

UITWERKING

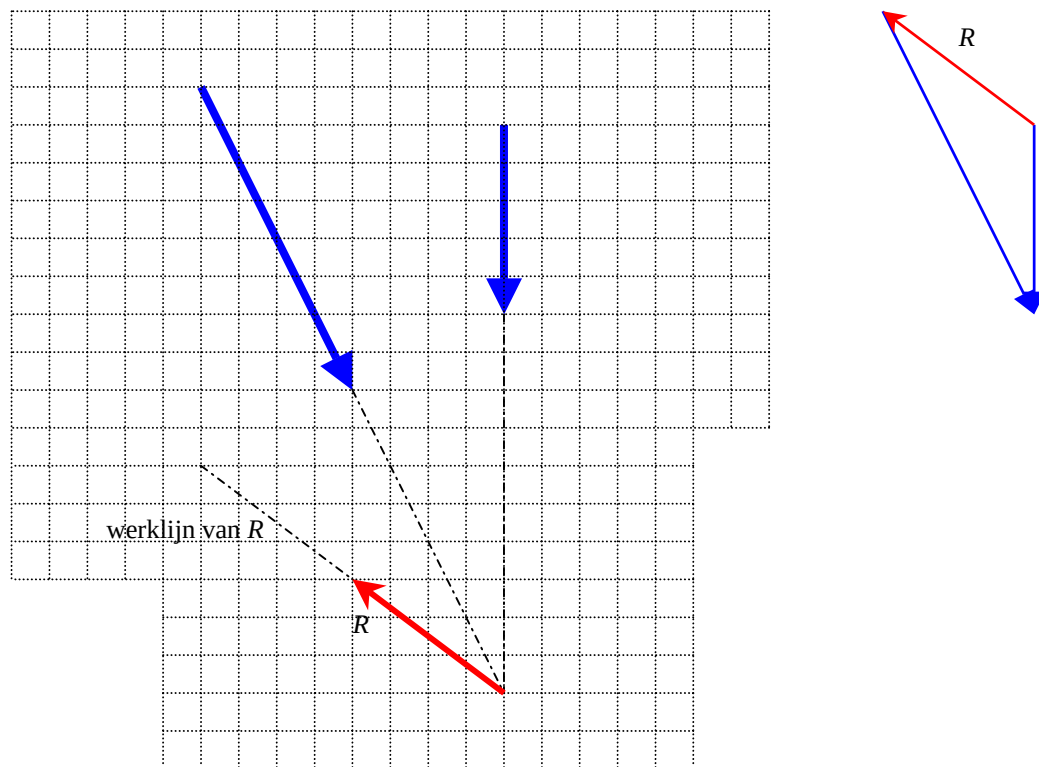
Opgave 1

Onderdeel a)

Zie boek.

Onderdeel b)

Evenwicht betekent een gesloten krachtenveelhoek en krachten die allen door één punt gaan. Met een krachten veelhoek kan R worden bepaald. Hieronder is dit weergegeven.



Het aangrijpingspunt van R kan niet worden bepaald.

Opgave 2

- a) Een vakwerkstaaf kan alleen een druk- of een trekkracht opnemen. Immers op de uiteinden kan geen moment werken i.v.m. de scharnierende aansluiting van de staaf op de omgeving. Aangezien aangenomen wordt dat de belasting uitsluitend in de knopen aangebracht wordt zijn de momenten in iedere snede gelijk aan nul, de gehele M-lijn voor de enkele vakwerkstaaf is dus nul en daarmee ook de helling (= dwarskracht) van de M-lijn. De krachtlijn moet daarom samenvallen met de staaf-as, er is alleen een normaalkracht.
- b) De staven 1 en 4 zijn pendelstaven waardoor er alleen verticale oplegreacties in A en B kunnen optreden. T.p.v de verticale rol in C kan alleen een horizontale oplegreactie optreden. De drie oplegreacties zijn te bepalen met de onderstaande strategie :
1. Met de momentensom om punt C kan de verticale oplegreactie in A worden bepaald. (alle andere eventuele oplegreactie hebben immers een werklijn die door C gaat !)
 2. Met behulp het verticale krachtenevenwicht is dan de verticale oplegreactie in B te bepalen.
 3. Uit het horizontale evenwicht volgt de grootte en richting van de horizontale oplegreactie in C.

