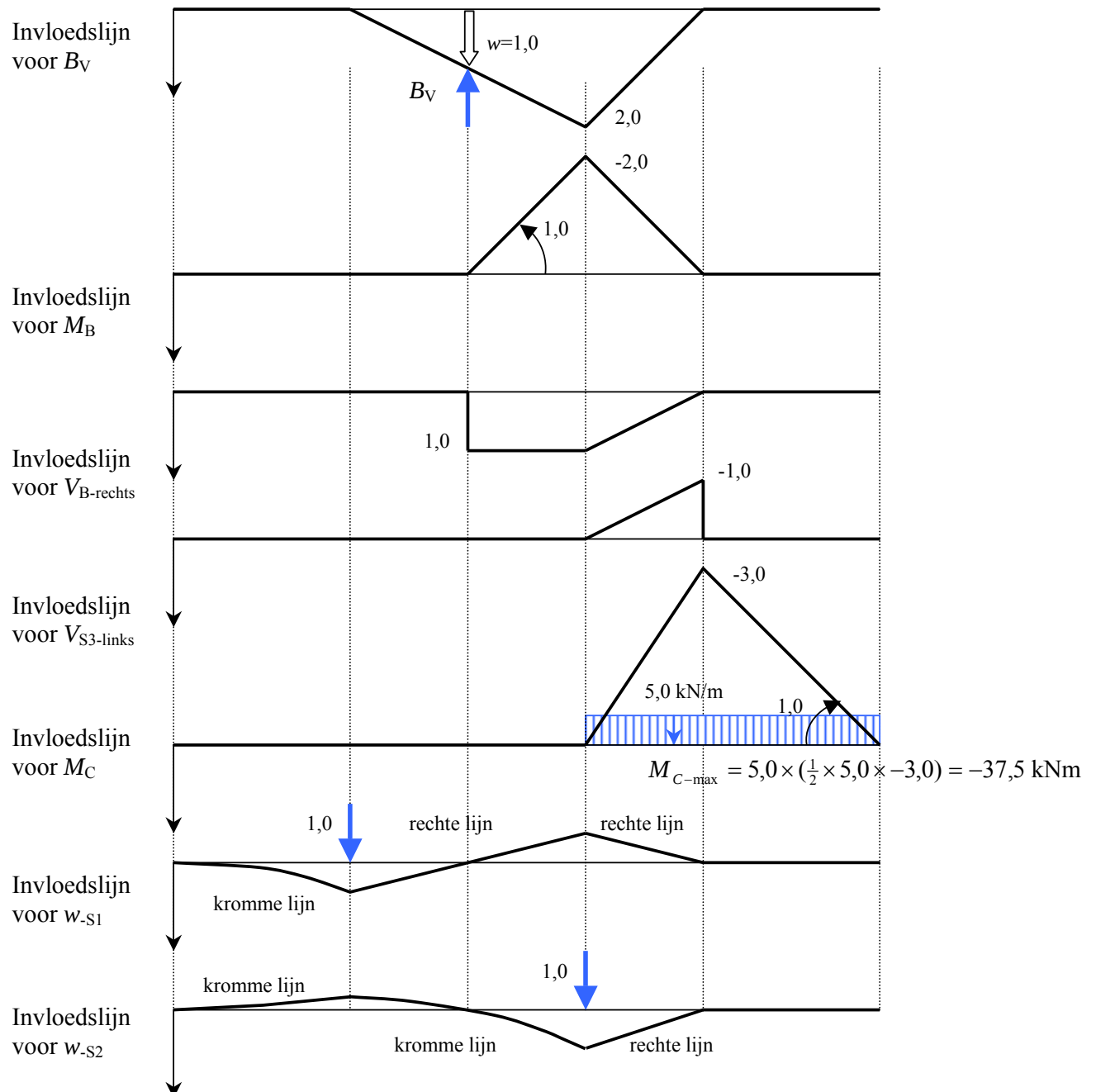
Voor theorievragen zie de leermiddelen.

