

UITWERKING

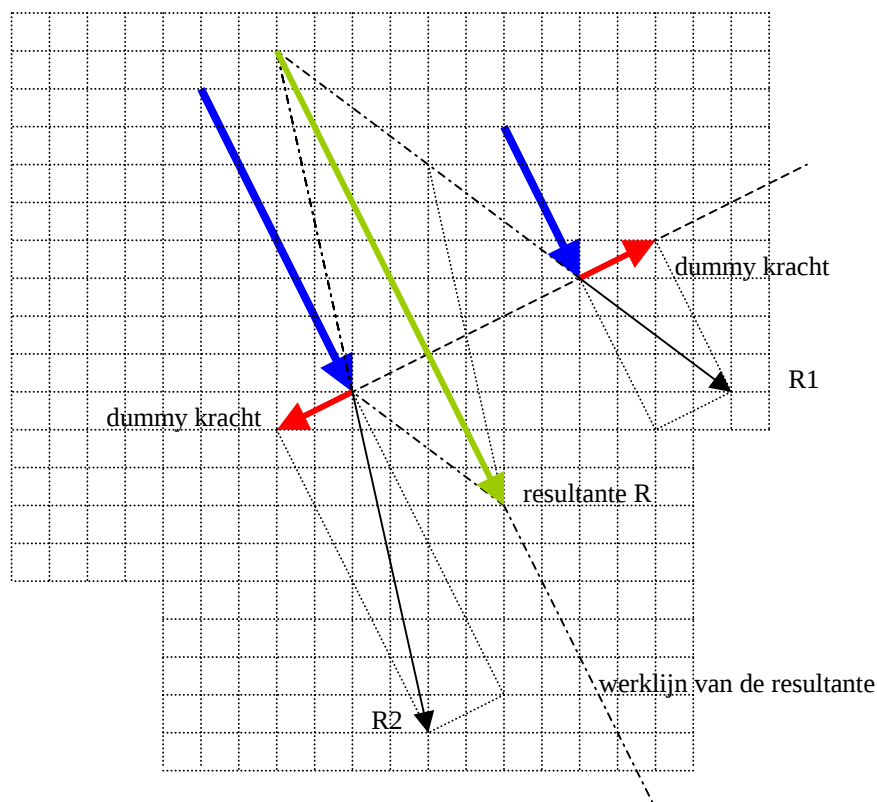
Opgave 1

Onderdeel a)

- Constructie I is vormvast en plaatsvast, constructie II is plaatsvast maar niet vormvast. Bij deze constructie kan er een mechanisme ontstaan. Constructie III is plaatsvast en vormvast. Voor vakwerken is eenvoudig in te zien dat een vormvaste constructie ontstaat indien de constructie is opgebouwd uit (vormvaste) driehoeken. Bij I en III is dat het geval, bij II niet.
- In constructie II zullen twee staven moeten worden geplaatst om het vakwerk vormvast te krijgen.
- Vakwerk III is statisch onbepaald, d.w.z. dat de krachtsverdeling in de constructie niet alleen op basis van het evenwicht is te bepalen. Er zijn namelijk 8 onbekende staafkrachten en 3 mogelijke oplegreacties voor een willekeurig aan te brengen belasting. Per knoop zijn er twee evenwichtsvergelijkingen op te stellen. Dat levert 10 vergelijkingen. Dit vakwerk is daarom enkelvoudig statisch onbepaald.

Onderdeel b)

De oplossing kan gevonden worden door een dummy-kracht aan te brengen met als werklijn de aangegeven stippellijn. Uiteraard moet er evenwicht zijn dus 1 dummy-kracht is niet genoeg, breng er twee aan die elkaar opheffen !



Bepaal vervolgens m.b.v. deze dummy-krachten eerst R1 en R2. Verschuif R1 en R2 langs hun werklijnen naar het snijpunt van deze beide werklijnen en construeer de resultante R. De grootte van R en de werklijn is nu bepaald.