Uitwerken levert:

$$A_v = 15,0 \text{ kN} \downarrow \quad B_v = 15,0 \text{ kN} \uparrow \quad C_H = 40,0 \text{ kN} \leftarrow$$

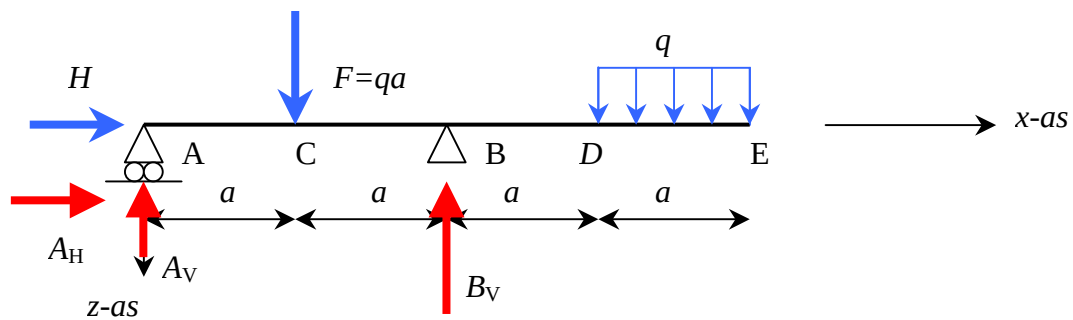
- c) De constructie heeft 3 nulstaven; **12**, **13** en **7** (ga dat zelf na met de bekende regels)
- d) Onderstaande strategie is een mogelijkheid (voor alle krachten) :
1. Begin in A met de verticale oplegreactie, dit levert de kracht in **1**
 2. Begin in B met de verticale oplegreactie, dit levert de kracht in **4**
 3. Begin in C met de horizontale oplegreactie, dit levert de kracht in **9**
 4. Een krachtenveelhoek voor het knoopenevenwicht in D levert **10** en **11**
(alternatief : een horizontale snede door 10, 11 en 13 met vervolgens een momentenevenwicht van het bovenste deel om M levert de staafkracht in **11**)
 5. Een verticale snede door 12, 9, 6 en 3 met vervolgens een momentensom van het rechterdeel om G levert **3**.
 6. Het knoopenevenwicht van L levert vervolgens **6**
 7. Het knoopenevenwicht van G levert de beide onbekenden **8** en **5**.
 8. Tot slot levert het knoopenevenwicht van M de staafkracht **2**. (en eventueel **10**)
 9. Met de drie nulstaven zijn alle 13 staafkrachten bepaald.

- e) De resultaten die op deze manier worden gevonden zijn:

staaf	normaalkracht	Trek/druk	staaf	normaalkracht	Trek/druk
1	+15,0 kN	Trek	7	0 kN	Nulstaaf
2	+25,0 kN	Trek	8	-60,0 kN	Druk
3	+20,0 kN	Trek	9	-40,0 kN	Druk
4	-15,0 kN	Druk	10	+50,0 kN	Trek
5	-15,0 kN	Druk	11	-30,0 kN	Druk
6	-25,0 kN	Druk	12	0 kN	Nulstaaf
			13	0 kN	Nulstaaf

Teken zelf de noodzakelijke krachtenveelhoeken om de getalswaarden en de tekens te controleren !