OPGAVE 2

De constructie is hieronder nog eens weergegeven :



De bijbehorende invloedslijnen t.g.v. een eenheidslast zijn hieronder weergegeven:

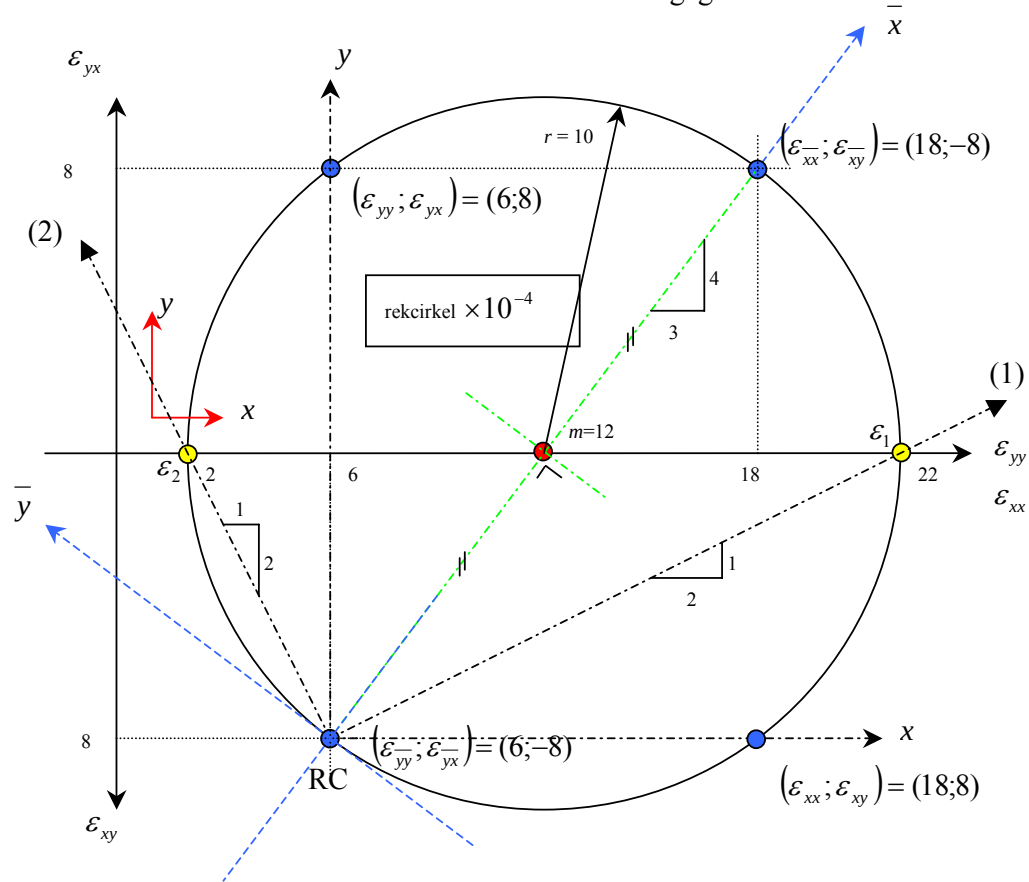


OPGAVE 3

- a) Met het gegeven verplaatsingsveld is de rektensor te bepalen:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 18 \times 10^{-4}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 6 \times 10^{-4}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -8 \times 10^{-4}$$

De cirkel van Mohr voor de rekken is hieronder weergegeven.