Opgave 2

- a) Een vakwerkstaaf kan alleen een druk- of een trekkracht opnemen. Immers op de uiteinden kan geen moment werken i.v.m. de scharnierende aansluiting van de staaf op de omgeving. Aangezien aangenomen wordt dat de belasting uitsluitend in de knopen aangebracht wordt moet de krachtlijn samenvallen met de staaf-as.
- b) De oplegreacties zijn te bepalen met de onderstaande strategie :
1. Met de momentensom om punt A kan de verticale oplegreactie in B worden bepaald. (alle andere eventuele oplegreactie hebben immers een werklijn die door A gaat !)
 2. Met behulp het verticale krachtenevenwicht is dan de verticale oplegreactie in A te bepalen.
 3. Staaf AK is een verticale pendelstaaf en kan geen dwarskracht overbrengen naar de ondersteuning. (zie antw vraag a). De horizontale belasting kan daarom alleen worden opgenomen door steunpunt B

Uitwerken levert:

$$A_v = 80,0 \text{ kN } \uparrow$$

$$A_H = 0 \text{ kN}$$

$$B_v = 80,0 \text{ kN } \downarrow$$

$$B_H = 70,0 \text{ kN } \rightarrow$$

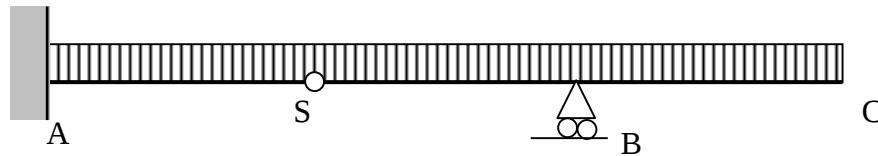
- c) De constructie heeft 4 nulstaven; **8, 9, 10** en **11** (ga dat zelf na met de bekende regels)
- d) Onderstaande strategie is een mogelijkheid :
1. Begin in A met de verticale oplegreactie dit levert de kracht in **12**
 2. Met een krachtenveelhoek voor het knoopenwicht in K kan **6** en **7** worden bepaald
 3. Een krachtenveelhoek voor het knoopenwicht in B levert **1** en **2**
 4. Het knoopenwicht in C levert met een krachtenveelhoek vervolgens **3** en **4**.
 5. Tot slot levert het knoopenwicht in L m.b.v. een krachtenveelhoek **5**.
- e) De resultaten die op deze manier worden gevonden zijn:

staaf	normaalkracht	Trek/druk
1	+10,0 kN	Trek
2	$+70\sqrt{2} \cong 99,0 \text{ kN}$	Trek
3	-10,0 kN	Druk
4	$+10\sqrt{2} \cong 14,14 \text{ kN}$	Trek
5	+70,0 kN	Trek
6	+60,0 kN	Trek
7	-100,0 kN	Druk
8	0,0	Nulstaaf
9	0,0	Nulstaaf
10	0,0	Nulstaaf
11	0,0	Nulstaaf
12	-80,0 kN	Druk

Teken zelf de noodzakelijke krachtenveelhoeken om de getalswaarden en de tekens te controleren !

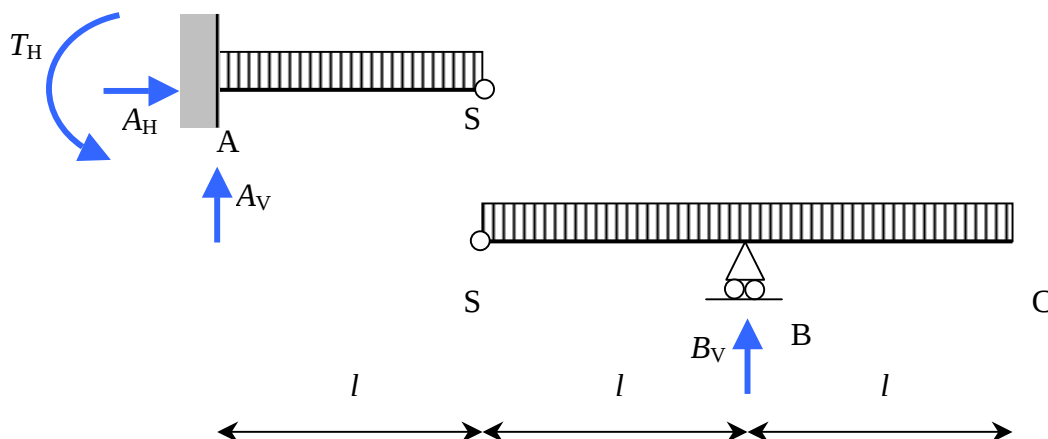
Opgave 3

- a) De pendel BD in de constructie kan worden vervangen door een roloplegging t.p.v. B. Het liggermodel dat dan ontstaat is hieronder weergegeven.



- b) De oplegreacties van deze scharnierligger zijn te bepalen door gebruik te maken van het scharnier S. Immers t.p.v. het scharnier is het moment in de ligger nul !
Aangezien het deel SB even lang is als het deel BC is het gedeelte SBC een wip die in evenwicht is. Snel is in te zien dat bij deze belasting ook de dwarskracht in S nul moet zijn. De belasting op het deel SBC wordt dan volledig opgenomen door het steunpunt in B.