Opgave 3



- a) De drie mogelijke oplegreacties zijn : A_V , B_H en B_V . De aangenomen richtingen zijn hierboven aangegeven. Met de drie evenwichtsvergelijkingen levert dit dus een oplosbaar geheel op (statisch bepaalde constructie). Voor het bepalen van de oplegreacties kan gekozen worden voor de volgende strategie :

B_V : Momentensom om punt A levert B_V
 A_V : Verticaal krachtenevenwicht levert A_V
 B_H : Horizontaal krachtenevenwicht levert B_H

Uitwerken levert:

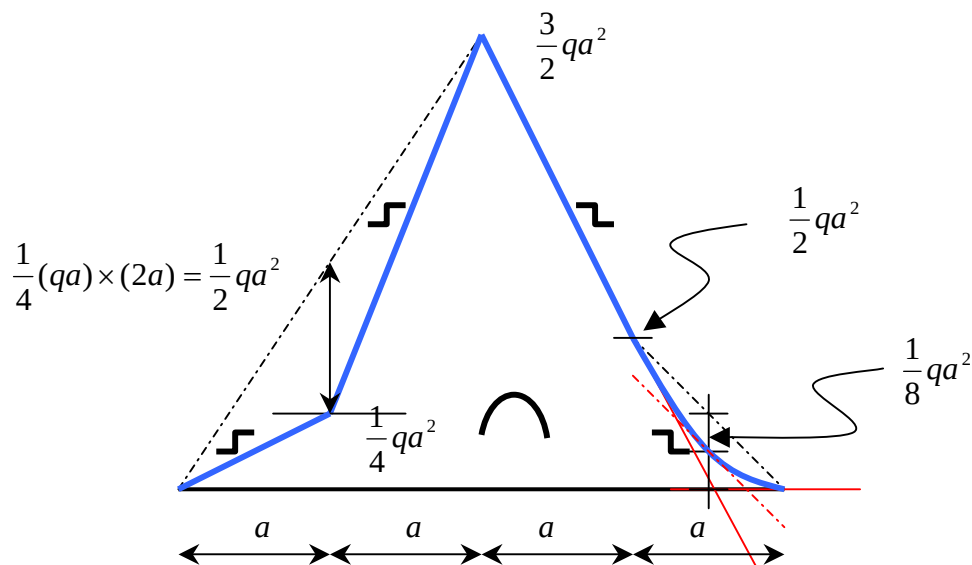
$$B_V = \frac{9}{4}qa \ (\uparrow)$$

$$A_V = -\frac{1}{4}qa \ (\downarrow)$$

$$B_H = -H \ (\leftarrow)$$

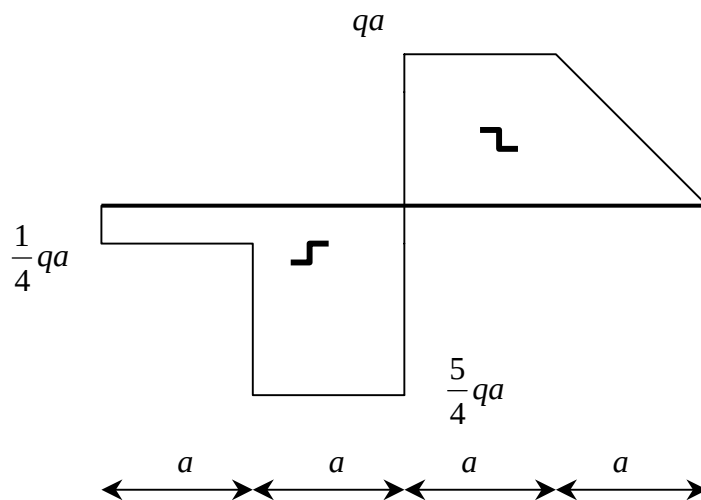
De aangegeven tekens hebben betrekking op de aangenomen richting. Met de pijltjes is aangegeven hoe de reacties in werkelijkheid werken.

- b) De momentenlijn (M -lijn) is hieronder aangegeven inclusief de raaklijnen. Ga zelf na dat e.e.a. in overeenstemming is met alle afspraken en consistent is met het verband dat bestaat tussen moment en dwarskracht.