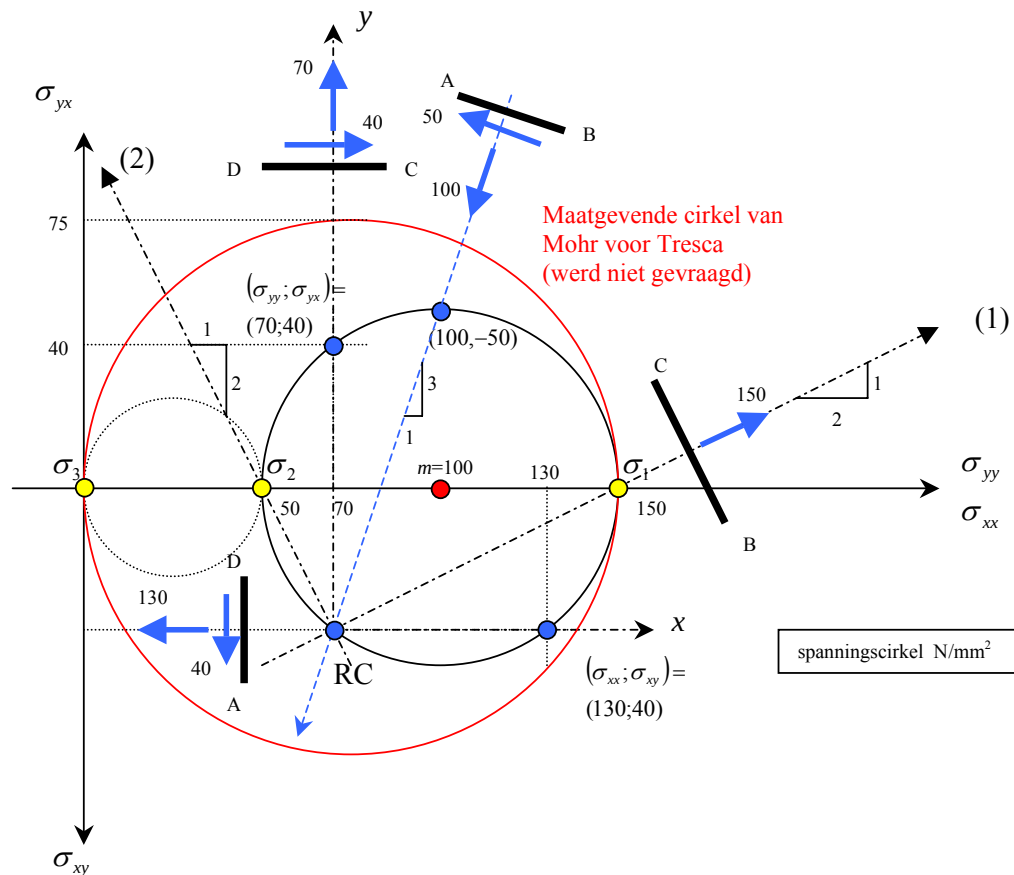
- b) Vezels evenwijdig aan AD en DC zijn vezels van de tensor met als assenstelsel het x - y -assenstelsel. Uit de cirkel zijn deze tensorcomponenten te vinden door vanuit het RC een lijn te trekken evenwijdig aan de richting van de vezel. Hieruit volgt:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

- c) Uit de hoofdrekken zijn de hoofdspanningen te bepalen :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{62,5 \times 10^3}{1-0,25^2} (22 \times 10^{-4} + 0,25 \times 2 \times 10^{-4}) = 150 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) = \frac{62,5 \times 10^3}{1-0,25^2} (2 \times 10^{-4} + 0,25 \times 22 \times 10^{-4}) = 50 \text{ N/mm}^2$$



- d) De cirkel van Mohr voor de spanningen is hierboven weergegeven. Voor ieder vlakje is steeds een lokaal assenstelsel aangenomen waarvan de lokale x-as samenvalt met de uitwendige normaal zoals ook in het dictaat is uiteengezet. Dit is niet noodzakelijk maar een eigen keuze. Merk op dat de relatieve positie van het RC gelijk is aan die in de rekcirkel, zie ook opgave 1.
- e) Theorie zie dictaat. Hoofdspanningen zijn (0; 50; 150). De veiligheidsmargin volgens von Mises volgt uit:

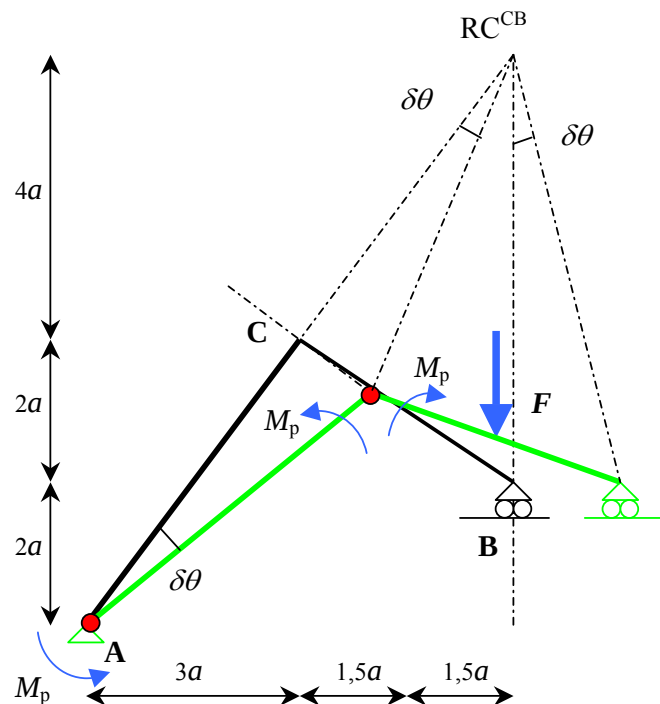
$$\frac{\gamma^2}{6} \left[(150 - 50)^2 + (50 - 0)^2 + (0 - 150)^2 \right] \leq \frac{1}{3} \times 240^2 \Rightarrow \gamma = 1,81$$

Merk op dat volgens Tresca geldt : $\gamma = 120 / 75 \Rightarrow \gamma = 1,60$ (maximale cirkel !)

OPGAVE 4

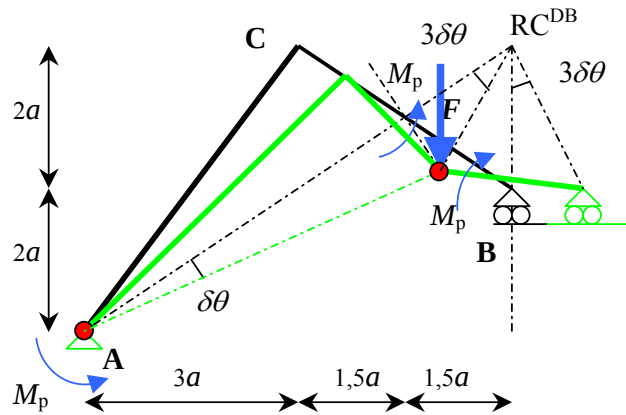
- a) De constructie is enkelvoudig statisch onbepaald. Er zijn 2 plastische scharnieren nodig om een mechanisme te laten ontstaan. Op drie plaatsen in de constructie kunnen scharnieren ontstaan. Daarmee zijn er **drie mogelijke mechanismen**. Het bezwijkmechanisme is dat mechanisme met de laagste bezwijklast en waarvoor geldt dat nergens in de constructie de volplastische sterkte wordt overschreden.
- b) Hieronder zijn de mogelijke mechanismen weergegeven:

Mechanisme 1 met plastische scharnieren in A en C:



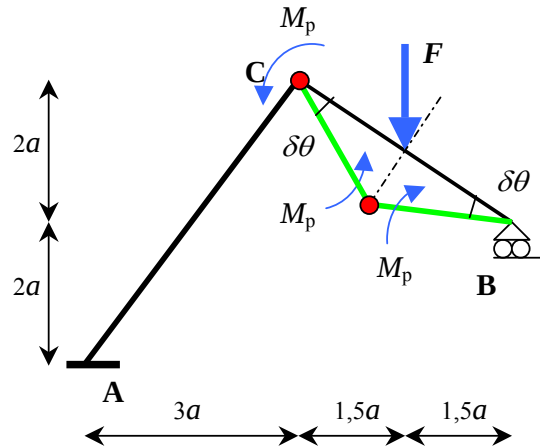
Met behulp van virtuele arbeid kan hiermee de bezwijklast worden gevonden:

$$\underbrace{-M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta}_{\text{staaf AC}} - \underbrace{M_p \times \delta\theta}_{\text{staaf CB}} + F_p \times 1,5a \times \delta\theta = 0 \Leftrightarrow F_p = \frac{2M_p}{a}$$

Mechanisme 2 met plastische scharnieren in A en D:

Met behulp van virtuele arbeid kan hiermee de bezwijklast worden gevonden:

$$\underbrace{-M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta}_{\text{staaf ACD}} - \underbrace{M_p \times 3\delta\theta}_{\text{staaf DB}} + F_p \times 1,5a \times 3\delta\theta = 0 \Leftrightarrow F_p = \frac{10M_p}{9a}$$

Mechanisme 3 met plastische scharnieren in C en D:

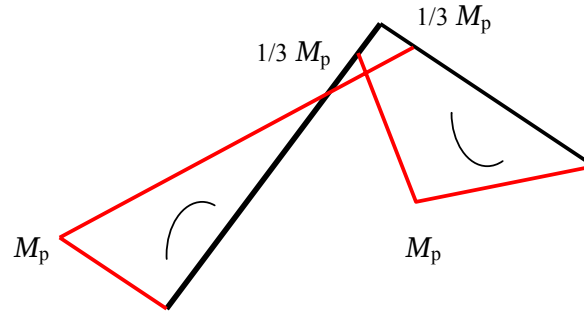
Met behulp van virtuele arbeid kan hiermee de bezwijklast worden gevonden:

$$\underbrace{-M_p \times \delta\theta - M_p \times \delta\theta}_{\text{staaf CD}} - \underbrace{M_p \times \delta\theta}_{\text{staaf DB}} + F_p \times 1,5a \times \delta\theta = 0 \Leftrightarrow F_p = \frac{2M_p}{a}$$

Het maatgevende mechanisme is mechanisme 2 met een bezwijklast van:

$$F_p = \frac{10M_p}{9a}$$

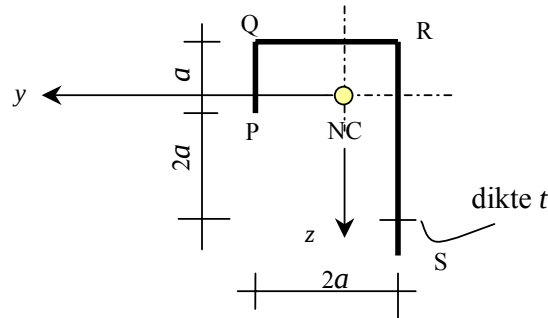
- c) De momentenlijn voor het maatgevende mechanisme is hieronder weergegeven.



De momentenlijn kan worden gevonden door eerst de verticale oplegreactie in B te bepalen. Deze volgt direct uit gegeven dat het moment in D bekend is. Ga dit zelf na.

OPGAVE 5

- a) De ligging van het NC kan worden bepaald ten opzichte van b.v. de rechter bovenhoek R :



$$y_{NC} = \frac{(t \times a \times 2 \times a + t \times 2 \times a \times a)}{(6 \times t \times a)} = \frac{2}{3}a = 120 \text{ mm}$$

$$z_{NC} = \frac{(t \times a \times \frac{1}{2}a + t \times 3 \times a \times \frac{3}{2}a)}{(6 \times t \times a)} = \frac{5}{6}a = 150 \text{ mm}$$

De doorsnede grootheden t.o.v. het NC kunnen nu worden bepaald:

$$EI_{yy} = E \times (ta \times (\frac{4}{3}a)^2 + \frac{1}{12}t \times (2a)^3 + 2ta \times (\frac{1}{3}a)^2 + 3ta \times (\frac{2}{3}a)^2) = 4ta^3 \times E$$

$$EI_{zz} = E \times (\frac{1}{12}ta^3 + ta \times (\frac{1}{3}a)^2 + 2ta \times (\frac{5}{6}a)^2 + \frac{1}{12}t \times (3a)^3 + 3ta \times (\frac{2}{3}a)^2) = \frac{31ta^3}{6} \times E$$

$$EI_{yz} = E \times (ta \times (\frac{4}{3}a) \times (-\frac{1}{3}a) + 2at \times (\frac{1}{3}a) \times (-\frac{5}{6}a) + 3at \times (-\frac{2}{3}a) \times (\frac{2}{3}a)) = -\frac{7ta^3}{3} \times E$$

- b) Het moment in de doorsnede is:

$$M = \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}Fl \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \times 10^8 \end{bmatrix} \text{ Nmm}$$