In feite kan de liggerconstructie hierdoor worden gesplitst in twee op zichzelf staande delen met de aangegeven onbekende oplegreacties (immers verbindingskrachten t.p.v. S zijn nul !):



Hieruit volgt:

$$B_V = 2ql$$

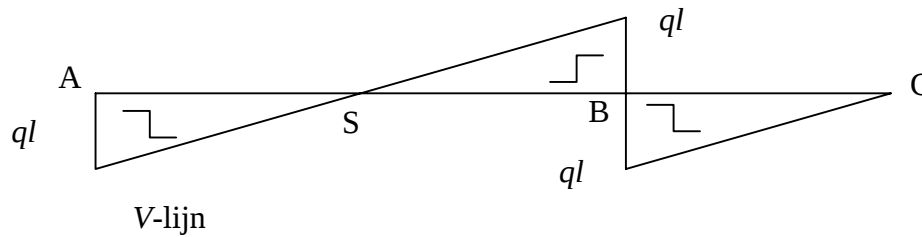
$$A_H = 0$$

$$A_V = ql$$

$$T_V = \frac{1}{2}ql^2$$

Opmerking : Bij deze uitwerking is handig gebruik gemaakt van het feit dat in dit geval op voorhand bekend is dat ook de dwarskracht t.p.v. het scharnier nul is waardoor de constructie zoals aangegeven is gesplitst zonder verbindingskrachten in het scharnier. Noodzakelijk is dit niet, de klassieke aanpak voor de scharnierligger levert uiteindelijk hetzelfde resultaat, ga dat zelf maar eens na !

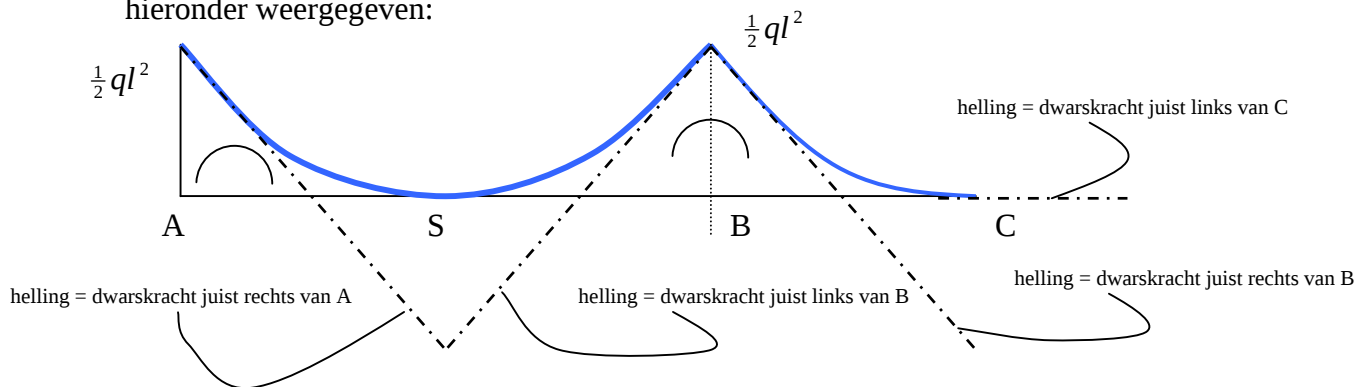
- c) De dwarskrachtenlijn, met vermelding van extreme waarden en de vervormingstekens, is hieronder weergegeven:



Merk op:

1. Dat de sprong in de V-lijn t.p.v. B gelijk is aan de oplegreactie in B.
2. Aangezien de belasting gelijkmatig verdeeld is, moet de dwarskracht lineair zijn.
3. Dat de dwarskracht toevallig in dit geval in S nul is gezien de gekozen afmetingen van de constructie

- d) De momentenlijn, met vermelding van extreme waarden en de vervormingstekens, is hieronder weergegeven:



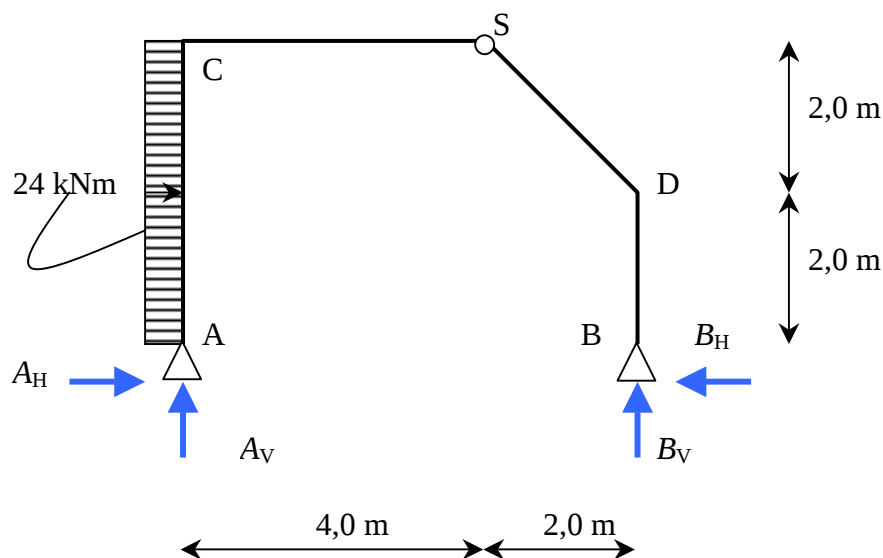
Merk op:

1. Dat het momentenverloop parabolisch is aangezien de belasting gelijkmatig verdeeld is
 2. Het moment in het scharnier S uiteraard nul moet zijn
 3. Dat de helling van de M -lijn nul is in S en C aangezien hier de dwarskracht nul is.
 4. Leg zelf het verband tussen het vervormingsteken van de V-lijn en de M -lijn
- e) De oplegreactie in D is uiteraard gelijk aan de gevonden oplegreactie B_V van het liggermodel.

Opgave 4

- a) De oplegreacties van het driescharnierspant zijn te bepalen door eerst de b.v. de som van de momenten van de gehele constructie te bepalen om punt B. De enige onbekende is daarin de verticale oplegreactie in A (immers de werklijn van de horizontale oplegreactie in A gaat door B !). Vervolgens wordt de som van de momenten van het linker deel van de constructie om S genomen met als onbekenden de beide oplegreacties in A (waarvan de verticale inmiddels bekend is). Tot slot kunnen met het horizontale- en verticale evenwicht (van de gehele constructie) de beide onbekende oplegreacties in B worden bepaald.

In de onderstaande schets zijn de onbekende oplegreacties getekend waarbij de gekozen richtingen verder in de berekening als positieve richtingen zijn aangehouden.



Uitwerken levert:

$$\sum T|_{B \text{ geheel}} = 0: A_V \times 6,0 + 24 \times 4 \times 2,0 = 0 \Rightarrow A_V = -32,0 \text{ kN}$$

$$\sum T|_{S \text{ linker deel}} = 0: A_V \times 4,0 - A_H \times 4,0 - 24 \times 4 \times 2,0 = 0 \Rightarrow A_H = -80,0 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0: B_V + A_V = 0 \Rightarrow B_V = 32,0 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0: A_H + 24 \times 4 - B_H = 0 \Rightarrow B_H = 16,0 \text{ kN}$$

Merk op dat de gekozen richtingen van de oplegreacties in A niet de juiste zijn. De werkelijke richting van de oplegreacties in A zijn dus tegengesteld aan de aangenomen richtingen. De grootte en de richting zoals de oplegreacties in werkelijkheid werken zijn hieronder weergegeven.



- b) De momentenlijn kan gevonden worden door op een aantal markante punten een snede aan te brengen en t.p.v. de snede het moment te bepalen. Bekend is van deze constructie dat het moment nul is in A, B en t.p.v. het scharnier S. Er blijven dus feitelijk twee punten over waar even een snede gemaakt moet worden om het moment te bepalen; C en D.

In de figuur rechts is het deel AC vrijgemaakt en is alleen het onbekende moment in de snede weergegeven. Uiteraard werken er in de snede ook nog een onbekende dwarskracht en een onbekende normaalkracht. Het moment in C wordt bepaald door:

$$\sum T|_A = 0 : 80,0 \times 4,0 - 24 \times 4 \times 2,0 - M_C = 0$$

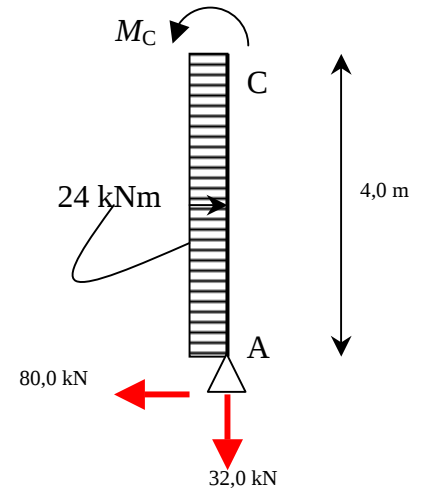
$$M_C = 128,0 \text{ kNm}$$

Het moment in D is op een soortgelijke manier te bepalen. Door het deel BD vrij te maken kan het moment in D worden bepaald:

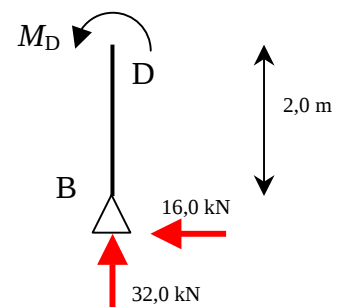
$$\sum T|_D = 0 : 16,0 \times 2,0 - M_D = 0$$

$$M_D = 32,0 \text{ kNm}$$

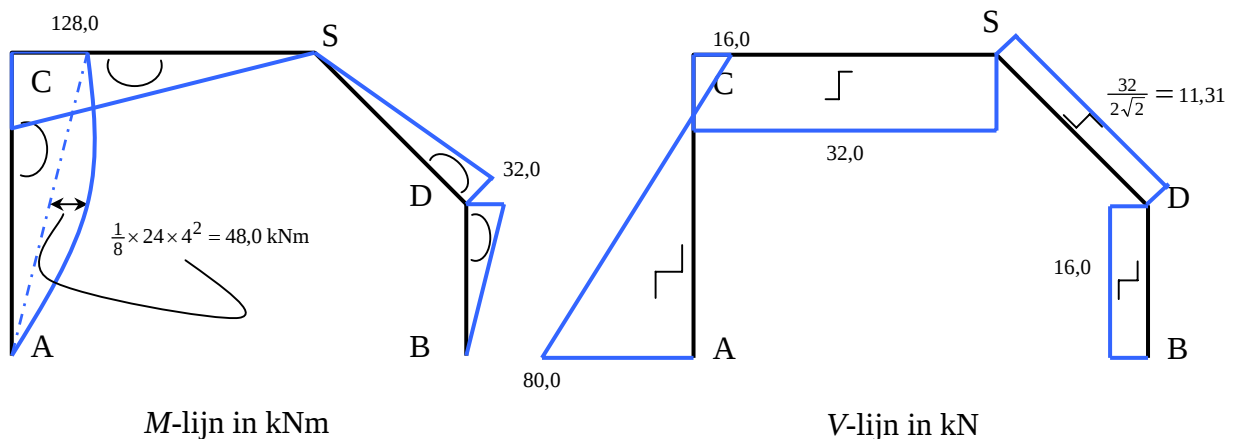
De momentenlijn kan nu worden geconstrueerd. Over het deel AC zal het verloop parabolisch zijn, immers de belasting is gelijkmatig verdeeld, over het deel CS en SDB zal het verloop lineair zijn. Met deze gegevens is de hieronder weergegeven M -lijn te tekenen. De dwarskracht in een snede is gelijk aan de helling van de M -lijn t.p.v. die snede. De V -lijn is hiermee snel te construeren. (er kan natuurlijk ook gebruik gemaakt worden van de inmiddels bekende oplegreacties)



figuur 1 : Vrijgemaakt deel AC



figuur 2 : Vrijgemaakt deel BD



- c) De normaalkracht in staaf DS kan gevonden worden door b.v. het krachterevenwicht van knoop D te beschouwen. Immers de normaalkracht en dwarskracht in DB zijn bekend evenals de dwarskracht in DS. De enige onbekende in het krachterevenwicht van knoop D is de normaalkracht in DS.

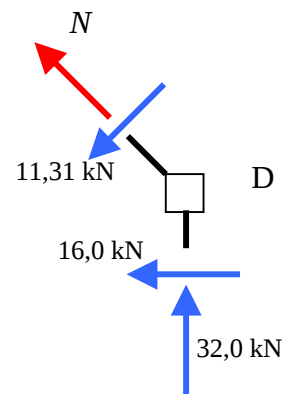
- d) Hieronder is knoop D vrijgemaakt en zijn alle daarop werkende krachten getekend. De momenten zijn weggelaten, deze hebben uiteraard geen invloed op het krachterevenwicht van een knoop dat we immers voorstellen als een puntdeeltje.

De onbekende normaalkracht N kan worden bepaald met b.v. de vergelijking voor het verticale krachterevenwicht:

$$\sum F_v = 0: \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} \times N - \frac{1}{2}\sqrt{2} \times \frac{32}{2\sqrt{2}} + 32 = 0$$

$$N = -\frac{48}{\sqrt{2}} = -33,94 \text{ kN}$$

De gevonden normaalkracht is negatief, het gaat dus om een drukkracht.



- e) Hieronder is knooppunt D getekend met daarop alle werkende krachten en momenten zoals ze in werkelijkheid werken.