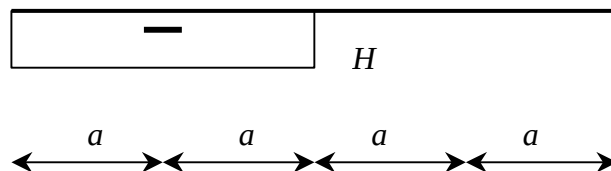
M -lijn inclusief vervormingstekens voor de momenten en dwarskrachten

- c) De dwarskrachtenlijn (V-lijn) kan direct uit de M -lijn worden gevonden aangezien de hellingen in de M -lijn overal bekend zijn. Uiteraard kan de dwarskrachtenlijn ook worden getekend op basis van de eerder gevonden oplegreacties.



V-lijn met vervormingsteken

- d) De normaalkrachtenlijn (N-lijn) is in dit geval eenvoudig te bepalen aangezien alleen over het deel AB een *drukkracht* H ontstaat.



N-lijn

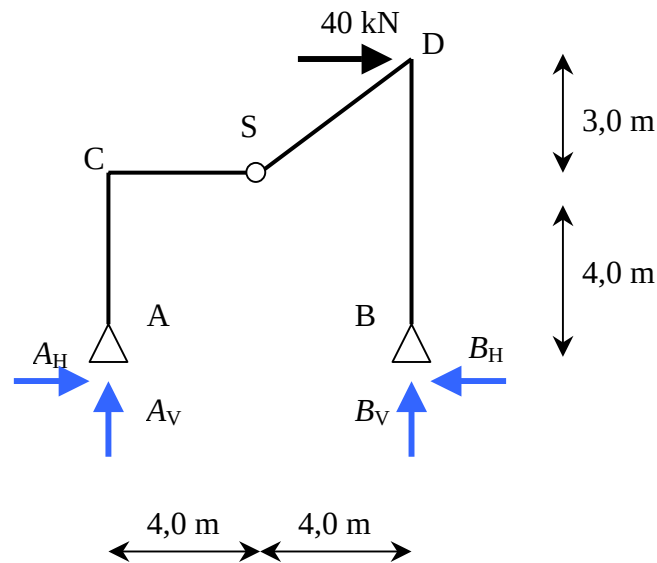
- e) Direct links van de puntlast is de grootte van de dwarskracht is $\frac{1}{4}qa$

Het vervormingsteken is : $\lrcorner$, dit is een negatieve dwarskracht in het weergegeven assenstelsel.

Opgave 4

- a) De oplegreacties van het driescharnierspant zijn te bepalen door eerst de b.v. de som van de momenten van de gehele constructie te bepalen om punt B. De enige onbekende is daarin de verticale oplegreactie in A (immers de werklijn van de horizontale oplegreactie in A gaat door B !). Vervolgens wordt de som van de momenten van het linker deel van de constructie om S genomen met als onbekenden de beide oplegreacties in A (waarvan de verticale inmiddels bekend is). Tot slot kunnen met het horizontale- en verticale evenwicht (van de gehele constructie) de beide onbekende oplegreacties in B worden bepaald.

In de onderstaande schets zijn de onbekende oplegreacties getekend waarbij de gekozen richtingen verder in de berekening als positieve richtingen zijn aangehouden.



Uitwerken levert:

$$\sum T|_{B \text{ geheel}} = 0 : A_V \times 8,0 + 40 \times 7,0 = 0 \Rightarrow A_V = -35,0 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$\sum T|_{S \text{ linker deel}} = 0 : A_V \times 4,0 - A_H \times 4,0 = 0 \Rightarrow A_H = -35,0 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\sum F_V = 0 : B_V + A_V = 0 \Rightarrow B_V = 35,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_H = 0 : A_H + 40 - B_H = 0 \Rightarrow B_H = 5,0 \text{ kN} (\leftarrow)$$

Merk op dat de gekozen richtingen van de oplegreacties in A niet de juiste zijn. De werkelijke richting van de oplegreacties in A zijn dus tegengesteld aan de aangenomen richtingen. De grootte en de richting zoals de oplegreacties in werkelijkheid werken zijn hieronder weergegeven.