De kromming in de doorsnede kan worden bepaald met:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_{yy} & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

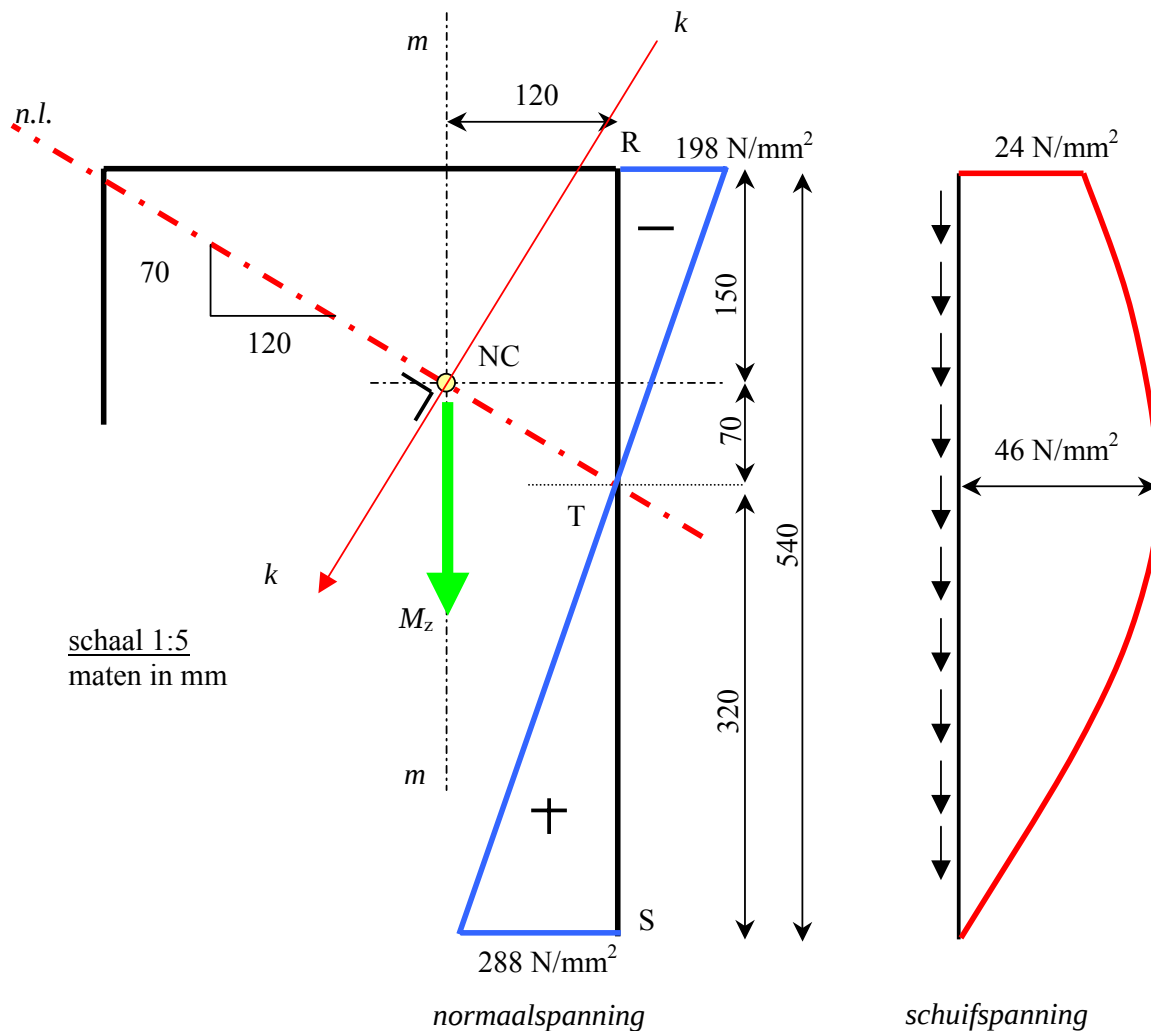
Invullen van de waarden levert:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \times 10^8 \end{bmatrix} = 2 \times 10^5 \begin{bmatrix} 23328 \times 10^4 & -13608 \times 10^4 \\ -13608 \times 10^4 & 30132 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt voor de kromming:

$$\begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2628 \\ 0,4506 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

Op de volgende bladzijde is de doorsnede getekend waarin het krommings- en belastingsvlak zijn aangegeven met resp. de letters *k* en *m*.