Opmerking : Het linkerdeel ACS is verder onbelast, de resultante van de oplegreacties in A moet evenwicht maken met de scharnierkracht. Dat lukt alleen als de werklijn van de resultante van de oplegreacties in A door A en S gaat. (ga na dat dit klopt !)

- b) De momentenlijn kan gevonden worden door op een aantal markante punten een snede aan te brengen en t.p.v. de snede het moment te bepalen. Bekend is van deze constructie dat het moment nul is in A, B en t.p.v. het scharnier S. Er blijven dus feitelijk twee punten over waar even een snede gemaakt moet worden om het moment te bepalen; C en D.

In de figuur rechts is het deel AC vrijgemaakt en is alleen het onbekende moment in de snede weergegeven. Uiteraard werken er in de snede ook nog een onbekende dwarskracht en een onbekende normaalkracht. Het aangenomen moment in C wordt bepaald door:

$$\sum T|_A = 0 : 35,0 \times 4,0 - M_C = 0$$

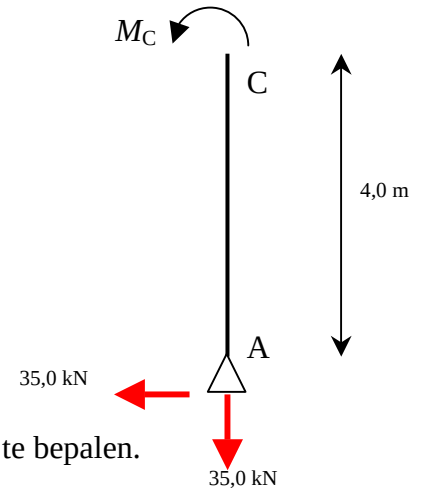
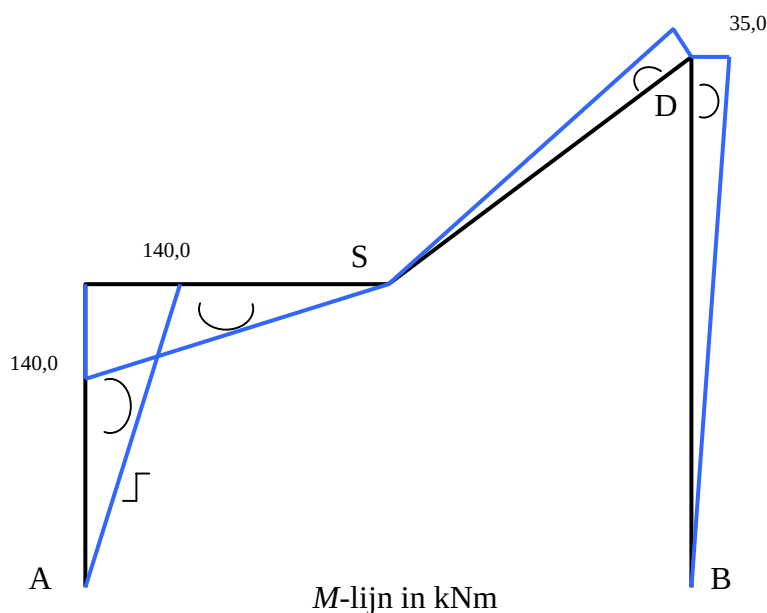
$$M_C = 140,0 \text{ kNm}$$

Het aangenomen moment in D is op een soortgelijke manier te bepalen. Door het deel BD vrij te maken kan het moment in D worden bepaald:

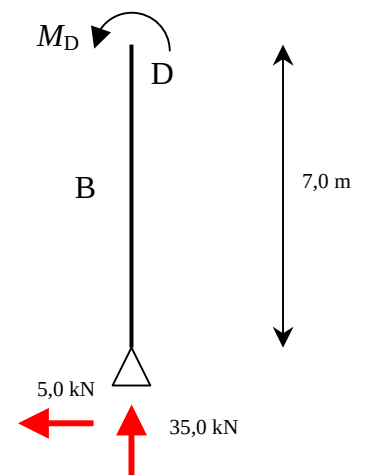
$$\sum T|_D = 0 : 5,0 \times 7,0 - M_D = 0$$

$$M_D = 35,0 \text{ kNm}$$

De momentenlijn kan nu worden geconstrueerd. Over het deel AC zal het verloop parabolisch zijn, immers de belasting is gelijkmatig verdeeld, over het deel CS en SDB zal het verloop lineair zijn. Met deze gegevens is de hieronder weergegeven M-lijn te tekenen.