- c) De neutrale lijn kan worden voorgesteld door de vergelijking:

$$\kappa_y \times y + \kappa_z \times z = 0$$

Bij afwezigheid van normaalkracht gaat de n.l. per definitie door het NC en snijdt de doorsnede op $y = -120$ mm op $z = 70$ mm. Dit is in de bovenstaande figuur weergegeven. Het functievoorschrift voor de n.l. kan hiermee dus vereenvoudigd worden tot:

$$70y + 120z = 0$$

- d) De spanning voor ieder vezel in de doorsnede kan worden bepaald met:

$$\sigma(y, z) = E \times \varepsilon(y, z) = E \times (\kappa_y \times y + \kappa_z \times z)$$

Deze spanningsverdeling vormt een vlak. Voor het gedeelte RS zal de spanningsverdeling kunnen worden weergegeven met een rechte lijn. Om deze te kunnen bepalen zijn alleen de spanningen in b.v. R en S noodzakelijk.

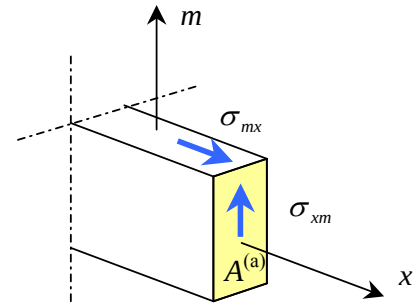
punt	y	z	Spanning [N/mm ²]
R	-120	-150	-198,25
S	-120	390	288,37

- e) De schuifspanningsverdeling is parabolisch indien het normaalspanningsverloop lineair is. Bij afwezigheid van normaalkracht zal de extreme schuifspanning optreden daar waar de neutrale lijn de doorsnede snijdt. Om voor het deel RS de parabolische schuifspanningsverdeling te kunnen teken kan gebruik worden gemaakt van drie punten:

- S, schuifspanning is per definitie nul
- T, maximale schuifspanning t.p.v. de n.l. (te bepalen)
- R (te bepalen)

Aangezien het een niet-symmetrisch profiel betreft moet de schuifspanning bepaald worden met de algemene formule:

$$s_x^{(a)} = -\frac{R_M^{(a)}}{M} V; \quad \sigma_{xm} = \frac{s_x^{(a)}}{b^{(a)}}$$



Hierin is R_M de resultante van de normaalspanningen op het afschuivende deel t.g.v. alleen een buigend moment in de totale doorsnede. Het moment en de dwarskracht die hierbij moet worden gebruikt zijn:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = 200 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

$$V = \sqrt{V_y^2 + V_z^2} = 200 \times 10^3 \text{ N}$$

Zowel het moment als de dwarskracht zijn positief. Op een positief aangenomen snede net links van C werkt de dwarskracht daarom omlaag.

Als begonnen wordt met de schuifspanning in T en het afschuivende deel het deel ST is levert dit voor de schuifspanning:

$$\sigma_{xm} = -\frac{\frac{1}{2} \times 288,366 \times 320 \times 10}{10 \times 200 \times 10^6} \times 200 \times 10^3 = -46 \text{ N/mm}^2$$

Met de hierboven weergegeven tekenafpraak voor de schuifspanning blijkt in T de schuifspanning dus omlaag te werken hetgeen volkomen overeenkomt met de omlaag werkende dwarskracht in de snede. Voor punt R wordt op identieke wijze voor de schuifspanning gevonden:

$$\sigma_{xm} = -\frac{10 \times (\frac{1}{2} \times 288,366 \times 320 - \frac{1}{2} \times 198,252 \times 220)}{10 \times 200 \times 10^6} \times 200 \times 10^3 = -24 \text{ N/mm}^2$$

Het resultaat is in de tekening op de vorige bladzijde aangegeven.