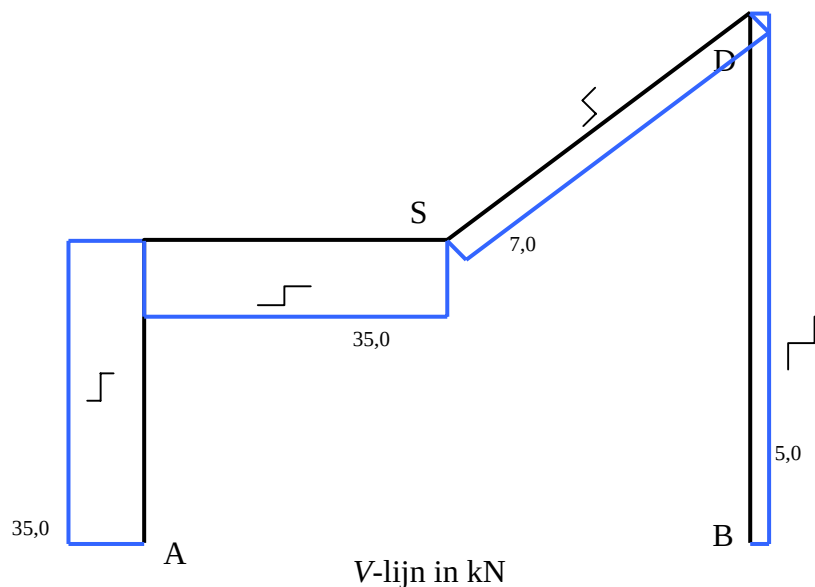


figuur 1 : Vrijgemaakt deel AC



figuur 2 : Vrijgemaakt deel BD

De dwarskracht in een snede is gelijk aan de helling van de M -lijn t.p.v. die snede. De V -lijn is hiermee snel te construeren. (er kan natuurlijk ook gebruik gemaakt worden van de inmiddels bekende oplegreacties). Hieronder is de V -lijn weergegeven.



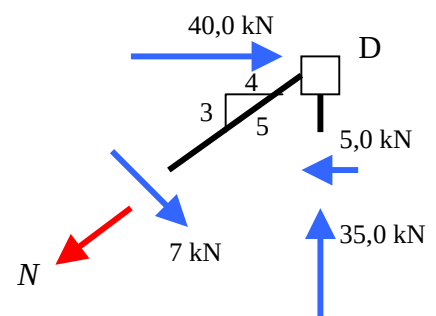
- c) De normaalkracht in staaf DS kan gevonden worden door b.v. het krachtenevenwicht van knoop D te beschouwen. Immers de normaalkracht en dwarskracht in DB zijn bekend evenals de dwarskracht in DS. De enige onbekende in het krachtenevenwicht van knoop D is de normaalkracht in DS.
- d) Hieronder is knoop D vrijgemaakt en zijn alle daarop werkende krachten getekend. De momenten zijn weggelaten, deze hebben uiteraard geen invloed op het krachtenevenwicht van een knoop dat we immers voorstellen als een puntdeeltje.

De onbekende normaalkracht N kan worden bepaald met b.v. de vergelijking voor het verticale krachtenevenwicht:

$$\sum F_V = 0: \quad \frac{4}{5} \times N - \frac{3}{5} \times 7 + 5 - 40 = 0$$

$$N = 49 \text{ kN}$$

De gevonden normaalkracht is positief, het gaat dus om een trekkracht.



- e) Hieronder is knooppunt D getekend met daarop alle werkende krachten en momenten zoals ze in werkelijkheid werken.

